Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЛАБАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ, II

КУРТ НАВРОТЦКИ

Пусть даны непустые, конечные или счетные множества A и X, семейство $(K_x)_{x\in X}$ стохастических матриц $K_x=(K_x(a, a'))_{a,a'\in A}$ и стационарная случайная последовательность $(\xi_n)_{n\geqq 1}$ со значениями в X, распределение которой обозначим P. В настоящей работе изучаются асимптотические свойства произведений матриц $K_{\xi_1}\dots K_{\xi_m}$ для $m\longrightarrow\infty$. Она является продолжением работы Навротцкого (1979). Поэтому не будем повторять данные там определения и обозначения.

6. В работе [2] Р. Фасслер заметил, что из условия (1) теоремы 1 в [1] уже вытекает существование стационарного относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения Q.

Действительно, из этого условия и в силу стационарности P получим

$$\lim_{m\to\infty}\int\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a_1, a)-K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a_2, a)|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_1}\dots{}_{x_{m+1}}(a_1, a)-K_{x_1}\dots{}_{x_{m+1}}(a_2, a)|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})=0.$$

Далее, подынтегральное выражение в первом пределе монотонно убывает: Для $m\geqq 1$ и $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X^{+\infty}_{-\infty}$ имеет место

$$\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m-1}}\dots{}_{x_0}(a_1, a)-K_{x_{-m-1}}\dots{}_{x_0}(a_2, a)|$$

$$=\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a',a''\in A}K_{x_{-m-1}}(a_1, a')K_{x_{-m-1}}(a_2, a'')$$

$$\times(K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a', a)-K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a'', a))\Big|$$

$$\leqq\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a',a''\in A}K_{x_{-m-1}}(a_1, a')K_{x_{-m-1}}(a_2, a'')$$

$$\times\sum_{a\in A}|K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a' a)-K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a'', a)|$$

$$\leqq\sup_{a',a''\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a', a)-K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a'', a)|.$$

Таким образом, из условия (1) следует

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{a_1,a_2\in A}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a_1, a)-K_{x_{-m}}\dots{}_{x_0}(a_2, a)|=0 \tag{14}$$

для P — п. в. $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X^{+\infty}_{-\infty}$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 167—175.

Кроме того, для $a^* \in A$, $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$ и $0<l<m$ справедлива оценка

$$\sum_{a\in A} |K_{x_{-m}\ldots x_0}(a^*, a) - K_{x_{-l}\ldots x_0}(a^*, a)|$$

$$\leq \sum_{a\in A} \sum_{a'\in A} K_{x_{-m}\ldots x_{-l-1}}(a^*, a') |K_{x_{-l}\ldots x_0}(a', a) - K_{x_{-l}\ldots x_0}(a^*, a)|$$

$$\leq \sup_{a'\in A} \sum_{a\in A} |K_{x_{-l}\ldots x_0}(a', a) - K_{x_{-l}\ldots x_0}(a^*, a)|.$$

Поэтому для всех $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством (14) существует закон распределения $q((\cdot), (x_n)_{n\leq 0})$ на $\mathfrak{A}$ такой, что $\lim_{l\to\infty} \sum_{a\in A} |K_{x_{-l}\ldots x_0}(a^*, a) - q(a, (x_n)_{n\leq 0})| = 0$.

Легко проверяется, что q удовлетворяет равенству (7) из [1], и следовательно, является плотностью стационарного относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения Значит, такое распределение существует.

Из этого обстоятельства следует, что все высказывания теорем 1, 2 и 3 из [1] эквивалентны.

7. Предположим, что существует стационарное относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение Q. Его плотность обозначим q. Нас интересует, при каких условиях и в каком смысле имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{a\in A} |K_{\xi_{-m}\ldots\xi_0}(a', a) - q(a, (\xi_n)_{n\in\Gamma})| = 0\,?$$

В случае конечного A ответ дан в [3, теорема 1].

