Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МИКРОЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, II

ГЕОРГИ СТ. ПОПОВ

Во второй части статьи „Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками" изучаем гипоэллиптичность и распространение особенностей решений псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. Рассматриваем класс операторов P с кратными характеристиками постоянной кратности $m\geqq 2$, для которых субглавный символ отличен от нуля на характеристическом многообразии Σ. В предположении, что мнимая часть субглавного символа имеет ноль бесконечного порядка в точке $\varrho^0 \in \Sigma$ вдоль бихарактеристики символа $p(x, \xi)=(p_m(x, \xi))^{1/m}$, где p_m — главный символ оператора P, доказываем теорему о микролокальной гипоэллиптичности в точке ϱ^0 с потерей гладкости на $2-1/m$ единиц. При некоторых дополнительных условиях показываем, что потеря гладкости в теореме 1 первой части этой статьи и в теореме 1 второй части точна.

В этой работе изучаются микролокальные свойства псевдодифференциальных операторов с характеристиками тождественной кратности $m\geq 2$. Получены теоремы о гипоэллиптичности и распространении особенностей решений u уравнения $Pu=f$. Эта статья является продолжением работы [1].

Рассмотрим следующий класс псевдодифференциальных операторов

$$P(x, D)=\sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, D), \tag{0.1}$$

где соответствующие символы $P_{m-j}(x, \xi)$ положительно однородные степени $m-j$ относительно ξ. Предположим, что

$$P_m(x,\xi)=(p(x, \xi))^m, \quad m\geqq 2, \ m \in Z, \tag{0.2}$$

где $p(x, \xi)$ — вещественный символ главного типа, т. е.

$$(x, \xi) \in T^*X\setminus 0, \ p(x, \xi)=0 \Rightarrow \operatorname{grad}_{x,\xi} p(x, \xi)\neq 0.$$

Обозначим через Σ множество всех характеристических точек оператора $P(x, D)$, т. е. $\Sigma=\{(x, \xi)\in T^*X\setminus 0;\ p(x, \xi)=0\}$. Очевидно Σ — гладкое многообразие коразмерности 1. Пусть $\Sigma_0=\{(x, \xi) \in \Sigma;\ |\xi| = 1\}$ и $\varrho=(x, \xi) \in \Sigma_0$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\operatorname{Re} p'_{m-1}(\varrho)\neq 0, \tag{A}$$

где $p'_{m-1}(x, \xi)$ — субглавный символ оператора $P(x, D)$.

В отличие от операторов с двукратными характеристиками, микролокальные свойства оператора P с характеристиками тождественной кратности $m\geqq 3$ зависят от поведения субглавного символа p'_{m-1} вдоль трансверсальных к многообразию Σ направлений. Предположим, что N — следующее трансверсальное к Σ векторное поле:

$$N = |\operatorname{grad}_{x,\xi} p|^{-2}\left(\langle \operatorname{grad}_x p, \frac{\partial}{\partial x}\rangle + \langle \operatorname{grad}_\xi p, \frac{\partial}{\partial \xi}\rangle\right).$$

Рассмотрим теперь нижеприводимый многочлен переменной z:

$$I^p(z) = z^m + \sum_{l=0}^{m-2} z^l (N^l p'_{m-1})(\varrho)\tau^{m-1-l}(l\,!)^{-1}, \tag{0.3}$$

где $\varrho \in \Sigma_0$ и $\tau \geqq 0$. Если зафиксируем значение $\varrho^0 \in \Sigma_0$, легко сообразить [2], что любой корень $z^{(\nu)}(\tau, \varrho)$, $1 \leqq \nu \leqq m$, многочлена $I^p(z)$ допускает разложение в ряде Пюизе вида

$$z^{(\nu)}(\tau, \varrho) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{(\nu)}(\varrho)\,(\tau^{-1/m})^{j-m}. \tag{0.4}$$

Предположим, что в точке $\varrho \in \Sigma_0$ имеет место требование

(C) Существует окрестность $U \ni \varrho$, $U \subset \Sigma_0$ и для любого ν, $1 \leqq \nu \leqq m$, константы C_ν, такие, что функция $\operatorname{Im} z^{(\nu)}(\tau, \varrho) - C_\nu$ не меняет знака в $R^+ \times U$.

Легко заметить, что при переходе к L^2 — сопряженному оператору P^* имеет место равенство $I^{P^*}(z) = \overline{I^P(\bar{z})}$. Следовательно, оба условия (A) и (C) выполнены одновременно для операторов P и P^*.

Обозначим через $\gamma(t)$, $\gamma(0) = \varrho^0 \in \Sigma_0$ бихарактеристику оператора P, проходящую через точку ϱ^0. В предположении, что функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет в точке ϱ^0 нуль конечного четного порядка k вдоль бихарактеристики $\gamma(t)$, в [1] доказана теорема о микролокальной гипоэллиптичности с потерей гладкости на $2-(m+k)/m(k+1)$ единиц. В этой работе рассмотрим случай, когда функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет нуль бесконечного порядка в точке ϱ^0 вдоль $\gamma(t)$.

Пусть $t_1, t_2 \in R^1$, $t_1 < 0 < t_2$, $I = [t_1, t_2]$ и число $r = r(m)$ равно $2 - 1/m$ в случае нечетного m и $3 - 2/m$ в случае четного m.

Теорема 1. *Предположим, что для псевдодифференциального оператора P вида* (0.2) *для любого $\varrho \in \{\gamma(t);\ t \in I\}$ выполнены оба условия* (A) *и* (C) . *Пусть $u \in D'(X)$, $\gamma(t_j) \notin WF_{s+m-r}(u)$ для $j = 1, 2$ и $\gamma(t) \notin WF_s(Pu)$ для $t \in I$. Тогда $\gamma(t) \notin WF_{s+m-r}(U)$ для любого $t \in I$.*

Из этой теоремы немедленно следует гипоэллиптичность оператора P в случае, когда функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет ноль бесконечного порядка в точке ϱ^0 вдоль бихарактеристики $\gamma(t)$.

Следствие 1. *Предположим, что для псевдодифференциального оператора P вида* (0.2) *выполнены оба условия* (A) *и* (C) *в точке ϱ^0. Пусть функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}(\gamma(t))$ не равна тождественно нулю в любом интервале, содержащем точки $0 \in R^1$. Тогда $u \in D'(x)$, $\varrho^0 \notin WF_s(Pu) \Longrightarrow \varrho^0 \notin WF_{s+m-r}(u)$.*

Вполне естественно возникает вопрос о точности потери гладкости в следствии 1 настоящей работы и в теореме 1 из [1]. Покажем, что при некоторых дополнительных условиях потеря гладкости точна. Напомним условие (B) из [1].

