Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О СИСТЕМЕ $M_N|G_N|1$ С ЧЕРЕДОВАНИЕМ ПРИОРИТЕТОВ И ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

Изучена система $M_N|G_N|1$ с чередованием приоритетов и групповым обслуживанием с внутривидовыми дисциплинами обслуживания SPT, LPT, PS, FCFS и LCFS. Находится время пребывания требования с приведенным временем обслуживания x в стационарном режиме и его математическое ожидание для каждой внутривидовой дисциплины.

1. Постановка задачи. Хашида [8] предложил три дисциплины переключения с обслуживания одной очереди на другую — циклическая, приоритетная и случайная. Циклическая дисциплина изучена в [2] и [8], а случайная в [7]. Приоритетной дисциплине посвящены ряд работ [3]. В последнее время интенсивно изучаются приоритетные системы с внутривидовыми дисциплинами обслуживания SPT, LPT, PS, FCFS, LCFS. Изучим следующую однолинейную систему обслуживания с чередованием приоритетов и групповым обслуживанием. Пусть в однолинейную систему поступают N видов пуассоновских потоков требований с интенсивностями λ_i, $i=\overline{1,N}$. Длительности обслуживания всех видов требований взаимно независимые (между собой и от поступающих потоков) случайные величины с произвольными функциями распределения $B_i(x)$ и моментами $b_i=\int_0^\infty x dB_i(x)$, $b_i^{(2)}=\int_0^\infty x^2 dB_i(x)$. Прибор имеет неограниченное число мест для ожидания. Дисциплина выбора на обслуживание требований различных видов является приоритетной с чередованием приоритетов. Точнее, это означает следующее: пусть в некоторый момент времени прибор свободен, и первое поступившее требование принадлежит i-ому виду, тогда требования i-ого потока приобретают приоритет для обслуживания. Последнее означает, что прибор будет в состоянии обслуживать требования других потоков после того как будет закончено обслуживание всех требований i-ого потока. В момент окончания обслуживания последного из требований i-ого потока система выбирает на обслуживание требование из класса с наименьшим номером среди имеющихся в этот момент, после чего прибор обслуживает только требования уже выбранного вида до полного исчерпывания их очереди. Затем процедура выбора требования на обслуживание снова повторяется. Требования одного и того же потока обслуживаются группами. Это означает, что если в начальный момент обслуживания требований i-ого потока в системе находится группа из k_i-требований i-ого потока, то требования, пришедшие за время обслуживания этой группы, принимаются на обслуживание в момент, когда закончилось обслуживание данной группы. Вообще в момент окончания обслуживания группы принимаются на обслуживание все накопившиеся к этому

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 177–186.

моменту требования. Кроме того, внутривидовая дисциплина обслуживания требований каждой группы является SPT, LPT, PS, FCFS и LCFS.

2. Вспомогательные результаты. В любой момент времени система характеризуется вектором $(I(t), \nu(t) = (I(t), \nu_1(t), \ldots, \nu_N(t))$, где $I(t)$ — вид обслуживаемого требования в момент t, $\nu_i(t)$ — число требований i-ого потока в момент t. Моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ (τ_i — момент начала или окончания l-ого потока) являются марковскими моментами для процесса $(I(t), \nu(t))$, а $\xi_n = (I(\tau_n), \nu(\tau_n))$ — неприводимая апериодическая вложенная цепь Маркова. $\xi(t) = \{\xi_{n(t)} : \tau_{n(t)} < t < \tau_{n(t)+1}\}$ — вложенный ПМП по марковским моментам τ_n. Время пребывания $\xi(t)$ в состоянии $\alpha_n = (i, (k_1, \ldots, k_N))$, $k_i \geq 1$ распределено по закону $\Pi_i^{(k_i*)}(t)$ с математическим ожиданием $\eta_{\alpha_n} = k\pi_i$, где $\Pi_i(t)$ — функция распределения периода занятости классической системы $M|G|1$ с параметрами λ_i и $B_i(t)$, а $\pi_i = \int_0^\infty t d\Pi_i(t)$. Время пребывания $\xi(t)$ в состоянии $(i, 0, 0, \ldots 0)$ распределено по показательному закону с параметром $\Lambda = \Sigma\lambda_i$. И. И. Призва [6, с. 62] доказал, что для неприводимого положительно возвратного полумарковского процесса $\xi(t)$ имеем

$$(1) \qquad \lim_{t\to\infty} P\{u(t) > x,\ v(t) > z,\ \xi_{n(t)} = \alpha,\ \xi_{n(t)+1} = \beta \mid \xi(0) = \gamma\}$$

$$= \frac{q_\alpha P_{\alpha\beta}}{\sum_\alpha \pi_\alpha \eta_\alpha} \int_{x+z}^{\infty} [1 - S_{\alpha\beta}(u)] du,$$