Предложение 1. *Следующие высказывания эквивалентны*:

(а) *Для всех $a' \in A$ и P — п. в. $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X_{-\infty}^{+\infty}$ выполняется соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{a\in A} |K_{x_1\ldots x_m}(a', a) - q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma})| = 0.$$

(б) *Для всех $a' \in A$ выполняется соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \int \sum_{a\in A} |K_{x_{-m}\ldots x_0}(a', a) - q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})| P(d(x_n)_{n\in\Gamma}) = 0.$$

(в) *Для всех законов распределения U на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством $U(Ax(\cdot)) = P$ выполняется соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \| U * K^m - Q \| = 0.$$

Если эти условия справедливы, то существует не более одного стационарного относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения, и его плотность не зависит от $(x_n)_{n\geq 1}$.

Доказательство. В силу стационарности P для всех $a' \in A$ имеем

$$(15)\quad \begin{aligned}&\int \sum_{a\in A} |K_{x_{-m+1}\ldots x_0}(a', a) - q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})| P(d(x_n)_{n\in\Gamma})\\ &= \int \sum_{a\in A} |K_{x_1\ldots x_m}(a', a) - q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma})| P(d(x_n)_{n\in\Gamma}).\end{aligned}$$

Поэтому из (а) следует (б).

Кроме того, подынтегральное выражение в правой стороне равенства (15) монотонно убывает:

$$\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_{m+1}}(a',a)-q(a,(x_{n+m+1})_{n\in\Gamma})|$$

$$=\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a''\in A}\{K_{x_1\ldots x_m}(a',a'')-q(a'',(x_{n+m})_{n\in\Gamma})\}K_{x_{m+1}}(a'',a)\Big|$$

$$\leqq\sum_{a''\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a',a'')-q(a'',(x_{n+m})_{n\in\Gamma})|,$$

так что из (б) следует (а).

Далее, если U закон распределения на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством $U(A\times(\cdot))=P$, а u его плотность, то

$$\|U*K^m-Q\|=\frac{1}{2}\int\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a'\in A}u(a',(x_n)_{n\in\Gamma})K_{x_1\ldots x_m}(a',a)-q(a,(x_{n+m})_{n\in\Gamma})\Big|P(d(x_n)_{n\in\Gamma}).$$

Выбирая $U=\delta_{a_0}\times P$, с помощью (15) из этого можно вывести, что (б) следует из (в).

Из последнего равенства, кроме того, получим, что

$$\|U*K^m-Q\|\leqq\frac{1}{2}\sum_{a'\in A}\int\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a',a)-q(a,(x_{n+m})_{n\in\Gamma})|\,u(a',(x_n)_{n\in\Gamma})P(d(x_n)_{n\in\Gamma}),$$

(16)

а поэтому (в) следует из (а).

Последнее утверждение предложения очевидно.

Если A конечно, то высказывания (а), (б) и (в) из предложения 1 эквивалентны следующему (см. [3, теорема 1]):

(б*) *Для всех* $a'\in A$ *и* P — *п. в.* $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$ *выполняется соотношение*: $\lim_{m\to\infty}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m}\ldots x_0}(a',a)-q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})|=0.$

В случае бесконечного множества A такая эквивалентность может отсутствовать: Пусть, например, $A=X=\{0,1,2,\ldots\}$, а

$$K_x(a,a')=\begin{cases}\delta_{f(x)}(\{a'\}), & \text{если } a=0,\\ \delta_1(\{a'\}), & \text{если } a=1,\\ \delta_{a-1}(\{a'\}), & \text{если } a>1,\end{cases}$$

для $a,a'\in A$, $x\in X$, где f отображает X в $\{1,2,\ldots\}$. Пусть далее $P=\bigtimes_{n=-\infty}^{+\infty}R$, то есть $\ldots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\ldots$ независимы и одинаково распределены по закону распределения R. При этом выбираем f и R так, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}P(f(\xi_{-m})\geqq m)=\sum_{l=1}^{\infty}f(l)R(\{l\})=+\infty. \tag{17}$$

Легко проверить, что $p=\delta_1$ является единственным стационарным начальным распределением стохастической матрицы $L=\sum_{x\in X}R(\{x\})K_x$. Поэтому [4, теорема 5.1.2] $Q=\delta_1\times P$ — единственное стационарное относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение. Его плотность, очевидно, имеет вид $q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})=\delta_1(\{a\})$ $a\in A$, $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$, так что для всех $m\geqq1$, $a'\in A$, $x_1,\ldots,x_m\in X$

$$\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a',a)-q(a,(x_n)_{n\in\Gamma})|=2(1-K_{x_1\ldots x_m}(a',1))$$

$$=\begin{cases} 2\ 1_{\{m+1,\ m+2,\ \dots\}}(f(x_1)), & \text{если} \quad a'=0,\\ 2\ 1_{\{m+2,\ m+3,\ \dots\}}(a'), & \text{если} \quad a'>0.\end{cases}$$