Существует окрестность $U \ni \varrho^0$, $U \subset \Sigma_0$, такая, что неравенства

(B) $$|\operatorname{Im} \mu_j^{(\nu)}(\varrho)|^{m-1} \leqq C |\operatorname{Im} \mu_1^{(\nu)}(\varrho)|^{m-j}$$

выполнены для любого $\varrho \in U$, $1 \leqq \nu \leqq m$.

Теорема 2. *Рассмотрим псевдодифференциальный оператор P вида* (0.2), *для которого выполнены оба условия* (A) *и* (B) *и число m нечетное. Предположим, что множество $\Lambda = \{(x, \xi) \in \Sigma;\ \operatorname{Im} p'_{m-1}(x, \xi) = 0\}$ — гладкое многообразие, трансверсальное к бихарактеристике $\gamma(t)$ в точке ϱ^0. Пусть функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет нуль порядка k, $k \leqq \infty$, на Λ. Тогда оператор P не гипоэллиптичен с потерей гладкости r, по сравнению с эллиптическими операторами, где $r < 2-(m+k)/m(k+1)$, если $k < \infty$, и $r < 2-1/m$, если $k = \infty$.*

Наконец, приводим один пример, иллюстрирующий все результаты первой и второй части этой статьи.

Пример. Рассмотрим оператор $P(x, D) = D_1^3 + a(x)D_2^2 + b(x)D_1D_2 + c(x)D_1^2 + L_1(x, D)$, где a, b, $c \in C^\infty(R^2)$ и $\operatorname{ord} L_1 = 1$. Пусть $a_1 = \operatorname{Re} a(x)$, $a_2 = \operatorname{Im} a(x)$, $b_1 = \operatorname{Re} b(x)$, $b_2 = \operatorname{Im} b(x)$. Предположим, что выполнено условие (A), т. е. $a(x) \neq 0$ для любого $x \in R^2$.

I. Пусть $a_2(x) = x_1^k \tilde{a}(x)$, $b_2(x) = x_1^l \tilde{b}(x)$, $0 \leqq k < \infty$ и $\tilde{a}(x) \neq 0$ для любого $x \in R^2$, $\tilde{b}(0, x_2^0) \neq 0$, хотя бы для одного $x_2^0 \in R^1$.

1. Предположим, что число k четное. Тогда из теоремы 2 этой статьи и теорем 2 и 3 из [1] получаем, что следующие импликации эквивалентны $k \leqq 2l \Leftrightarrow P$ локально разрешим, $\Leftrightarrow$ P гипоэллиптичен, $\Leftrightarrow$ P гипоэллиптичен с потерей гладкости на $(5k+3)(3k+3)^{-1}$ единиц.

2. Предположим, что число k нечетное. Тогда из теоремы 4 из [1] следует, что оператор P локально неразрешим в точке $(0, x_2)$, если $\tilde{a}(0, x_2) > 0$, и негипоэллиптичен, если $\tilde{a}(0, x_2) < 0$.

II. Предположим, что выполнено условие (B), т. е. неравенство $(b_2(x))^2 \leqq C_k |a_2(x)|^2$, $x \in K$, имеет место для любого компакта $K \subset R^2$. Пусть функция $a_2(x)$ не меняет знака в R^2.

1. Если функция $t \to a_2(x_1^0 + t, x_2^0)$ не обращается тождественно в нуль на любом интервале, содержащем точку $0 \in R^1$, то оператор P гипоэллиптичен в точке (x_1^0, x_2^0) с потерей гладкости на $5/3$ единиц.

2. Пусть функция $t \to a_2(x_1^0 + t, x_2^0)$ тождественно равна нулю в интервале $I = [t_1, t_2]$, $t_1 < 0 < t_2$. Тогда, если $(x_1^0, x_2^0, 0, \xi_2^0) \in WF(u)$ и $(x_1^0 + t, x_2^0, 0, \xi^{20}) \notin WF(Pu)$ для $t \in I$, то хотя бы один из интервалов $I^- = \{(x_1^0 + t, x_2^0, 0, \xi_2^0);\ t_1 \leqq t \leqq 0\}$, $I^+ = \{(x_1^0 + t, x_2^0, 0, \xi_2^0);\ 0 \leqq t \leqq t_2\}$ лежит в $WF(u)$.

3. Предположим, что множество нулей функции $a_2(x)$ образует C^∞ кривую Λ в $\mathbb{R}^2$, трансверсальную к лучам $\{(x_1 + t, x_2);\ t \geqq 0\}$ в любой точке $x \in \Lambda$. Тогда из теорем 1 и 2 получаем:

Функция $a_2(x)$ имеет нуль бесконечного порядка на Λ. $\Leftrightarrow$ Оператор P гипоэллиптичен с потерей гладкости на $5/3$ единиц и негипоэллиптичен с потерей гладкости меньше чем $5/3$.

Теоремы 1 и 2 доказываются методом расцепления, разработанным для операторов типа (0.2) Туловским в [2] (для более общих операторов см. [3]). Оператор P расцепляем на произведение $P \equiv P_1 \dots P_m$ псевдодифференциальных операторов главного типа с неоднородными символами, которые исследуем, применяя технику, разработанную при изучении псевдодифференциальных операторов главного типа с однородными символами. Доказательство теоремы 1 основано на энергетических оценках для подходящей задачи Коши. В доказательстве теоремы 2 сначала получаем подходящие априорные оценки для любого оператора $P^{(\nu)}$, $1 \leq \nu \leq m$, и затем используем технику локализации априорных оценок [4, 5]. Заметим, что теорема 2 не верна в общем случае, когда множество нулей функции $a_2(x)$ не является многообразием или не выполнено условие (B).