где $S_{\alpha,\beta}(u) = Q_{\alpha\beta}(u)/Q_{\alpha\beta}(\infty)$, $Q_{\alpha\beta}(u)$ — вероятности перехода марковского процесса восстановления, $P_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}(\infty)$; q_α — стационарное распределение вложенной цепи Маркова; $u(t)$ — время, прошедшее с последнего перехода процесса $\xi(t)$ до момента t; $v(t)$ — время с момента t до следующего перехода процесса $\xi(t)$. Заметим, что ξ_n не зависит от внутривидовой дисциплины обслуживания требований каждого потока. В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим фактом. Выведем производящую функцию стационарного распределения вложенной цепи ξ_n. Для этого предположим, что требования каждого потока обслуживаются в порядке поступления в систему [5]. Через P_{in} $(k_1, \ldots, k_N)$ обозначим вероятность того, что n-ое требование (номерация требований производится в порядке обслуживания) является требованием i-ого потока и покидая прибор (после окончания обслуживания), оставляет в системе очередь $(k_1, \ldots, k_N)$, а q_{in} $(k_1, \ldots, k_N)$ — вероятность того, что обслуживание требований i-ого потока начинается обслуживанием n-ого требования, и в этот момент очередь $(k_i, \ldots, k_N)$, $k_i \geq 1$. Далее

$$Q_{in}(x_i, \ldots, x_N) = \sum_{k_i \geq 1,\ k_j \geq 0,\ j = i+1, N} q_{in}(k_i, \ldots, k_N) x_i^{k_i} \ldots x_N^{k_N}$$

вероятность того, что обслуживание i-ого потока начинается обслуживанием n-ого требования и вся очередь состоит из „красных" требований; $P_{in}(x_1, \ldots, x_N)$ — вероятность того, что n-ое требование является требованием i-ого потока и покидая прибор после окончания обслуживания, оставляет в системе только красные требования. Имеем $\widehat{P}_n(x_1, \ldots, x_N) = \Sigma_{i=1}^N P_{in}$ $(x, x_2, \ldots, x_N$. Вероятность того, что за время обслуживания требования i-ого приоритета в систему поступят только красные требования, обозначим через β_i $(\Lambda$

$-\lambda x)$. Здесь $\beta_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB_i(t)$, $\Lambda=\Sigma_{i=1}^N\lambda_i$, $\lambda x=\Sigma_{i=1}^N\lambda_i x_i$. Имеет место равенство

$$Q_{i,\ n+1}(x_i,\dots,x_N)=\sum_{j=1}^{i-1}[P_{jn}(0^{i-1}x)-P_{jn}(0^i x)]$$

$$+\sum_{j=i+1}^{N}[P_{in}(0^{i-1}x0_jx)-P_{jn}(0^ix0_jx)],$$

где $(0^{i-1}x0_jx)=(0\dots0x_i\dots x_{j-1}0\,x_{j+1}\dots x_N)$, $(0^ix0_jx)=(0\dots0x_{i+1}\dots x_{j-1}\,0x_{j+1}\dots x_N)$. Для доказательства отметим, что для того чтобы обслуживание требований i-ого потока начиналось обслуживанием $(n+1)$-ого требования i-ого типа и все требования в этот момент были красными, необходимо и достаточно, чтобы: либо n-ое требование было красным j-ого потока $(j\neq i)$ и покидая прибор, не оставляло требований i-ого потока и требований приоритета выше чем i (т. е. приоритетов от 1 до $i-1$ включительно), но оставляло хотя бы одно требование i-ого приоритета, и все оставшиеся были только красными. Вероятность этого события равна

$$\sum_{j=1}^{n}[P_{jn}(0^{i-1}x)-P_{jn}(0^ix)]+\sum_{j=i+1}^{N}[P_{jn}(0^{i-1}x0_jx)-P_{jn}(0^ix0_jx)],$$