Таким образом условие (а) из предложения 1 выполняется. С другой стороны,

$$\{(x_n)_{n\in\Gamma}: \lim_{m\to\infty} \sum_{a\in A} |K_{x_{-m}\dots x_0}(0,\ a)-q(a,\ (x_n)_{n\in\Gamma})|=0\}$$

$$=\bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{(x_n)_{n\in\Gamma}: f(x_{-k})\leq k+1\},$$

а вероятность этого события в силу (17) и леммы Бореля—Кантелли равна нулю.

Заметим, что в данном примере $Q(\{0\}\times X_{-\infty}^{+\infty})=0$. Остается открытым, эквивалентны ли условия (б) и (б*) для бесконечного A, если $Q(\{a\}\times S)>0$ для всех $a\in A$ и $s\in X_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством $P\ (S)\ >0$.

Будем теперь искать достаточные условия для высказывания из предложения, которые похожи на условие (2) теоремы 1 из [1].

Для этого нужны некоторые обозначения: Если $x\in X$, то $\widetilde{K}_x$ обозначим стохастическую матрицу с элементами $\widetilde{K}_x([a_1,\ a_2],\ [a_1',\ a_2'])=K_x(a_1,\ a_1')\ K_x(a_2,\ a_2')$, $a_1,\ a_2,\ a_1',\ a_2'\in A$. Тогда закон распределения

$$Q^2=\int \sum_{a_1,\ a_2\in A} 1_{(\cdot)}(a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma})q(a_1,\ (x_n)_{n\in\Gamma})q(a_2,(x_n)_{x\in\Gamma})\,P(d(x_n)_{n\in\Gamma})$$

является стационарным относительно P и $(\widetilde{K}_x)_{x\in X}$, то есть $Q^2(A\times A\times(\cdot))$

$$=P \text{ и } \int \widetilde{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ (\cdot))\ Q^2(d[a_1,\ a_2,(x_n)_{n\in\Gamma}])=Q^2,$$

где ядро $\widetilde{K}$ определяется равенством

$$\widetilde{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ \{a_1'\}\times\{a_2'\}\times S)=\widetilde{K}_{x_1}([a_1,\ a_1'],\ [a_2,\ a_2'])\delta_{x_{(n+1)_{n\in\Gamma}}}(S).$$

Кроме того, для $[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]\in A\times A\times X_{-\infty}^{+\infty}$ обозначим $\boldsymbol{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ (\cdot))$ закон распределения однородной марковской случайной последовательности $([\alpha_{1,n},\ \alpha_{2,n},\ (\xi_m^{(n)})_{m\in\Gamma}])_{n\geq 1}$ со значениями в $A\otimes A\otimes X_{-\infty}^{+\infty}$, с начальным распределением $\delta_{[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]}$ и с вероятностью перехода $\widetilde{K}$. Далее, пусть

$$Q^2*\boldsymbol{K}=\int \boldsymbol{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ (\cdot))\ Q^2\,(d[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]).$$

В силу (18) закон распределения $Q^2*\boldsymbol{K}$ стационарен.

Теорема 6. *Следующие высказывания эквивалентны:*

(а) *Для* Q^2—*п. в.* $[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]\in A\times A\times X_{-\infty}^{+\infty}$ *существует* $m\geq 1$, *такое, что*

$$\sum_{a\in A} |K_{x_1\dots x_m}(a_1,\ a)-K_{x_1\dots x_m}(a_2,\ a)|<2.$$

(б) *Для* Q^2—*п. в.* $[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]\in A\times A\times X_{-\infty}^{+\infty}$ *имеет место*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{a\in A} |K_{x_1\dots x_m}(a_1,\ a)-K_{x_1\dots x_m}(a_2,\ a)|=0.$$

(в) *Для Q—п. в. $[a', (x_n)_{n\in\Gamma}]\in A\times X_{-\infty}^{+\infty}$ имеет место*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a', a)-q(a', (x_{n+m})_{n\in\Gamma})|=0.$$