Доказательство теоремы 1. Пользуясь результатами из [1] (лемма 1), разложим оператор P в произведении псевдодифференциальных операторов главного типа в конической окрестности Γ точки ϱ^0

$$(1.1) \qquad P(x, D) \equiv \prod_{\nu=1}^{m} [p(x, D) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{(\nu)}(x, D)] \pmod{L^{-\infty}(\Gamma)},$$

где $S_j^{(\nu)} \in L^{1-j/m}(\Gamma)$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\gamma(t) \in \Gamma$ для любого $t \in [t_1, t_2]$. Рассмотрим любой из сомножителей в равенстве (1.1):

$$P^{(\nu)}(x, D) = p(x,D) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{(\nu)}(x, D).$$

Как в доказательстве теоремы 1 в [1] заметим, что $\operatorname{Im} S_1^{(\nu)}(x, \xi) \neq 0$ для $(x, \xi) \in \Gamma$ и для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$ в случае нечетного m, и для $\nu = 1, \ldots, m-2$ в случае четного m. Тогда $|P^{(\nu)}(x, \xi)| \geq C|\xi|^{1-1/m}$, $C > 0$, для $(x, \xi) \in \Gamma$ и для всех вышеуказанных значений ν. Рассмотрим сперва случай нечетного m. Из теоремы 4.9 в [4] следует, что оператор $P^{(\nu)}$ имеет двусторонний микролокальный параметрикс класса $L^{-1+1/m}_{1-1/m,1/m}(\Gamma)$ для $\nu = 1, \ldots, m-1$. Тогда из условий теоремы получаем, что

$$(1.2) \qquad \gamma(t) \notin WF_{s+m-r}(P^{(m)} u)$$

для любого $t \in [t_1, t_2]$. Сосредоточим теперь свое внимание на операторе $P^{(m)}(x, D)$. Напомним [1, лемма 1], что

$$(1.3) \qquad S_j^{(m)}(x, \xi) = \tau(x, \xi)^{1-j/m} \mu_j^{(m)}(\chi(x, \xi))$$

для $(x, \xi) \in \Gamma$ и $j < m$, где отображения τ и χ определены в пункте 1 [1]. Тогда неравенство $|\Sigma_{j=1}^{m} S_j^{(m)}(x, \xi) - z^{(m)}(\tau(x, \xi), (\chi(x, \xi))| \leq C$ выполнено для всех $(x, \xi) \in \Gamma$, и из условия (C) немедленно следует:

Существует константа C и такая, что неравенство $\Sigma_{j=1}^{(m)} \operatorname{Im} S_j^{(\nu)}(x, \xi) \geq C$ имеет место для любого $(x, \xi) \in \Gamma$.

Теперь покажем, что при доказательстве теоремы 1 достаточно рассмотреть только случай, когда $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$, $p(x, \xi) = 0 \Longrightarrow \operatorname{grad}_\xi p(x, \xi) \neq 0$, т. к. случай $p(x, \xi) = 0 \Longrightarrow \operatorname{grad}_x p(x, \xi) \neq 0$ сводится к вышеупомянутому при помощи добавления новой переменной t.

Пусть $u \in \mathscr{E}'(x)$, $\varrho^1 = \gamma(t_1) \notin WF_s(u)$ и $\gamma(t) \notin WF_s(P^{(m)} u)$ для любого $t \in I = [t_1, t_2]$. Существует псевдодифференциальный оператор $A \in L^0(X)$, $WF(A) \subset \Gamma$, для которого $\gamma(t) \notin WF(A-I)$ для любого $t \in I$ и $AP^{(m)} u \in H_s(R^n)$. Рассмотрим оператор $Q(t, x, D_t, D_x)=D_t+q(x, D')$, $D'=D_x$, где $q(x, D')=A(x, D_x)P^{(m)}(x, D_x)$. Легко сообразить, что

$$q(x, D')=q^0(x, D')+q^1(x, D'), \text{ где } q^0(x, \xi)=p(x, \xi)A(x, \xi)\in S^1(X\times R^n),$$

$q^1\in S^{1-1/m}$ и условие (C_1) сохраняется, т. е. неравенство

$$\operatorname{Im} q^1(x, \xi)\geq C \tag{1.4}$$

выполнено для любого $(x, \xi)\in X\times(R^n\setminus 0)$. Обозначим через $\widetilde{\gamma}(t, \varrho)$ бихарактеристику символа $\tau+q^0(x, \xi)$, проходящую через точку $\varrho\in T^*(R^1\times X)$, т. е. $\widetilde{\gamma}(0, \varrho)=\varrho$. Пусть $\widetilde{\gamma}(t)=\widetilde{\gamma}(t-t_1, \widetilde{\varrho^1})$, где $\widetilde{\varrho^1}=(t_1, x^1, 0, \xi^1)$ и $(x^1, \xi^1)=\varrho^1$. Легко заметить, что $\widetilde{\gamma}(t)=(t, x(t), 0, \xi(t))$, где $(x(t), \xi(t))=\gamma(t)$.

Лемма 1.1. *Пусть выполнена импликация* ($v\in \mathcal{E}'(R^1\times X)$, $\widetilde{\varrho}^1\notin WF_s(v)$, $\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s(Qv)$ *для любого* $t\in I$) $\Longrightarrow$ ($\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s(V)$ *для любого* $t\in I$). *Тогда* $\gamma(t)\notin WF_s(u)$ *для всех* $t\in I$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$, $\varphi=1$ в окрестности интервала I. Рассмотрим распределение $v=\varphi\otimes u\in\mathcal{E}'(R^1\times X)$. Сперва покажем, что $\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s(Qv)$ для любого $t\in I$. Очевидно $Qv=(D_t\varphi)\otimes u+\varphi\otimes APu$ и $\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s((D_t\varphi)\otimes u)$ для любого $t\in I$. Легко заметить, что

$$\|\varphi\otimes APu\|_s^2=C_1+\iint\limits_{|\tau|\leq|\xi|}(1+|(\tau, \xi)|^2)^s|\widehat{\varphi APu}(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi$$

$$\leq C_1+\|\varphi\|_0^2\|APu\|_s^2<\infty.$$

Следовательно, $\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s(Qv)$ для любого $t\in I$. Нетрудно сообразить, что $\widetilde{\varrho^1}\notin WF_s(v)$. Тогда из условий леммы получаем, что $\widetilde{\gamma}(t)\notin WF_s(v)$ для любого $t\in I$.

