Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ИЗОМОРФИЗМЫ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБР ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ

АНДРЕАНА С. МАДГЕРОВА

Дана классификация однородных алгебр R функций типа C на двумерном торе T между алгебрами D_T^0 и D_T^1 с точностью до глобального изоморфизма между ними, где D_T^0 — алгебра всех непрерывных функций на торе T, а D_T^1 — алгебра всех функций с непрерывными первыми частными производными на T. Тор T рассматривается как фактор-многообразие R^2/Z^2 плоскости R^2 по целочисленной решетке Z^2.

Задача глобальной классификации алгебр R параллельна проблеме модулей римановых поверхностей рода 1. Имеется естественное соответствие между классами изоморфных алгебр R эллиптического типа и точками пространства модулей эллиптических кривых.

Эта работа дает классификацию с точностью до глобального изоморфизма однородных алгебр функций типа C на двумерном торе T между алгеброй D_T^0 всех непрерывных функций на T и алгеброй D_T^1 всех функций с непрерывными первыми частными производными на T. Тор T рассматриваем как фактор-многообразие R^2/Z^2 плоскости R^2 по целочисленной решетке Z^2.

Классификация этих алгебр с точностью до локального изоморфизма между ними дана Г. Е. Шиловым в [1], а в 1957 г. в [2] им же поставлена задача об их классификации с точностью до глобального изоморфизма. Из работы [3] Г. Е. Шилова следует, что локальный изоморфизм не влечет глобальный изоморфизм. Как указал В. П. Паламодов, задача об описании с точностью до глобального изоморфизма однородных алгебр функций типа C на T между D_T^0 и D_T^1 имеет тесную связь с теорией деформации комплексных пространств.

Приводимые здесь теоремы устанавливают параллель между глобальной классификацией однородных алгебр функций типа C на T между алгебрами D_T^0 и D_T^1 и проблемой модулей римановых поверхностей рода 1.

Напомним основные определения:

Определение. *Банахова алгебра R функций на компактной коммутативной группе G называется однородной алгеброй функций типа C на G, если*

1. *R есть алгебра без радикала.*
2. *Норма в R элемента $f\in R$, $\|f\|$, эквивалентна $\sup_{s\in G}|f|_s$, где $|f|_s = \inf\{\|g\|,\ g=f$ в некоторой окрестности s, $g\in R\}$.*
3. *Если $f(x)\in R$, то и $f(x+h)\in R$, $\forall h\in G$.*

Непрерывность оператора сдвига $f(x)\to f(x+h)$ вытекает из других предположений определения.)

Пусть D_T^∞ есть алгебра всех бесконечно дифференцируемых функций на торе T и пусть $A=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ (ξ и η — комплексные константы) — ли

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 195—206.

нейный дифференциальный оператор. Алгебру, получаемую при пополнении алгебры D_T^∞ по норме p

$$pf = \sup_{(x,\,y)\in T} |f(x,\, y)| + \sup_{(x,\,y)\in T} |Af(x,\, y)|,$$

обозначим через $D[A]$.

В работе [1] Г. Е. Шиловым доказано, что:

1. $D[A]$ есть однородная алгебра функций типа C на торе T.
2. $D_T^1 \subset D[A] \subset D_T^0$.
3. Все однородные алгебры функций типа C на торе T строго между D_T^0 и D_T^1 исчерпываются алгебрами вида $D[A]$.

Определение. *Алгебру $D[A]$ будем называть эллиптической, если опрератор A — эллиптический, и гиперболической, если оператор A — гиперболический.*

Верны следующие теоремы:

Теорема 1. *Алгебра гиперболического типа не может быть изоморфной (даже локально) алгебре эллиптического типа.*

Пусть $A = \xi \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial}{\partial y}$ и $B = \zeta \dfrac{\partial}{\partial u} + \theta \dfrac{\partial}{\partial v}$, где ξ, η, ζ и θ — константы.

Теорема 2. *Изоморфизм алгебр эллиптического типа $D[A] \cong D[B]$ возможен тогда и только тогда, когда*

$$[(\xi/\eta)k + l]/[(\xi/\eta)m + n] = \zeta/\theta$$

для некоторых целых k, l, m и n с $kn - lm = \pm 1$, и изоморфизм осуществляется отображением $\Phi = (P,\, Q): R^2 \to R^2$ при $P = kx + ly + a_0$ и $Q = mx + ny + b_0$, a_0 и b_0 — реальные константы.

Теоремы 3. *Изоморфизм двух алгебр гиперболического типа $D[A]$ и $D[B]$ возможен тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа k, l, m и n, для которых $kn - lm = \pm 1$ и*

$$[(\xi/\eta)k + l]/[(\xi/\eta)m + n]) = \zeta/\theta,$$

где ξ/η и ζ/θ рассматриваются в этом случае как точки CP_1.