либо n-ое требование, покидая прибор, оставляет систему свободной, и первое поступившее требование является красным требованием i-ого приоритета. Вероятность этого события равна $\widehat{P}(0^N)\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i$. Устремив n к бесконечности, получим

$$Q_i(x)=\sum_{j=1}^{i-1}[P_j(0^{i-1}x)-P_j(0^ix)]+\sum_{j=i+1}^{N}[P_j[0^ix0_jx)-P_j(0^{i-1}x0_jx)]+\frac{\lambda_i}{\Lambda}\widehat{P}(0^N)x_i.$$

Заметим, что $Q_i(x)=F_i(x_i,\dots,x_N)$ [5], где $F_i(x_i\dots x_N)$ $(i=1,2\dots N)$ решение системы функциональных уравнений

$$\sum_{i=k}^{N}F_i(x_i\dots x_N)=\sum_{i=k}^{N}F_i(\widetilde{z}_i,\ x_{i+1},\dots x_N)+S_k(x_k,\dots,x_N)$$

и

$$\widetilde{z}_i=\pi_i(\Lambda-\lambda_k-u_k-\sum_{j=k}^{N}\lambda_jx_j+\lambda_ix_i);$$

$$S_k(x_k,\dots,x_N)=[u_k(x_k,\dots,x_N)+\sum_{j=k}^{N}\lambda_i x_j-\Lambda]\widehat{P}(0^N)/\Lambda;$$

$$u_{ki}=\beta_i(\Lambda-u_k-\sum_{j=k}^{N}\lambda_jx_j);\ u_k=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i u_{ki};\ \pi_i(s)=\beta_i\ (s+\lambda_i-\lambda_i\pi_i(s)).$$

Кроме того, $q_i\ (0,\dots,0)=p_i\ (0,0\dots0)$. В дальнейшем нам потребуются выражения

$$A_k^{(k)}=\left.\frac{\partial F_k(x_k1\dots1)}{\partial x_k}\right|_{x_k=1},\quad B_k^{(k)}=\left.\frac{\partial^2F_k(x_k1\dots1)}{\partial^2x_k}\right|_{x_k=1},$$

$$C_{kl}^{(i)} = \left.\frac{\partial^2 F_k(x_k 1 \dots 1 x_l 1 \dots 1)}{\partial x_k \, \partial x_l}\right|_{x_k = x_l = 1.}$$

Величины $A_k^{(k)}$, $B_k^{(k)}$, $C_{kl}^{(k)}$ можно найти, решив следующие системы уравнений:

$$A_k^{(k)} = \sum_{i=k}^{N} A_i^{(i)} \frac{b_i \lambda_k}{(1-\varrho_i)(1-R_{k-1})} + \frac{\lambda_k (1-R_N)}{\Lambda(1-R_{N-1})};$$

$$B_k^{(k)} = \sum_{i=k}^{N} B_i^{(i)} \left[\frac{b_i \lambda_k}{1-\varrho_i}\left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{ik}\right)\right]^2$$

$$+ \sum_{i=k}^{N} A_i^{(i)} \left[\frac{b_i^{(2)}}{(1-\varrho_i)^3} \cdot \frac{\lambda_k^2}{(1-R_{k-1})^2} + \frac{b_i}{1-\varrho_i}\right] + \frac{(1-\varrho)\lambda_k^2 \Sigma_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i^{(2)}}{\Lambda(1-R_{k-1})^3};$$

$$C_{kl}^{(k)} = \sum_{i=k}^{N} B_i^{(i)} \lambda_k \lambda_l \left[\frac{b_i}{1-\varrho_i}\right]^2 \left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{ik}\right) \cdot \left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{il}\right)$$

$$+ \sum_{i=k}^{N} C_{il}^{(i)} \frac{\lambda_k b_i}{1-\varrho_i}\left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{ik}\right)$$

$$(2) \qquad + \sum_{i=k}^{N} A_i^{(i)} \left\{\frac{b_i^{(2)} \lambda_k \lambda_l}{(1-\varrho_i)^3}\left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{ik}\right)\left(\frac{R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + 1 - \delta_{il}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b_i \lambda_l \lambda_k}{1-\varrho_i} \frac{\Sigma_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i^{(2)}}{(1-R_{k-1})^3}\right\} + \frac{\lambda_l \lambda_k R_{k-1}}{\Lambda(1-R_{k-1})^3}(1-R_N),$$

где $\varrho_k = \lambda_k b_k$, $R_k = \Sigma_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$, $k = \overline{1, N}$, $k < l \leq N$, $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$