Пусть Γ_1 — коническая окрестность множества $\{\gamma(t); t\in I\}$, U — окрестность интервала I, $\varepsilon>0$ и

$$\Gamma_2=\{(t, x, \tau, \xi);\ t\in U,\ |\tau|<\varepsilon|\xi|,\ (x, \xi)\in\Gamma_1\}.$$

Легко заметить, что $\Gamma_2\cap WF_s(v)=\varnothing$ при подходящем выборе множеств U, Γ_1 и числа $\varepsilon>0$. Пусть $B\in L^0(X)$ — оператор с компактным носителем, $WF(B)\subset\Gamma_1$, $\gamma(t)\notin WF(B-I)$ для любого $t\in I$. Пусть $\varphi_1\in C_0^\infty(R^1)$, $\varphi_1=1$ в окрестности интервала I и $\operatorname{supp}\varphi_1\subset U\cap\{t;\ \varphi(t)=1\}$. Предположим, что оператор $C\in L^0(R^1\times X)$ имеет компактный носитель, $WF(C)\subset\Gamma_2$ и

$$WF(C-I)\cap\{(t, x, \tau, \xi);\ t\in\operatorname{supp}\varphi_1,\ \tau=0,\ (x, \xi)\in WF(B)\}=\varnothing. \tag{1.5}$$

Рассмотрим распределение $\varphi_1\otimes Bu=C(\varphi_1\otimes Bu)+(I-C)(\varphi_1\otimes Bu)$. Отметим, что оператор CB псевдодифференциальный класса $L^0(R^1\times X)$ и $WF(CB)\subset\Gamma_2$, поскольку $WF(C)\subset\Gamma_2$ и $|\tau|<\varepsilon|\xi|$ на Γ_2. Тогда $WF(CB\varphi_1)\cap WF_s(v)=\varnothing$ и, следовательно, $C(\varphi_1\otimes Bu)\in H_s(R^{n+1})$. Без труда проверяется, что

$$WF(\varphi_1\otimes Bu)\subset\{(t, x, \tau, \xi);\ t\in\operatorname{supp}\varphi_1,\ \tau=0,\ (x, \xi)\in WF(B)\}.$$

Тогда из (1.5) и обстоятельства, что распределение $(I-C)(\varphi_1\otimes Bu)$ имеет компактный носитель, следует, что $(I-C)(\varphi_1\otimes Bu)\in C_0^\infty(R^{n+1})$. Таким образом, получаем, что $\varphi_1\otimes Bu\in H_s(R^{n+1})$ и

$$\infty>\|\varphi_1\otimes Bu\|_s^2\geq C_2+\|\varphi\|_0^2\|Bu\|_s^2.$$

Следовательно, $\gamma(t)\notin WF_s(u)$ для любого $t\in I$. Этим образом лемма 1.1 доказана.

Утверждение, теоремы 1 непосредственно следует из нижеприводимой леммы 2.

Лемма 2. *Пусть* $v\in D'(R^1\times X)$, $\tilde{\varrho}_1\notin WF_s(v)$ *и* $\tilde{\gamma}(t)\notin WF_s(Qv)$ *для* $t\in I$. *Тогда* $\tilde{\gamma}(t)\notin WF_s(v)$ *для любого* $t\in I$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{\gamma}(t)\notin WF_{s'-1/m}(v)$ для $t\in I$, где $s'\leq s$. Достаточно доказать, что

$$\tilde{\gamma}(t)\notin WF_{s'}(v) \tag{1.6}$$

для любого $t\in I$.

Стандартным образом, пользуясь неравенством (1.4) и точным неравенством Гординга, для любого компакта $K\subset R^1\times X$ и числа T_1, T_2, $T_1<T_2$ легко получить следующую оценку:

$$\|w(t)\|_0^2\leq C(\|w(t')\|_0^2+\int_{t'}^{t}\|Qw(\tau)\|_0^2d\tau),\ w\in C_0^\infty(K), \tag{1.7}$$

где $T_1\leq t'\leq t\leq T_2$. Пусть Γ — коническая окрестность множества $\{\tilde{\gamma}(t);\ t\in I\}$ и число $t_3\in(t_1,\ t_2)$ такие, что

$$\Gamma\cap WF_{s'}(Qv)=\emptyset,\ \{(t,\ x,\ \tau,\ \xi)\in\Gamma;\ t_1\leq t\leq t_3\}\cap WF_{s'}(v)=\emptyset, \tag{1.8}$$

$$\Gamma\cap WF_{s'-1/m}(v)=\emptyset. \tag{1.9}$$

Пусть V — коническое подмногообразие $T^*(R^1\times X)\setminus 0$ коразмерности 1, трансверсальное к бихарактеристике $\tilde{\gamma}(t)$ в точке $\tilde{\varrho}_1=\tilde{\gamma}(t_1)$, и I_1 — замкнутый интервал, $I=[t_1,\ t_2]\subset\mathring{I}_1$. Не ограничивая общности, предположим, что $\Gamma=\{\tilde{\gamma}(t,\ \varrho);\ t\in I_1,\ \varrho\in V\}$. Теперь выберем неотрицательные символы a и b, порядка 1 и s' соответственно, постоянные вдоль бихарактеристик $\{\tilde{\gamma}(t,\ \varrho):\ \varrho\in V,\ t\in I_2\}$, где $I\subset\mathring{I}_2\subset\bar{I}_2\subset\mathring{I}_1$. Предположим, что символ b эллиптический на $\{\tilde{\gamma}(t),\ t\in I_2\}$, символ a эллиптический на supp b и supp $a\subset\Gamma$, supp $b\subset\Gamma$. Возможность такого выбора нетрудно установить, если первоначально определим функции a и b на V и затем продолжим a и b вдоль интегральных кривых $\tilde{\gamma}(t,\ \varrho)$ векторного поля $H_{\tau+q^0}$. Рассмотрим символы $\Lambda_\varepsilon=be^{-\varepsilon a}$, $\varepsilon\in(0,1]$ и связанные с ними псевдодифференциальные операторы $\Lambda_\varepsilon\in L^{-\infty}(R^{n+1})$. Легко увидеть, что множество символов $\{\Lambda_\varepsilon;\ \varepsilon\in(0,\ 1]\}$ ограничено в пространстве Фреше $S^{s'}(R^{n+1}\times R^{n+1})$ и существует компакт $K\subset R^{n+1}$, такой, что supp $\Lambda_\varepsilon\subset K\times(R^{n+1}\setminus 0)$. Тогда $\Lambda_\varepsilon v\in C_0^\infty(K)$, $\varepsilon\in(0,\ 1]$ и из (1.7) следует неравенство

$$\|\Lambda_\varepsilon v(t)\|_0^2\leq C(\|\Lambda_\varepsilon v(t')\|_0^2+\int_{t'}^{t}\|Q\Lambda_\varepsilon v(\tau)\|_0^2d\tau),\ \varepsilon\in(0,\ 1] \tag{1.10}$$

для любого $t',\ t\in I$, $t'<t$. Теперь проинтегрируем оценку (1.10) относительно переменных t' и t. Пусть $t_4,\ t_5\in(t_1,\ t_3)$, $t_4<t_5$ и $t_6\in I_2$, $t_2<t_6$. Рассмотрим неотрицательную функцию $\Phi\in C_0^\infty(R^2)$, такую, что

$$\operatorname{supp}\Phi\subset\{(t',\ t)\in R^2;\ t'<t,\ t'\in[t_4,\ t_5],\ t\in[t_4,\ t_6]\}.$$