Теорема 2 устанавливает, что имеется естественное соответствие между классами изоморфных алгебр эллиптического типа и пространством модулей эллиптических кривых.

Следствие 1. *Алгебры $D[A]$ и $D[B]$ изоморфны только в перечисленных случаях:*

1.1. *При $\xi \neq 0$, $\zeta \neq 0$ можем считать $\xi = \zeta = 1$. Тогда необходимым и достаточным условием для существования изоморфизма между алгебрами $D[A]$ и $D[B]$ является:*

хоть одно из чисел $\theta \pm \eta$ целое

или

θ равно одному из чисел $n/l + \varepsilon/(k + \eta l)l$, $\varepsilon = \pm 1$, при k, l, n и $(kn + \varepsilon)/l$ — целые.

1.2. *При $\xi \neq 0$ и $\zeta = 0$ можем считать $\xi = \theta = 1$. Тогда для изоморфизма алгебр $D[A]$ и $D[B]$ необходимо и достаточно, чтобы η было рациональным.*

1.3. *При $\xi = 0$ и $\zeta \neq 0$ можем считать $\eta = \zeta = 1$. Тогда для изоморфизма алгебр $D[A]$ и $D[B]$ необходимо и достаточно, чтобы θ было рациональным.*

1.4. *При* $\xi=\zeta=0$ *имеем* $D[A]=D[B]$.

Замечание. Необходимость в случаях 1.2 и 1.3 доказана другим способом Г. Е. Шиловым в [3].

Следствие 2. *В алгебре* $D[A]$, *если* $A=\partial/\partial x+\eta\partial/\partial y$, *нетривиальные автоморфизмы эвентуально существуют только при* $\eta=a+ib$, *числа* a *и* b^2 — *рациональные. Нетривиальные автоморфизмы при этом осуществляются только в случаях:*

2.1. *Если алгебра* $D[A]$ *гиперболическая, то нетривиальные автоморфизмы существуют тогда и только тогда, когда* ξ/η *есть рациональный элемент* CP_1.

2.2. *Если алгебра* $D[A]$ *эллиптическая, то нетривиальные автоморфизмы осуществляются только в случаях*: 1. $\xi=1$, $\eta=a+ib$ *при* $a=s/r$, $b=1/r$, *где* r, s *и* $(s^2+1)/r$ — *целые. Тогда* $P=\varepsilon(-sx+ry)$, $Q=\varepsilon[-(s^2+1)x/r+sy]$, *где* $\varepsilon=\pm1$.

2. $\xi=1$, $\eta=a+ib$ *при* $a=(2\delta+1)/2\lambda$, $b=\sqrt{3}/2\lambda$, *где* λ, δ *и* $(\delta^2+\delta+1)/\lambda$ — *целые. Тогда* $P=\varepsilon[(\delta+1/2+\gamma/2)x-\lambda y]$, $Q=\varepsilon[(\delta^2+\delta+1)x/\lambda+(-\delta-1/2+\gamma/2)y]$, *где* $\varepsilon=\pm1$, $\gamma=\pm1$.

Так как имеется естественное соответствие между классами изоморфных алгебр эллиптического типа и точками пространства модулей эллиптических кривых, а, например, в [4], установлено точно в каких классах изоморфных эллиптических кривых существуют нетривиальные автоморфизмы соответствующих эллиптических кривых, то используя следствия 1 и 2, можно получить:

а) число $(s^2+1)/r$ целое (s, r-целые, $r\neq0$, $\neq\pm1$) тогда и только тогда, когда $r=\varepsilon(k^2+l^2)$, $s=(nr+k)/l$, $\varepsilon=\pm1$ для некоторых целых k, l, n и $m=(kn+\varepsilon)/l$, $l\neq0$. Тогда $(s^2+1)/r=\varepsilon(n^2+m^2)$;

б) число $(\delta^2+\delta+1)/\lambda$ — цело при δ, λ — целые, $\lambda\neq0$, ±1 тогда и только тогда, когда $\lambda=\varepsilon(k^2+kl+l^2)$, $\delta=(\lambda n+k)/l$, $\varepsilon=\pm1$ для некоторых целых k, l, n и $m=(kn+\varepsilon)/l$. Тогда $(\delta^2+\delta+1)/\lambda=\varepsilon[m^2+mn+n^2]$.

Отметим, что в однородных алгебрах R функции типа C на компактной коммутативной группе C оператор сдвига $f(x)\to f(x+h)$ непрерывен, так как, с одной стороны, в R выполнено $\|f\|\geq|f(s)|$, $\forall s\in G$, а, с другой стороны, Г. Е. Шиловым доказано в [3], что если из сходимости последовательности (f_n), $f_n\in R$, по норме в R, следует сходимость числовой последовательности $(f_n(s))$, $\forall s\in G$, то оператор сдвига непрерывен.