При этом условие эргодичности цепи ξ_n имеет вид $R_N = \Sigma_{j=1}^{N} \lambda_j b_j = \Sigma_{j=1}^{N} \varrho_j < 1$. Обозначим через $\zeta((i, j), (k_1 \dots k_N))$ период занятости типа $((i, j), (k_i \dots k_N))$ для системы $M_N|G_N|1$ с относительным приоритетом, начавшийся обслуживанием требования i-ого потока до момента окончания обслуживания всех требований j-ого приоритета и выше, если в начальный момент было k_l требований l-ого потока $l = \overline{i, N}$. Так как дисциплины обслуживания PS, SPT, LPT, FCFS и LCFS консервативны, то период занятости $\tilde{\zeta}((i, j), (k_1 \dots k_N))$ типа $((i, j)\,(k_i \dots k_N))$ для системы $M_N|G_N|1$ с чередованием приоритетов не зависит от внутривидовой дисциплины обслуживания. Нетрудно доказать, что

$$\mathrm{E}\exp[-s\tilde{\zeta}((i, j), (k_i \dots k_N))] = \mathrm{E}\exp[-s\zeta((i, j), (k_i \dots k_N)) = \prod_{r=i}^{j} \pi_{rj}^{k_r}(s), \ i < j,$$

где $\pi_{rj}(s)$ — преобразование Лапласа — Стильтеса ф. р. $\Pi_{rj}(t)$ периода занятости, начавшийся обслуживанием требования r-ого потока до освобождения системы $M_N|G_N|1$ с относительным приоритетом от требований j-ого приоритета и выше, а $\pi_{rj}(s)$ — его математическое ожидание [3].

3. Время пребывания требования в системе с приведенным временем обслуживания x. Введем сначала необходимые в дальнейшем обозначения. Пусть $W_j(x, t)$ — функция распределения виртуального времени ожидания в стационарном режиме требования j-ого потока $j=\overline{1, N}$ с приведенным временем обслуживания x и m-ой внутривидовой дисциплины обслуживания, а $V_j^{(m)}(x, t)$ — функция распределения времени пребывания в стационарном режиме требования j-ого потока $j=\overline{1, N}$ с приведенным временем обслуживания x

$$\omega_j^{(m)}(x, s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dW_j^{(m)}(x, t),\quad V_j^{(m)}(x, s)=\int_0^\infty e^{-st}dW_j^{(m)}(x, t).$$

Внутривидовые дисциплины обслуживания SPT, LPT, PS, FCFS и LCFS номерируем в порядке следования. Через $\eta_{j,k}^{(i)}(x)$ обозначим время ожидания начала обслуживания требования j-ого потока с приведенным временем обслуживания x при i-ой внутривидовой дисциплине обслуживания $i=1, 2$ с условием, что в начальный момент обслуживания принимаются k требований j-ого потока; далее $\eta_{j,k}^{(3)}$ — время пребывания (время обслуживания) требования j-ого потока с приведенным временем обслуживания x III внутривидовой дисциплины обслуживания при условии, что в начальный момент кроме рассматриваемого требования на обслуживание принимаются еще k требования j-ого потока. В [1; 4] доказано, что

$$\mathsf{E}\exp[-s\eta_{jk}^{(1)}(x)]=\varphi_1^k(s, x);\ \varphi_1(s, x)=[1-B(x)[1-\beta_{j,x}(s)]]^k,$$

$$\mathsf{E}\exp[-s\eta_{jk}^{(2)}(x)]=\varphi_2^k(s, x);\ \varphi_2(s, x)=1-[1-B_j(x)]\,[1-\widetilde{\beta}_{jx}(s)];$$

$$\mathsf{E}\exp[-s\eta_{jk}^{(3)}(x)]=e^{-sx}\varphi_3(s, x);\ \varphi_3(s, x)=[1-B_j(x)]e^{-sx}+\int_0^x e^{-su}\,dB_j(u),$$

$$-\left.\frac{\partial\varphi_1(s,x)}{\partial s}\right|_{s=0}=\int_0^x y\,dB_j(y)=a_1(x),\quad -\left.\frac{\partial\varphi_2(s, x)}{\partial s}\right|_{s=0}=\int_x^\infty y\,dB_j(y)=a_2(x),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_3(s, x)}{\partial s}\right|_{s=0}=x[1-B_j(x)]+\int_0^\infty u\,dB_j(u)=a_3(x).$$

Определим рекуррентным способом

$$h_0(\xi, z)=z, \dots, h_{n+1}(\xi, z)=\beta_j[\xi+\lambda_j-\lambda_j h_n(\xi, z)].$$