Предположим, что $\Phi(t', t)=1$ для $(t', t)\in J_1\times J_2$, где $J_1\subset(t_4, t_5)$, $J_2\subset(t_4, t_6)$ и $I\setminus J_2\subset[t_1, t_3]$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(I_2)$ и $\varphi=1$ в окрестности множества $\operatorname{supp}_t\Phi$. Обозначим

$$\varphi_1(t')=(\int\Phi(t', t)^2\,dt)^{1/2},\ \varphi_2(t)=(\int\Phi(t', t)^2dt')^{1/2}.$$

Тогда $\varphi_1\in C_0([t_4, t_5])$, $\varphi_2\in C_0([t_4, t_6])$ и $\varphi_2(t)>0$ для $t\in J_2$. Теперь умножим неравенство (1.10) на $\Phi(t', t)^2$ и проинтегрируем относительно t' и t. Заметим, что выполнена следующая оценка:

$$\int\int\Phi(t', t)^2(\int_{t'}^{t} f(s)\,ds)\,dt'dt\leqq\|\Phi\|_0^2\int\varphi^2(s)\,f(s)ds$$

для любого $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^1)$, $f\geqq 0$. Тогда получаем

$$\|\varphi_2\Lambda_\varepsilon v\|_0^2\leqq C(\|\varphi_1\Lambda_\varepsilon v\|_0^2+\|\varphi\Lambda_\varepsilon Qv\|_0^2+\|\varphi[Q, \Lambda_\varepsilon]v\|_0^2) \tag{1.11}$$

для всех $\varepsilon\in(0, 1]$.

Оценим правую сторону неравенства (1.11). Из реляции (1.8), ограниченности множества $\{\Lambda_\varepsilon;\ \varepsilon\in(0, 1]\}$ в $S^{\varepsilon'}(R^{n+1}\times R^{n+1})$ и определения функций φ и φ_1 получаем следующие, равномерные относительно $\varepsilon\in(0, 1]$, оценки: $\|\varphi_1\Lambda_\varepsilon v\|_0^2\leqq C$, $\|\varphi\Lambda_\varepsilon Qv\|_0^2\leqq C$. С другой стороны, $Q=D_t+q^0+q^1$, где $q^1\in L^{1-1/m}(R^n)$ и из (1.9) находим, что $\|\varphi[q^1, \Lambda_\varepsilon]v\|_0^2\leqq C$ для любого $\varepsilon\in(0, 1]$ (константа C не зависит от ε). Наконец' старший символ оператора $\varphi[D_t+q^0, \Lambda_\varepsilon]$ равняется $\varphi(t)\{\tau+q^0, be^{-\varepsilon a}\}(2i)^{-1}=\varphi(t)H_{\tau+q^0}(be^{-\varepsilon a})(2i)^{-1}=0$, так как функции a и b постоянные вдоль интегральных кривых $\{\tilde\gamma(t, \varrho);\ t\in\operatorname{supp}\varphi,\ \varrho\in V\}$ векторного поля $H_{\tau+q^0}$. Тогда $\|\varphi[D_t+q^0, \Lambda_\varepsilon]v\|_0^2\leqq C$, C не зависит от ε и из (1.11) получаем, что для любого $\varepsilon\in(0, 1]$ выполнено неравенство $\|\varphi_2\Lambda_\varepsilon v\|_0^2\leqq C$. Отсюда немедленно следует, что

$$\tilde\gamma(t)\notin WF_{s'}(v)\ \text{ для }\ t\in\operatorname{supp}\varphi_2. \tag{1.12}$$

Пользуясь (1.8) и включением $I\setminus\operatorname{supp}\varphi_2\subset I\setminus I_2\subset[t_1, t_3]$, получаем (1.6). Таким образом теорема 1 доказана в случае нечетного m. В случае четного m проводим аналогичные рассуждения к операторам $P^{(m-1)}$ и $P^{(m)}$.

Теперь докажем следствие 1. Пусть $\varrho^0\notin WF_s(Pu)$. Тогда существует коническая окрестность Γ точки ϱ^0, такая, что $\Gamma\cap WF_s(Pu)=\varnothing$. Пусть t_1, $t_2\in R^1$, $t_1<0<t_2$, $\gamma(t_j)\in\Gamma$ и $\operatorname{Im}p'_{m-1}(\gamma(t_j))\neq 0$ для $j=1, 2$. Сразу проверяется, что $\operatorname{Im}S_1^{(\nu)}(\gamma(t_j))\neq 0$ для $j=1, 2$ и $\nu=1, \dots, m$. Следовательно, операторы $P^{(\nu)}$, $\nu=1, \dots, m$, гипоэллиптичны с потерей гладкости на $1/m$ единиц в точках $\gamma(t_j)$, $j=1, 2$, и $\gamma(t_j)\notin WF_{s+m-r}(u)$. Таким образом, утверждение следствия 1 непосредственно вытекает из теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 2. Предположим, что оператор P гипоэллиптичен с потерей гладкости на r единиц по сравнению с эллиптическими операторами, где $r<1+(1-1/m)k/(k+1)$ если, $k<\infty$, и $r<2-1/m$, если $k=\infty$. Пусть Γ — коническая окрестность точки $\varrho^0\in\Sigma$ и операторы $P^{(\nu)}(x, D)=p(x,D)+\Sigma_{j=1}^\infty S_j^{(\nu)}(x, D)$ такие, что

$$\Gamma\cap WF'(P-P^{(1)}\dots P^{(m)})=\varnothing. \tag{2.1}$$

Из гипоэллиптичности оператора P и теоремы о замкнутом графике для любого компакта $K\subset X$ следует априорная оценка

$$\|u\|_s \leq C(\|Pu\|_{s-m+r} + \|u\|_{s-1}),\ u \in C_0^\infty(K). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Для любого псевдодифференциального оператора $\psi \in L^0(X)$, $WF(\psi) \subset \Gamma$ выполнена оценка*

$$\|\psi u\|_s \leq C(\|P^{(m)}\psi u\|_{s-1+\sigma} + \|\psi u\|_{s-1}),\ u \in C_0^\infty(K), \tag{2.3}$$

где $\sigma = r-(1-1/m)$.