(г) *Для всех плотностей и законов распределений U на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством $U(A\times(\cdot))=P$ и $U\ll Q$ имеет место*

$$\lim_{m\to\infty}\int\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a'\in A}u(a', (x_{n-m})_{n\in\Gamma})\,K_{x_{-m+1}\ \ldots\ x_0}\ (a', a)-q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})\Big|P(d(x_n)_{n\in\Gamma})=0$$

(д) *Для всех законов распределений U на $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ со свойством $U(A\times(\cdot))=P$ и $U\ll Q$ имеет место*

$$\lim_{m\to\infty}\|U^*K^m-Q\|=0.$$

(е) *Имеет место*

$$Q^2 * K(\bigcup_{n=1}^{\infty}{}_n\alpha_{1,n}=\alpha_{2,n}{}^{\text{“}})=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему по следующей схеме:

(д) $\xrightarrow{\text{I}}$ (г) $\xrightarrow{\text{II}}$ (в) $\xrightarrow{\text{III}}$ (д), (е) $\xrightarrow{\text{IV}}$ (в) $\xrightarrow{\text{V}}$ (б) $\xrightarrow{\text{VI}}$ (а) $\xrightarrow{\text{VII}}$ (е).

I. Утверждение сразу следует из равенства

$$2\|U * K^m-Q\|=\int\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a'\in A}u(a', (x_{n-m})_{n\in\Gamma})\,K_{x_{-m+1}\ldots x_0}(a', a)$$

$$-q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})\Big|P(d(x_n)_{n\in\Gamma}).$$

II. В доказательстве предложения 1 мы уже видели, что последовательность в (в) монотонно убывает. Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{a^*\in A}\int\sum_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a^*, a)-q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma})|\,q(a^*, (x_n)_{n\in\Gamma})P(d(x_n)_{n\in\Gamma})=0.$$

Положим

$$u_{a^*}(a', (x_n)_{n\in\Gamma})=\begin{cases}\delta_{a^*}(\{a'\}), & \text{если}\quad q(a^*, (x_n)_{n\in\Gamma})>0,\\ q(a', (x_n)_{n\in\Gamma}), & \text{если}\quad q(a^*, (x_n)_{n\in\Gamma})=0.\end{cases}$$

Тогда для любого $a^*\in A$ $u_{a^*}(a', (x_n)_{n\in\Gamma})=0$, если $q(a'(x_n)_{n\in\Gamma})=0$ и поэтому u_{a^*} является плотностью закона распределения U^* со свойствами из (г).

Далее

$$\sum_{a\in A}\Big|\sum_{a'\in A}u_{a^*}(a', (x_{n-m})_{n\in\Gamma})\,K_{x_{-m+1}\ldots x_0}(a', a)-q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})\Big|$$

$$=\begin{cases}\sum_{a\in A}|K_{x_{-m+1}\ \ldots\ x_0}(a^*, a)-q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})|, & \text{если } q(a^*, (x_{n-m})_{n\in\Gamma})>0\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

$$\geq\sum_{a\in A}|K_{x_{-m+1}\ldots x_0}(a^*, a)-q(a, (x_n)_{n\in\Gamma})|\,q(a^*, (x_{n-m})_{n\in\Gamma}),$$

так что для каждого $a^* \in A$ из (г) в силу стационарности P получается

$$\lim_{m\to\infty} \int \sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a^*, a) - q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma}) | q(a^*, (x_n)_{n\in\Gamma}) P(d(x_n)_{n\in\Gamma})$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int \sum_{a\in A} | K_{x_{-m+1} \ldots x_0}(a^*, a) - q(a, (x_n)_{n\in\Gamma}) | q(a^*, (x_{n-m})_{n\in\Gamma}) P(d(x_n)_{n\in\Gamma}) = 0$$

Из этого сразу следует искомое утверждение.

III. Неравенство (16) дает оценку

$$\| U * K^m - Q \| \leq \frac{1}{2} \int \sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a', a) - q(a', (x_{n+m})_{n\in\Gamma}) | U(d[a', (x_n)_{n\in\Gamma}]),$$

из которой утверждение следует.