Тогда дифференцированием можно доказать, что

$$h'_n(0, 1)=\left.\frac{\partial h_n(0, z)}{\partial z}\right|_{z=1},\quad h''_n(0, 1)=\left.\frac{\partial^2 h_n(0, z)}{\partial^2 z}\right|_{z=1},$$

$$h'_{n+1}(0, 1)=\lambda_j b_j h'_n(0, 1)=(\lambda_j b_j)^{n+1},\ n\geqq 0,\ h'_0(0, 1)=1,\ h''_0(0, 1)=0,$$

$$h''_{n+1}(0, 1)=b_{j,2}\lambda_j^2\{[(\lambda_j b_j)^n-(\lambda_j b_j)^{2n+1}]/(1-\lambda_j b_j)\},\quad n\geq 0.$$

Через ${}_0Q_{k_j,r}^{(n)}(x)$ обозначим вероятность того, что за время не более чем x будут обслужены n групп требований j-ого потока при условии, что в начальный момент принимаются на обслуживание k_j требований, и за это время очередь требований j-ого потока всегда ненулевая. Далее обозначим ${}_0Q_{k_j r}(x)=\delta_{k_j r}(U(x)$, где $U(x)$ — функция распределения вырожденной случайной величины.

В [9] доказывается, что ${}_0q^{(n)}_{k_j r}(\xi)\int_0^\infty e^{-\xi u}d_0Q^{(n)}_{k_j r}(u)$ и ${}_0q^{(n)}_{k_j}(\xi,\ z)=\sum_{r=0}^\infty {}_0q^{(n}_{k_j r}(\xi)z^r$ для $k_j>1$ можно представить как ${}_0q^{(n)}_{k_j}(\xi,\ z)=h^{k_j}_n(\xi,\ z)-h^{k_j}_{n-1}(\xi,0), n\geqq 1$. Время ожидания требования j-ого типа с приведенным временем обслуживания x в стационарном режиме и m-ой дисциплиной обслуживания $m=1,\ 2$ зависит от вида i обслуживаемых требований в момент поступления j-ого требования, от времени обслуживания остальных требований i-ого потока до полного исчерпывания i-ой очереди, от времени обслуживания требований приоритета $j-1$ и выше и от числа требований j-ого потока в начальный момент его обслуживания.

С помощью вероятностной интерпретации преобразования Лапласа и результата Призвы [6] можно доказать, что

$$\omega^{(n)}_j(x,\ s)$$

$$=\sum_{i<j}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_i(\alpha)P_{\alpha\beta}}{A}\int_0^\infty e^{-su}[1-\frac{Q_{\alpha\beta}(u)}{Q_{\alpha\beta}(\infty)}]du\prod_{r=i+1}^{j-1}\pi^{k_r}_{r,j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))$$

$$\times\varphi^{k_j}_m(s,\ x)\prod_{k=1}^{j-1}\pi^{\varrho_k}_{k,j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))\varphi^{\varrho_j}_m(s,\ x)+\sum_j\frac{q_j(\gamma)}{A}\int_0^\infty[1-\Pi^{(k_j*)}_j(t)]$$

$\times P\{$за время ожидания не наступит катастрофа при условии, что время пребывания $\xi(t)$ в состоянии $(j,\ (k_j,\ldots,\ k_N))$ больше $t\}\ dt$

$$+\sum_{i>j}\sum_{\alpha\beta}\frac{q_i(\alpha)_{\alpha\beta}}{A}\int_0^\infty e^{-su}[1-\frac{Q_{\alpha\beta}(u)}{Q_{\alpha\beta}(\infty)}]du$$

$$\times\prod_{r=1}^{j-1}\pi^{\varrho_r}_{rj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))\varphi^{\varrho_j}_m(s,\ x)+(1-\varrho)$$

$$=I_1+I_2+I_3+1-\varrho.$$

Здесь $m=1,\ 2,\ \alpha=(i,\ (k_i\ldots k_N))\ k_i\geqq 1;\ \beta=(r,\ (\varrho_r,\ \ldots,\ \varrho_N)),\ \varrho_k\geqq 0,\ k=\overline{r,\ N};$

$$r=\overline{1,\ N};\ \gamma=(j,\ (k_j,\ \ldots,\ k_N)),\ k_j\geqq 1,\ \ A=\sum_{j=1}^N A^{(j)}_j\pi_j+(1-\varrho)/\Lambda.$$