Доказательство. Заметим, что неравенство (2.3) не следует сразу из (2.1) и (2.2), так как $P^{(1)} \dots P^{(m)} \notin L^{1-1/m}(\Gamma)$. Пусть Γ' — коническая окрестность множества $\bar\Gamma$ в $T^*X\diagdown 0$ и

$\Gamma_1 = \{(x, \xi) \in \Gamma';\ |p(x, \xi)| \leq C_1 |\xi|^{(m-1)/m}\}$, $\Gamma_2 = \{(x, \xi) \in \Gamma';\ |p(x, \xi)| \geq C_2 |\xi|^{(m-1)/m}\}$,

где константы $C_1 > C_2 > 0$. Тогда $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Кроме того, пусть $\varphi \in C_0^\infty(R^1)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, и $\varphi(t) = 1$ для любого $|t| \leq C_2$, $\varphi(t) = 0$ для $|t| \geq C_1$. Функцию $\varphi_1 \in S^0_{1,0}(x \times R^n)$ выбираем таким образом, чтобы $0 \leq \varphi_1 \leq 1$, $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset \Gamma'$ и $\varphi_1(x, \xi) = 1$ для $(x, \xi) \in \Gamma$. Рассмотрим теперь неотрицательные функции

$\psi_1(x, \xi) = \varphi(|p(x, \xi)||\xi|^{(1-m)/m})\varphi_1(x, \xi)$, $\psi_2(x,\xi) = [1-\varphi(|p(x, \xi)||\xi|^{(1-m)/m})]\varphi_1(x, \xi)$

Пусть $\varrho = (m-1)/m$, $\delta = 1/m$. Сразу проверяется, что $\psi_j \in S^0_{\varrho,\delta}(X \times R^n)$, $\operatorname{supp} \psi \subset \Gamma_j$ и $\psi_1(x, \xi) + \psi_2(x, \xi) = 1$ для любой точки $(x, \xi) \in \Gamma$. Сейчас мы изучим оператор P в любом множестве Γ_j, $j = 1, 2$. Наша цель — доказать неравенства

$$\|\psi_j \psi u\| \leq C(\|P^{(m)}\psi u\|_{s-1+\sigma} + \|\psi u\|_{s-1}),\ u \in C_0^\infty(K) \tag{2.4}$$

для $j = 1, 2$. Сперва покажем, что существует оператор $A \in L^{m-2+1/m}_{\varrho,\delta}(R^n)$ и такой, что выполнено равенство

$$P\psi_1 = AP^{(m)} + R, \tag{2.5}$$

где $R \in L^{-\infty}(R^n)$. Пусть $0 < q < C_2/C_1$. Последовательно обозначим $\varkappa_1(x, \xi) = \varphi(q|p(x, \xi)||\xi|^{(1-m)/m})\varphi_2(x, \xi)$, $\varkappa_2(x, \xi) = [1-\varphi(q|p(x, \xi)||\xi|^{(1-m)/m})]\varphi_2(x, \xi)$, $\varphi_2 \in S^0_{1,0}(X \times R^n)$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset \Gamma'$ и $\varphi_2 = 1$ на $\operatorname{supp} \varphi_1$. Без труда проверяется, что

$$\operatorname{supp} \psi_1 \cap \operatorname{supp} \varkappa_2 = \emptyset \tag{2.6}$$

и $\varkappa_j \in S^0_{\varrho,\delta}(X \times R^n)$, $\operatorname{supp} \varkappa_j \subset \Gamma_j$. Полагая $A = \varkappa_1 P^{(1)} \dots \varkappa_1 P^{(m-1)}$, простой выкладкой из (2.6) получаем (2.5). Тогда

$$\|P\psi u\|_{s-m+r} \leq C(\|P^{(m)}\psi u\|_{s-1+\sigma} + \|u\|_{s-1}) \quad u \in C_0^\infty(K)$$

и на основании неравенства (2.3) находим (2.4) для $j = 1$. Теперь сосредоточим свое внимание на изучение оценки (2.4) для $j = 2$. Пусть $\varphi_3 \in C_0^\infty(R^1)$, $0 \leq \varphi_3 \leq 1$ и $\varphi_3(t) = 0$ для $|t| \leq C_2/2$, $\varphi_3(t) = 1$ для $|t| \geq 2/3\ C_2$. Рассмотрим неотрицательную функцию $\psi_3(x, \xi) = \varphi_3(|p(x, \xi)||\xi|^{(1-m)/m})\varphi_2(x, \xi)$. Легко сообразить, что

$$\operatorname{supp} \psi_2 \cap \operatorname{supp}(1-\psi_3) = \emptyset. \tag{2.7}$$

Обозначим теперь $Q(x, \xi) = \psi_3(x, \xi)(P^{(m)}(x, \xi))^{-1}$ для $(x,\xi) \in T^*X\diagdown 0$. Если константа C_2 выбрана подходящим образом, то функция $Q(x, \xi)$ является символом оператора класса $L^{-1+1/m}_{\varrho,\delta}(R^n)$. Рассмотрим оператор $QP^{(m)} = \psi_3(x, D) + R_1(x, D)$, где $R_1 \in L^{-1+2/m}_{\varrho,\delta}(R^n)$ (напомним, что число m нечетное и, следовательно, $m > 2$). Тогда

$$QP^{(m)}\psi_2=\psi_3\psi_2+R_1\psi_2=\psi_2-(1-\psi_3)\psi_2+R_1\psi_2=\psi_2+R_2$$

и из (2.7) получаем, что $R_2\in L^{-1+2/m}_{\varrho,\delta}(R^n)$, $-1+2/m<0$. Следовательно,

$$\|\psi_2\psi u\|_s\leqq\|QP^{(m)}\psi_2\psi u\|_s+\|R_2\psi u\|_s$$
$$\leqq C(\|P^{(m)}\psi_2\psi u\|_{s-1+1/m}+\|\psi u\|_{s-1}),\ u\in C_0^\infty(K),$$

откуда немедленно находим (2.5) для $j=2$. Таким образом лемма 2.1 доказана.