IV. Для $a_1, a_2 \in A$ и $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X^{+\infty}_{-\infty}$ имеет место (см. [3, стр. 148])

$$\sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a_1, a) - K_{x_1 \ldots x_m}(a_2, a) | \leq 2\boldsymbol{K}([a_1, a_2, (x_n)_{x\in\Gamma}], \bigcap_{l=1}^{m} „a_{1,l} \neq a_{2,l}“).$$

Следовательно, так как q стационарная плотность [1, соотношение (7)], для $a' \in A$ и P—п. в. $(x_n)_{n\in\Gamma} \in X^{+\infty}_{-\infty}$

$$\sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a', a) - q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma}) |$$

$$\leq \sum_{a''\in A} q(a'', (x_n)_{n\in\Gamma}) \sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a', a) - K_{x_1 \ldots x_m}(a'', a) |$$

$$\leq 2 \sum_{a''\in A} q(a'', (x_n)_{n\in\Gamma}) \boldsymbol{K}([a', a'', (x_n)_{n\in\Gamma}], \bigcap_{l=1}^{m} „a_{1,l} \neq a_{2,l}“).$$

В силу $Q(\{a\}\times S) \leq Q(A\times S) = P(S)$ для всех $a \in A$ и $S \in \mathfrak{X}^{+\infty}_{-\infty}$ последнее неравенство также имеет место для Q—п. в. $[a', (x_n)_{n\in\Gamma}]$. Поэтому

$$\int \sum_{a\in A} | K_{x_1 \ldots x_m}(a', a) - q(a, (x_{n+m})_{n\in\Gamma}) | Q(d[a', (x_n)_{n\in\Gamma}])$$

$$\leq 2Q^2 * \boldsymbol{K}(\bigcap_{l=1}^{m} „a_{1,l} \neq a_{2,l}“),$$

а утверждение следует из того, что подынтегральное выражение на левой стороне, как уже доказано, монотонно убывает.

V. Так как $Q^2(A\times B\times S) = Q^2(B\times A\times S) = Q(B\times S)$ для всех $B \in \mathfrak{A}$ и $S \in \mathfrak{X}^{+\infty}_{-\infty}$, то утверждение сразу получим из неравенства треугольника.

VI Утверждение очевидно.

VII. Так как $\|K_{x_1 \ldots x_m}(a_1,) - K_{x_1 \ldots x_m}(a_2,)\| < 2$ имеется тогда и только тогда, когда $\sum_{a\in A} K_{x_1 \ldots x_m}(a_1, a) K_{x_1 \ldots x_m}(a_2, a) > 0$, то из (а) следует $Q^2(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l) = 1$, причем

$$E_l = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{[a_1, a_2, (x_n)_{n\in\Gamma}] : \sum_{a\in A} K_{x_1 \ldots x_m}(a_1, a) K_{x_1 \ldots x_m}(a_2, a) \geq 1/l\}.$$

Далее $Q^2 * \boldsymbol{K}$ стационарный. Поэтому для всех $l \geq 1$

$$Q^2(E_l) = Q^2 * \boldsymbol{K}(\text{„}[a_{1,1},\ a_{2,1},\ (\xi_n^{(1)})_{n\in\Gamma}] \in E_l\text{“} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \text{„}a_{1,m},\ a_{2,m},\ (\xi_n^{(m)})_{n\in\Gamma}] \in E_l)\text{“},$$

так что

$$(19) \qquad Q^2 * \boldsymbol{K}(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \text{„}[a_{1,m},\ a_{2,m},\ (\xi_n^{(m)})_{n\in\Gamma}] \in E_l\text{“}) = 1.$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{„}a_{1,m} = a_{2,m}\text{“})$$

$$\geqq \sup_{m\geqq 2} \boldsymbol{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ \text{„}a_{1,m} = a_{2,m}\text{“}) = \sup_{m\geqq 1} \sum_{a\in A} K_{x_1\ldots x_m}(a_1,\ a) K_{x_1\ldots x_m}(a_2,\ a),$$

и мы получим

$$\inf_{[a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}]\in E_l} \boldsymbol{K}([a_1,\ a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma}],\ \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{„}a_{1,m} = a_{2,m}\text{“}) \geqq 1/l > 0.$$

А из этого следует в силу [7, предложение 5.I], что

$$Q^2 * \boldsymbol{K}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \text{„}[a_{1,m},\ a_{2,m},\ (\xi_n^{(m)})_{n\in\Gamma}] \in E_l\text{“}) \leqq Q^2 * \boldsymbol{K}(\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{„}a_{1,m} = a_{2,m}\text{“})$$

для каждого $l \geqq 1$, так что в силу (19) $Q^2 * \boldsymbol{K}(\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{„}a_{1,m} = a_{2,m}\text{“}) = 1$. Последнее утверждение доказано.