Действительно, для того чтобы за время ожидания j-ого требования в стационарном режиме с приведенным временем обслуживания x и m-ой ($m=1,\ 2$) внутривидовой дисциплиной обслуживания не наступила катастрофа, необходимо и достаточно, чтобы:

— либо в момент поступления рассматриваемого требования обслуживаются требования i-ого потока $(i<j)$, за оставшееся время обслуживания требований i-ого типа катастрофа не наступит с вероятностью $\sum_{\alpha,\beta}[q_i(\alpha)P_{\alpha\beta}/A]\int_0^\infty e^{-su}[1-Q_{\alpha\beta}(u)/Q_{\alpha\beta}(\infty)]du$, за время ожидания до момента начала обслуживания j-ого потока не наступит „катастрофа“ и не поступят „плохие“ требования с вероятностью

$$\sum_{\varrho_k\geqq 0,\ k=\overline{1,\ j}}\pi^{k_r}_{rj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))\varphi^{k_j}_m(sx)\prod_{k=1}^{j-1}\pi^{\varrho_k}_{kj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))\varphi^{\varrho_j}_m;$$

— либо в момент поступления в систему рассматриваемого требования обслуживаются требования j-ого потока и за время ожидания не наступит „катастрофа";

— либо в момент поступления в систему рассматриваемого требования обслуживаются требования i-ого потока $i>j$, за оставшееся время их обслуживания не наступит „катастрофа" с вероятностью $\Sigma_{\alpha,\beta}[q_i(\alpha)P_{\alpha\beta}/A]\int_0^\infty e^{-su}[1-Q_{\alpha\beta}(u)/Q_{\alpha\beta}(\infty)]du$ и за время ожидания до момента начала обслуживания требования j-ого потока не наступит „катастрофа" и не поступят „плохие" требования с вероятностью

$$\sum_{\varrho_r\geq 0,\ r=\overline{1,j-1}}\prod_{r=1}^{j-1}\pi_{r,j-1}^{\varrho_r}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))\varphi_m^{\varrho_j};$$

— либо в момент поступления требования прибор свободен с вероятностью $1-\varrho$ и требование принимается сразу на обслуживание. Так как

$$\sum_\beta P_{\alpha\beta}\prod_{k=1}^{j-1}\pi_{kj-1}^{\varrho_k}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,x)))\varphi_m^{\varrho_j}(s,\ x)$$

$$=\pi_i^{k_i}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{kj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))\Big),$$

то

$$I_1=\sum_{i<j}\frac{1}{sA}\,Q_i(u,\ \pi_{i+1,\ j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))),\ \ldots,\ \varphi_m(s,\ x),\ 1\ \ldots\ 1)\Big|_{u=u_2}^{u=u_1},$$

где

$$u_1=\pi_i\Big(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{kj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))))+\lambda_i(1-\varphi_m(s,\ x))\Big),$$

$$u_2=\pi_i\Big(s+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{kj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))\Big)$$

и

$$I_2=\sum_{i>j}\frac{1}{sA}\,Q_i\Big(\pi_i\Big(u+\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{kj-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))))+\lambda_j(1-\varphi_m)\Big),\ 1\ldots 1\Big)\Big|_{u=s}^{u=0}.$$

С помощью вероятностного толкования преобразования Лапласа можно получить подынтегральное выражение $\widetilde{\omega}_{k_j}(t,\ x,\ s)$ для I_2:

$$\widetilde{\omega}_{k_j}(t,\ x,\ s)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{r=1}^\infty\sum_{\nu=0}^\infty\int\limits_{0\,(u)}^{t}\int\limits_{t\,(v)}^{\infty}\frac{[\lambda_j(v-u)]^\nu}{\nu\,!}\exp[-\lambda_j(v$$

$$-u)]\varphi_m^\nu(s,\ x)e^{-s(v-t)}d_0Q_{k_j,r}^{(n)}(u)d_vB_j^{r*}(v-u).$$

Действительно, пусть обслуживание требований j-ого потока началось обслуживанием группы из k_j требований, до момента t очередь требований j-ого потока не прерывалась и обслужены n групп требований в интервале $(u,\ u+du)$ $(u<t)$, причем в конце обслуживания n-ой группы накопилась очередь из r требований j-ого потока. Предположим, что обслуживание этой группы закончится в интервале $(v,\ v+dv)$ $(v>t)$ с вероятностью $d_vB_j^{(r*)}(v-u)$