Заметим, что в неравенстве (2.3) число σ всегда меньше единицы и, следовательно, оператор $P^{(m)}$ микролокально гипоэллиптичен с потерей гладкости на σ единиц в любой точке $\varrho\in\Gamma$. Исследуем теперь старший символ $P_0^{(m)}(x,\ \xi)=p(x,\ \xi)+\Sigma_{j=1}^{m-1}S_j^{(m)}(x,\xi)$ оператора $P^{(m)}(x,\ D)$ в конической окрестности Γ точки ϱ^0. Напомним [1, лемма 1], что

$$S_1^{(m)}(x,\ \xi)=(p'_{m-1}(\chi(x,\ \xi)))^{1/m}\,\tau(x,\ \xi)^{(m-1)/m}$$

для $(x,\ \xi)\in\Gamma$, где функции χ и τ определены в [1]. Тогда, пользуясь условием (A), заключаем, что

$$\operatorname{Im}S_1^{(m)}(x,\ \xi)=m[\operatorname{Re}p'_{m-1}(\chi(x,\ \xi)\,\tau(x,\ \xi))]^{(m-1)/m}$$
(2.8)
$$\times\operatorname{Im}p'_{m-1}\ (\chi(x,\ \xi))\,[1+O\,(\operatorname{Im}p'_{m-1}(\chi(x,\ \xi)))],$$

где $\chi(x,\ \xi)=(x,\ \xi/|\xi|)$ для $(x,\ \xi)\in\Sigma$. Обозначим $\Lambda'=\{(x,\ \xi)\in\Gamma;\ \operatorname{Im}p'_{m-1}(\chi(x,\ \xi))=0\}$. Из условия теоремы 2 немедленно следует, что Λ' — коническое подмногообразие пространства $T^*X\setminus 0$, трансверсальное к бихарактеристике $\gamma(t)$ в точке ϱ^0. Теперь предположим, что $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0)\neq 0$. После однородного канонического преобразования мы можем привести оператор $P^{(m)}$ в некоторой конической окрестности точки ϱ^0 в следующем виде: $P^{(m)}(x,D)=D_1+\Sigma_{j=1}^{\infty}S_j(x,D)$, $S_j\in L^{1-j/m}(\Gamma)$. Пусть $\widetilde{\Lambda}$ — образмногообразия Λ' под действием этой канонической трансформации. Тогда $\widetilde{\Lambda}$ является трансверсальным многообразием к бихарактеристике $t\to(t,x'_0,\ 0,\ \xi'_0)$ символа ξ_1 в точке $\widetilde{\varrho}^0=(0,\ x'_0,\ 0,\ \xi'_0)$ и, следовательно, $\widetilde{\Lambda}\cap\widetilde{\Gamma}=\{(x,\xi)\in\widetilde{\Gamma};\ x_1=h(x',\xi)\}$, где $h\in C^\infty(\widetilde{\Gamma})$ и $x'=(x_2,\ldots,x_n)$. Заметим, что $\{\xi_1,\ x_1-h(x',\xi)\}=1$ в конической окрестности $\widetilde{\Gamma}$ точки $\widetilde{\varrho}^0$. Теперь сделаем однородную каноническую трансформацию таким образом, чтобы $x_1-h(x',\ \xi)\to y_1$, $\xi_1\to\eta_1$. В новых симплектических координатах получаем $\widetilde{\Gamma}\cap\widetilde{\Lambda}=\{(x,\ \xi)\in\Gamma;\ x_1=0\}$. Из условия теоремы 2 и из равенств (1.3), (2.8) заключаем, что

$$\operatorname{Im}S_1(y,\ \eta)=|\eta|^{(m-1)/m}\,o(|y_1|^k),\ \operatorname{Im}S_j(y,\ \eta)=|\eta|^{(m-j)/m}\,o(|y_1|^{k_j}),\tag{2.9}$$

где $k_j(m-1)\geqq k(m-j)$ ($k_j=\infty$, если $k=\infty$). Теперь применим неоднородное каноническое преобразование $\varkappa$ (см. лемму 2 из [1]), такое, что $\eta_1+\Sigma_{j=1}^{m-1}\operatorname{Re}S_j(y,\ \eta)\xrightarrow{\varkappa}\eta_1$. Пусть Q — образ оператора $P^{(m)}$ под действием $\varkappa$. Тогда $Q=D_1+ia(x,\ D)$, $a(x,D)=\Sigma_{j=1}^{\infty}a_j(x,\ D)$, где $a\in S^{1-j/m}(\widetilde{\Gamma})$ и символы $a_j(x,\ \xi)$ вещественные для $j<m$, $a_j(x,\ \xi)=\operatorname{Im}S_j(\varkappa^{-1}(x,\ \xi))$. Заметим, что в силу леммы 2 из [1] обратное преобразование $\varkappa^{-1}(y,\ \eta)=(x(y,\ \eta),\ \xi(y,\ \eta))$ допускает для любого $M\in Z^+$ представление

$$x(y,\ \eta)=y+\sum_{j=1}^{M}\widetilde{g}_j(y,\ \eta),\ \xi(y,\ \eta)=\eta+\sum_{j=1}^{M}\widetilde{h}_j(y,\ \eta). \tag{2.10}$$

Здесь символы $\widetilde{g}_j$ и $\widetilde{h}_j$—положительно однородные степени $-j/m$ и $1-j/m$ соответственно для $j<M$ и $\widetilde{g}_M\in S^{-M/m}(\widetilde{\Gamma})$, $\widetilde{h}_M\in S^{1-M/m}(\widetilde{\Gamma})$. Кроме того, из (2.9) получаем равенства

$$a_1(y,\ \eta)=|\eta|^{(m-1)/m}o(|x_1(y,\ \eta)|^k),\ a_j(y,\ \eta)=|\eta|^{(m-j)/m}o(|x_1(y,\ \eta)^{k_j}|) \tag{2.11}$$

для $(y,\ \eta)\in\widetilde{\Gamma}$, $j<m$.

Доказательство теоремы 2 закончим, пользуясь следующей леммой:

Лемма 2.2. *Пусть для оператора* $Q=D_1+ia(x,D)$, $a\in S^{1-1/m}_{1,0}(\Gamma)$, *выполнена оценка* (2.3). *Тогда для любого* $l\in Z^+$ *существуют числа* $N_1\in Z_+$, $C>0$ *и такие, что неравенство*

$$\|\psi\|_0^2\leq C\{\lambda^{-2+2\sigma}\int\Big|\sum_{|\alpha+\beta|\leq l-1}\frac{\partial^{\alpha+\beta}Q}{\partial x^\beta\partial\xi^\alpha}(x,\ \lambda\xi)$$

$$\times y^\beta D^\alpha\psi(y)(\alpha!\ \beta!)^{-1}\lambda^{(1-\sigma)(|\alpha|-|\beta|)}\Big|^2dy+\lambda^{2\varrho}\sum_{|\alpha+\beta|\leq N_1}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0^2\}$$

имеет место для любого $(x,\ \xi)\in\widetilde{\Gamma}$ *и* $\psi\in C_0^\infty(R^n)$, *где* $\varrho=\max(\sigma-1,\ \sigma-1/m-l(1-\sigma))$.