Эквивалентность свойств (б) и (е) соответствует высказыванию теоремы 4 в [5] от эквивалентности слабой эргодичности и свойства связывания неоднородных цепей Маркова.

Теорема 6 обобщает теорему 5.2.5. из [4]: Если $P = \bigtimes_{n\in\Gamma} R$, то для каждого стационарного относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения Q имеет место $Q(\text{„}a = a,\ (\xi_n)_{n\geqq 1} \in S\text{“}) = p(\{a\}) P(\text{„}(\xi_n)_{n\geqq 1} \in S\text{“})$, где p — стационарное начальное распределение стохастических матриц $L = \Sigma_{x\in X} R(\{x\}) K_x$ (см. [4, теорема 5.1.2]). Поэтому свойство (е) из теоремы 6, очевидно, равносильно тому, что распределение $p \times p$ является неразложимым стационарным начальным распределением стохастической матрицы $\mathfrak{L}$, определенной в [4].

Эти связи можно расширить.

Если Q_1, Q_2 стационарные относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения, плотности которых обозначим q_1, q_2, то закон распределения $Q_1 \times Q_2$, для которого

$$Q_1 \times Q_2(\{[a_1,\ a_2]\} \times S) = \int_S q_1(a_1,\ (x_n)_{n\in\Gamma})\, q_2(a_2,\ (x_n)_{n\in\Gamma})\, P(d(x_n)_{n\in\Gamma}),$$

$a_1,\ a_2 \in A$, $S \in \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$, является стационарным относительно P и $(\widetilde{K}_x)_{x\in X}$. В частности, $Q^2 = Q \times Q$.

Назовем стационарное относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределение разложимым, если существуют стационарные относительно P и $(K_x)_{x\in X}$ распределения Q_1, $Q_2 \neq Q$, такие, что $Q = sQ_1 + (1-s)Q_2$ для некоторого $0 < s < 1$. Аналогичным образом определяется разложимость $Q \times Q$.

Предложение 2. *Пусть P эргодично. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(а) $Q^2 * K(\bigcup_{n=1}^{\infty} „a_{1,n} = a_{2,n}") = 1$.

(б) $Q \times Q$ *не разложимо.*

(в) $Q^2 * K(([a_{1,n},\ a_{2,n}]_{n \geq 1} \in (\cdot))$ *эргодично.*

Для этих условий неразложимость Q является необходимой, а в общем случае не достаточной.

Доказательство. Пусть $\widetilde{Q}_1$ есть стационарное относительно P и $(\widetilde{K}_x)_{x \in X}$ распределение, то для всех $a_1,\ a_2 \in A$, $S \in \mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ и $m \geq 1$ с помощью стационарности P и свойства $\widetilde{Q}_1(A \times A \times (\cdot)) = P$ является

$$|\widetilde{Q}_1(\{a_1\} \times \{a_2\} \times S) - Q \times Q(\{a_1\} \times \{a_2\} \times S)|$$

$$\leq |\int 1_S((x_{n+m})_{n \in \Gamma}) K_{x_1 \ldots x_m}(a_1',\ a_1) K_{x_1 \ldots x_m}(a_2',\ a_2)\, \widetilde{Q}_1(d[a'_1,\ a_2',\ (x_n)_{n \in \Gamma}])$$

$$-\int 1_S((x_{n+m})_{n \in \Gamma}) q(a_1,\ (x_{n+m})_{n \in \Gamma})\, q(a_2, (x_{n+m})_{n \in \Gamma}) P(d(x_n)_{n \in \Gamma})|$$

$$\leq \int |K_{x_1 \ldots x_m}(a'_1,\ a_1)\, K_{x_1 \ldots x_m}(a'_2,\ a_2) - q(a_1,\ (x_{n+m})_{n \in \Gamma}) q(a_2,\ (x_{n+m})_{n \in \Gamma})|$$

$$\widetilde{Q}_1(d[a_1',\ a_2', (x_n)_{n \in \Gamma}])$$

$$\leq \int \{|K_{x_1 \ldots x_m}(a_1',\ a_1) - q(a_1,\ (x_{n+m})_{n \in \Gamma})|$$

$$+ |K_{x_1 \ldots x_m}(a_2',\ a_2) - q(a_2,\ (x_{n+m})_{n \in \Gamma})|\}\, \widetilde{Q}_1(d[a_1',\ a_2',\ (x_n)_{n \in \Gamma}]).$$