и за время $v-u$ в систему поступят ν „хороших" требований j-ого потока. Просуммировав по n, r, ν, получим $\tilde{\omega}_{kj}(t,\ x,\ s)$. Поскольку

$$\int_0^\infty \tilde{\omega}_{kj}(t,\ x,\ s)dt=\lim_{z\to 0}\int_0^\infty e^{-zt}\tilde{\omega}_{kj}\ (t,\ x,\ s)dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,\tilde{\omega}_{kj}(t,\ x,\ s)=\frac{1}{z-s}\sum_{n=0}^\infty [\,{}_0q_{k_j}^{(n)}(z,\ \beta_j[s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))])$$

$$-{}_0q_{k_j}^{(n)}(z,\ \beta_j[z+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))])],$$

то

$$\int_0^\infty \tilde{\omega}_{kj}(t,\ x,\ s)dt=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty {}_0q_{k_j}^{(n)}\ (0,\ \beta_j[u+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))])\Big|_{u=s}^{u=0}\ .$$

В таком случае

$$I_2=\frac{1}{sA}\sum_{n=0}^\infty Q_j(h_n,\ \beta_j[u+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x))]),\ 1\ .\ .\ .\ 1)\Big|_{u=s}^{u=0}.$$

Теперь легко получить выражения для $v_j^{(m)}(x,\ s)=e^{-sx}\omega_j^{(m)}(x,\ s)$ при $m=1,2$. Заметим, что аналогичным способом можно получить то же выражение для $V_j^{(m)}(x,\ s)$ и при $m=3$. Итак, при $m=1,\ 2,\ 3$

$$V_j^{(m)}(x,\ s)=e^{-sx}\{\frac{1}{sA}\sum_{i<j}Q_i(\pi_i(u+\sum_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{k,\ j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m(s,\ x)))+\lambda_j(1-\varphi_m)),$$

$$\pi_{i+1,\ j-1}(s+\lambda_j(1+\varphi_m)),\ .\ .\ .\ ,\ \pi_{j-1,\ j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m)),\ \varphi_m(s,\ x),\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ 1\Big|_{u=s}^{u=0}$$

$$+\frac{1}{sA}\sum_{n=0}^\infty Q_j(h_n(0,\ \beta_j[u+\lambda_j(1-\varphi_m)]),\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ 1)\Big|_{u=s}^{u=0}$$

$$+\frac{1}{sA}\sum_{i>j}Q_i(\pi_i(u+\sum_{k=1}^{j-1}\ \lambda_k(1-\pi_{k,\ j-1}(s+\lambda_j(1-\varphi_m)))$$

$$+\lambda_j(1-\varphi_m)),\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ 1)\Big|_{u=s}^{u=0}+1-\varrho\}.$$

С помощью вероятностного толкования преобразования Лапласа можно доказать, что для внутривидовой дисциплины FCFS

$$V_j^{(4)}(x,\ s)=\frac{e^{-sx}}{A(s-\lambda_j(1-\beta_j(s)))}\{\sum_{i<j}Q_i(\pi_i(u+\sum_{r=1,\ r\neq i}^{j-1}\lambda_r(1-\pi_{r,\ j-1}(s))),\ \pi_{i+1,\ j-1}(s),$$

$$.\ .\ .\ ,\ \pi_{j-1,\ -1}(s),\ \beta_j(s),\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ 1)\Big|_{u=s}^{u=\lambda_j(1-\beta_j(s))}+\sum_{n=0}^\infty Q_j(h_n(0,\ \beta_j(u)),$$

$$1,\ldots,1)\Big|_{u=s}^{u=\lambda_j(1-\beta_j(s))}+\sum_{i>j}Q_i(\pi_i(u+\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r(1-\pi_{r,\ j-1}(s))),\ 1,\ .\ .\ .\ 1)\Big|_{u=s}^{u=\lambda_j(1-\beta_j(s))}\ \}$$

$$v+e^{-sx}\ (1-\varrho),$$

а для

$$V_j^{(5)}(x,\ s)=e^{-sx}\{\frac{1}{Au}\sum_{i<j}Q_i(\pi_i(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{j-1}\lambda_k(1-\pi_{k\,j-1}(u))+v),$$

$$\pi_{i+1,\ j-1}(u),\ \ldots,\ \pi_{j-1,\ j-1}(u),\ 1\ \ldots\ 1)\Big|_{v=u}^{v=0}+\frac{1}{Au}\sum_{n=0}^{\infty}Q_j(h_n(0,\ \beta_j(v)),\ 1,\ \ldots,\ 1)\Big|_{v=u}^{v=0}$$

$$+\frac{1}{Au}\sum_{i>j}Q_i(\pi_i(\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r(1-\pi_{rj-1}(u))+v),\ 1\ \ldots\ 1)\Big|_{v=u}^{v=0}+1-\varrho\},$$

где $u=s+\lambda_j(1-\beta_j(s))$.