Замечание. Для операторов вида $Q=x_1+ia(x,\ D)$, $a\in S^{-1/m}(\widetilde{\Gamma})$ верна аналогичная оценка. Мы не приводим здесь доказательство леммы 2.2, так как она не содержит ничего нового по сравнению с теоремой 1 из [5].

Сперва предположим, что $k<\infty$. Для $l=k$ из леммы 2.2 находим оценку

$$\|\psi\|_0^2\leq C\{\lambda^{-2+2\sigma}\int\Big|\lambda^{1-\sigma}D_1\psi(y)+i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{|\alpha+\beta|\leq k-1}\frac{\partial^{\alpha+\beta}a_j}{\partial x^\beta\partial\xi^\alpha}(x,\ \lambda\xi)$$

$$\times y^\beta D^\alpha\psi(y)(\alpha!\ \beta!)^{-1}\lambda^{(1-\sigma)(|\alpha|-|\beta|)}\Big|^2dy+\lambda^{2\varrho}\sum_{|\alpha+\beta|\leq N_1}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0^2\}$$

для любого $(x,\ \xi)\in\Gamma$ и $\psi\in C_0^\infty(R^n)$. Сначала установим неравенство $\varrho<0$. Заметим, что $-1+\sigma<0$. Кроме того, из неравенства $\sigma<1-(1-1/m)k/(k+1)$ заключаем, что $\sigma-1/m-k(1-\sigma)<0$. Следовательно, $\varrho<0$. Теперь простой выкладкой получаем

$$\lambda^{-1+\sigma}\frac{\partial^{\alpha+\beta}a_j}{\partial x^\beta\partial\xi^\alpha}(x,\ \lambda\xi)\lambda^{-(1-\sigma)(|\beta|-|\alpha|)}\leq C\lambda^{\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|-\sigma|\alpha|}. \tag{2.12}$$

Нас интересуют только те значения мультииндексов α и β, для которых $\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|-\sigma|\alpha|\geq0$. Тогда $\alpha=0$ и $\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|\geq0$. Следовательно, для таких значений β и для $1<j<m$ имеем $|\beta|\leq(\sigma-j/m)(1-\sigma)^{-1}<k(m-j)(m-1)^{-1}$. Итак, из (2.11) и (2.12) получаем

$$\lambda^{-1+\sigma}\frac{\partial^\beta a_j}{\partial x^\beta}(y,\ \lambda\eta)\lambda^{-(1-\sigma)|\beta|}=\lambda^{\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|}o(|x_1(y,\ \lambda\eta)|^{k_j-\beta})$$

$$=\lambda^{\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|}o(|x_1(y,\ \lambda\eta)|)$$

для $(y,\eta)\in\widetilde{\Gamma}$ и $1<j<m$. Напомним, что из (2.10) следует равенство

$$x_1(y,\ \lambda\eta)=y_1+\sum_{j=1}^{M-1}\widetilde{g}(y,\ \eta)\lambda^{-j/m}+o(\lambda^{-M/m}).$$

Применяя теорему о неявных функциях к $\Phi(y_1, y', \eta, \tau)=y_1+\Sigma_{j=1}^{M-1}\ \widetilde{g}(y,\ \eta)\tau^j$, в некоторой окрестности точки $(0, y'_0, 0, \eta'_0, 0)$ находим C^∞ функцию $f(y', \eta, \tau)$ и такую, что $\Phi(f,\ y',\ \eta,\ \tau)=0$ в подходящей окрестности точки $(y'_0,\ \eta_0,\ 0)$. Пусть $y_{\lambda,1}=f(y'_0,\ \eta_0,\ \lambda^{-1/m})$ и $y_\lambda=y_{\lambda,1},\ y'_0)$. Тогда $(y_\lambda,\ \lambda\eta_0)\in\widetilde{T}$ для $\lambda\geqq\lambda_0$ и $|x_1(y_\lambda,\ \lambda\eta_0)|\leqq C\lambda^{-M/m}$. Следовательно,

$$\lambda^{-1+\sigma}\ \frac{\partial^\beta a_j}{\partial x^\beta}(y_\lambda,\ \lambda\eta_0)\lambda^{-(1-\sigma)|\beta|}\leqq C\lambda^{\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|-M/m}.$$

Теперь выберем число M таким образом, чтобы $\sigma-j/m-(1-\sigma)|\beta|-M/m<0$. Отсюда сразу видно, что

$$\|\psi\|_0^2\leqq C(\|D_1\psi\|_0^2+\lambda^{-\varepsilon}\sum_{|\alpha+\beta|\leqq N_1}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0^2) \tag{2.13}$$

для $\lambda\geqq\lambda_0$ и для любой функции $\psi\in C_0^\infty(R^n)$. С другой стороны, легко сообразить, что оценка (2.13) не имеет места для хотя бы одной функции $\psi\in C_0^\infty(R^n)$ и для всех достаточно больших значений λ. Таким образом теорема 2 доказана в случае $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0)\neq 0$ и $k<\infty$. В остальных случаях теорема доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Попиванов, Г. Попов. Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. *Сердика*, **6**, 1980, 167—181.
2. В. Н. Туловский. Распространение особенностей операторов с характеристиками постоянной кратности. *Труды Моск. мат. об-ва*, 39, 1979, 113—134.
3. G. Popov. Hyppoelliptic operators with multiple characteristics. *Math. Nachr.*, **95**, 1980, 27—46.
4. L. Hörmander. Pseudo-differential operators and hipoelliptic equations. *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure. Math*., **10**, 1967, 138—183.
5. Ю. В. Егоров. Псевдодифференциальные операторы главного типа. *Мат. сб.*, **73**, 1967, 354—374.
6. П. Попиванов, Г. Попов. Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 1531—1535.
7. J. Duistermaat, L. Hörmander. Fourier integral operators, II. *Acta Math.*, **128**, 1972, 183—269.
8. L. Hörmander. Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-differential operators of principal type). *Ann. of Math.*, **108**, 1978, 569—609.
9. В. Я. Иврий. Волновые фронты решений некоторых гиперболических псевдодифференциальных уравнений, *Труды Моск. мат. об-ва*, 39, 1979, 83—112.
10. В. Я. Иврий. Волновые фронты решнний некоторых псевдо-дифференциальных уравнений. *Труды Моск. мат. об-ва*, **39**, 1979, 49—82.
11. Ю. В. Егоров. Субэллиптические операторы. *Успехи мат. наук*, **30**, 1975, №2, 57—114.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 10. 10. 1979