Если теперь $\widetilde{Q}_1 \ll Q \times Q$ и условие (а) выполняется, то в силу теоремы 6 и данной оценки получим $\widetilde{Q}_1 = Q \times Q$. Следовательно, из (а) следует (б).

Если выполняется условие (б), то $(Q \times Q) * K = Q^2 * K$ эргодична. (В противном случае существовало бы разложение $Q \times Q = s\widetilde{Q}_1 + (1-s)\widetilde{Q}_2$, причем $0 < s < 1$, $\widetilde{Q}_1 \neq \widetilde{Q}_2$, а $\widetilde{Q}_1$, $\widetilde{Q}_2$ инвариантны относительно ядра $\widetilde{K}$. Так как P эргодично, то в силу соотношения $Q \times Q(A \times A \times (\cdot)) = P$ также $\widetilde{Q}_1(A \times A \times (\cdot)) = \widetilde{Q}_2(A \times A \times (\cdot)) = IP$. Значит, $\widetilde{Q}_1$ и $\widetilde{Q}_2$ стационарны относительно P и $(\widetilde{K}_x)_{x \in X}$. Но это противоречит условию (б).) Значит, из (б) получается (в).

Так как всегда

$$Q^2 * K(„a_{1,1} = a_{2,1}") = \int \sum_{a \in A} q^2(a,\ (x_n)_{n \in \Gamma}) P(d(x_n)_{n \in \Gamma}) > 0,$$

то из (в) следует (а).

Докажем теперь последнее утверждение.

Если Q разложимо, то, очевидно, $Q \times Q$ также разложимо, так что неразложимость Q необходима для (б). А пример в [4, стр. 123, свойство γ] показывает, что неразложимость Q для (б) не достаточна.

Предложение 2 доказано.

Из данного доказательства получим

Следствие. *Для любого стационарного P свойство* (в) *достаточно, а свойство* (б) *необходимо для свойства* (а).

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

Теорема 7. *Если* $Q(\{a\}\times S)>0$ *для всех* $a\in A$ *и* $S\in\mathfrak{X}_{-\infty}^{+\infty}$ *со свойством* $P(S)>0$, *то высказывания* (а), (б), (в) *из предложения* 1 *эквивалентны высказыванию*

(г) *Для каждого* $a_1, a_2\in A$ *и* P *п. в.* $(x_n)_{n\in\Gamma}\in X_{-\infty}^{+\infty}$ *существует такое* $m\geq 1$, *что* $\Sigma_{a\in A}|K_{x_1\ldots x_m}(a_1, a)-K_{x_1\ldots x_m}(a_2, a)|<2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Навротцки. Слабая эргодичность стационарных случайных последовательностей стохастических матриц. *Сердика*, **5**, 1979, 24—33.
2. R. Faßler. Ergodic theorems for general open systems and their Applications in Queneing theorie. *Elektron. Informationsverarb. und Kybern.* (in print).
3. K. Nawrotzki. Ein Grenzwertsatz für stationäre zufällige Folgen stochastischer Matrizen, *Math. Nachr.*, **80**, 1977, 133—150.
4. K. Nawrotzki. Stationäre Anfangsverteilungen stochastischer Automaten III. *Elektron. Informationsverarb. und Kybern.*, **14**, 1978, 115—134.
5. J. Hajnal. Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **54**, 1958, 239-246.
6. D. A. Griffeath. A maximal coupling for Markov chains. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **31**, 1975, 95-106.
7. S. Orey. Lecture notes on limit theorems for Markov chains transition probablities. Van Nostrand, 1971.

Friedrich-Schiller-Universität, Jena
Sektion Mathematik, DDR 69, Jena

Поступила 13. 11. 1979;
В переработанном виде 7. 4. 1980