Теперь легко получить математическое ожидание времени пребывания требования с приведенным временем x в системе при каждой внутривидовой дисциплины. Для $m=1,\ 2,\ 3$

$$\mathsf{E}\tau_j^{(m)}(x)=\frac{1}{2A}\{\sum_{i\neq j}M_i[1+2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j-1}\lambda_k\pi_{k,\ j-1}(1+\lambda_j a_m(x))+2\lambda_j a_m(x)]$$

$$+2\sum_{i<j}\sum_{l=i+1}^{j-1}C_{il}^{(i)}\pi_i\pi_{l,\ j-1}(1+\lambda_j a_m(x))+2C_{ij}^{(i)}\pi_i(a_m(x)$$

$$+B_j^{(j)}\frac{b_j^2}{1-\varrho_j}(1+2\lambda_i a_m(x))+A_j^{(j)}\frac{b_j^{(2)}(1+2)\lambda_j a_m(x)}{(1-\varrho_j)^2(1+\varrho_j)}\}+x,$$

$$\mathsf{E}\tau_j^{(4)}(x)=\frac{1}{2A}\sum_{i\neq j}M_i(1+\varrho_j+2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j-1}\lambda_k\pi_{k,\ j-1})$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{i<j}[\sum_{l=i+1}^{j-1}C_{il}^{(i)}\pi_i\pi_{l,\ j-1}+C_{ij}^{(i)}\pi_i b_j]$$

$$+\frac{1}{2A(1-\varrho_j)^2}[B_j^{(j)}b_j^2(1-\varrho_j)+A_j^{(j)}b_j^{(2)}]+x,$$

$$\mathsf{E}\tau_j^{(5)}(x)=\frac{1}{2A}\sum_{i\neq j}M_i(1+\varrho_j)(1+2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j-1}\lambda_k\pi_{k\,j-1})$$

$$+\frac{1}{2A}\sum_{i<j}\sum_{l=i+1}^{j-1}C_{il}^{(i)}\pi_i\pi_{l,\ j-1}(1+\varrho_j)+\frac{1}{2A}\frac{A_j^{(j)}b_j^{(2)}}{(1-\varrho_j)}+\frac{1}{2A}B_j^{(j)}\frac{b_j^2}{1-\varrho_j}+x,$$

где $M_i=B_i^{(i)}\pi_i^2+A_i^{(i)}\pi_i^{(2)}$. Сравнив полученные значения для математического ожидания времени пребывания требования с приведенным временем обслуживания x, получаем $\mathsf{E}\tau_j^{(1)}(x)+\mathsf{E}\tau_j^{(2)}(x)=\mathsf{E}\tau_j^{(4)}(x)+\mathsf{E}\tau_j^{(5)}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ц. Димитров. Едно обобщение на системата $M|G|1$ с групово обслужване. *Системи и управление*, 7, 1979, 42—47.
2. В. П. Виницкий, Г. Л. Бродецкий. О чередовании приоритетов и „прогулок" в системе обслуживания с одним прибором. *Кибернетика*, 1973, № 2, 114—119.

3. Б. В. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания. М., 1973.
4. М. Ц. Димитров. Однолинейная система массового обслуживания с групповым обслуживанием в режиме разделения времени. *Сердика*, 4, 1978, 289—295.
5. И. М. Духовный. Однолинейная система обслуживания с чередованием приоритетов. *Проблемы передачи информации*, 5, 1969, № 2, 61—71.
6. В. С. Королюк, С. М. Броди, А. Ф. Турбин. Полумарковские процессы и их применение. *Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теорет. кибернетика*, 11, 1974.
7. А. Л. Толмачёв. Анализ системы обслуживания нескольких очередей с переключением. *Теория массового обслуживания* (Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания в Пущино на Оке, 1974). Т. 2. М., 1976, 60—65.
8. O. Hashida. Analysis of Multiques. *Rev. Electr. Commun. Labor.*, 20, 1972, No. 4, 189—199.
9. S. Sreekantan Nair, M. Neuts. A priority rule based on the ranking of the service times for the $M|G|1$ quene. *Oper. Res.*, 17, 1979, 466—477.

Высший экономический институт
Кафедра математики София

Поступила 1. 6. 1979