В доказательствах теорем 1—3 будем использовать следующие леммы и теоремы:

Лемма 1. *Изоморфизм двух алгебр* $D[A]$ *и* $D[B]$ *порождает и порождается однозначно определенным отображением* $\varphi: T\to T$.

Доказательство. В D_T^1 все максимальные идеалы определены однозначно точками T. Это вытекает из леммы 5, §2, [5]. Алгебра D_T^1 содержится и плотна в каждой алгебре вида $D[A]$, поэтому после применения леммы 6, § 2, [5] получаем, что максимальные идеалы алгебры $D[A]$ однозначно определяются точками T. Изоморфизм двух алгебр $D[A]$ и $D[B]$ порождает и порождается изоморфизмом максимальных идеалов этих алгебр. Отсюда изоморфизм $D[A]$ и $D[B]$ порождает и порождается однозначно определенным отображением $\varphi: T\to T$.

Рассматриваемый изоморфизм осуществляется отображением $\widetilde{\varphi}: D[B]\to D[A]$, где $\widetilde{\varphi}(g)=g\circ\varphi$. Ясно, что отображение φ обратимо и что $[\widetilde{\varphi}]^{-1}=[\widetilde{\varphi^{-1}}]$.

Напоминаем, что по определению функция f на торе T принадлежит локально к совокупности Γ функций, определенных на торе T, если для каждой точки из T существует окрестность U этой точки и существует функция $g \in \Gamma$, такие, что $f|U=g|U$.

Лемма 2. *φ и $\bar{\varphi}$ принадлежат локально к алгебре $D[A]$.*

Замечание. Для простоты изложения иногда будем отождествлять отображение $\varphi=(p, q): R^2/Z^2 \to R^2/Z^2$ с функцией $\varphi=p+iq$.

Доказательство. Функции Z и $\bar{Z}$ принадлежат локально к $D[B]$. Но тогда $\tilde{\varphi}(Z)=Z\circ\varphi=\varphi$ и $\tilde{\varphi}(\bar{Z})=\bar{Z}\circ\varphi=\bar{\varphi}$ принадлежат локально к $D[A]$.

Замечание. Так как непрерывность есть локальное свойство, то φ и $\bar{\varphi}$ непрерывны.

Ясно, что с помощью сдвига общий случай можем свести к случаю $\varphi(0, 0)=(0, 0)$. В дальнейшем будем рассматривать этот случай.

Лемма 3. *Существуют гомеоморфизм $\Phi: R^2 \to R^2$ со свойствами:*

1) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} R^2 & \xrightarrow{\Phi} & R^2 \\ \gamma\downarrow & & \downarrow\gamma \\ T & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

коммутативна, где γ — каноническое отображение $R^2 \to R^2/Z^2=T$;

2) *Φ линейно отображает Z^2 на Z^2.*

Доказательство. Очевидно.

Ясно, что если $\Phi=P+iQ$, где P и Q — реальны, то так как $P=(\Phi+\bar{\Phi})/2$, $Q=(\Phi-\bar{\Phi})/2i$, то $\gamma\circ P$ и $\gamma\circ Q$ тоже принадлежит локально к $D[A]$. В дальнейшем будем использовать выражения Φ, P, Q принадлежат локально к $D[A]$, подразумевая под этим, что $\gamma\circ\Phi$, $\gamma\circ P$, $\gamma\circ Q$ принадлежат локально к $D[A]$.

По определению алгебры $D[A]$ каждый ее элемент определяется непрерывными функциями f и g, для которых существует последовательность функций (f_n), $f_n \in D_T^\infty$, такие, что

$$(f_n)\xrightarrow{\text{равн. на } T} f, \qquad (Af_n)\xrightarrow{\text{равн. на } T} g,$$

т. е.

$$\sup_{(x, y)\in T} |f_n(x, y)-f(x, y)| \to 0 \text{ и } \sup_{(x, y)\in T} |Af_n(x, y)-g(x, y)| \to 0.$$

Лемма 4 доказывает, что функция g однозначно определена функцией f. Функцию g будем обозначать через Af.

Лемма 4. *Пусть последовательность функций (f_n) удовлетворяет условиям:*

1) *каждая функция f_n определена и имеет непрерывные первые производные на некотором открытом множестве $G\subset R^2$;*

2) $(f_n)\xrightarrow{\text{равн. на } G} 0$;

3) $(Af_n)\xrightarrow{\text{равн. на } G} F$.

Тогда $F=0$ на G.

Замечание. При $A=\partial/\partial x$ лемма 4 является частным случаем теоремы 1.46 в [6].

Доказательство. 1 случай — A гиперболический, т. е. $A=\varkappa(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y})$, где a и b — реальные $\varkappa\neq 0$. Ясно, что в доказательстве можем считать $\varkappa=1$, а G — кругом.

Пусть $\varepsilon>0$, $(x_0, y_0)\in G$. Докажем, что $|F(x_0, y_0)|<\varepsilon$:

Неравенство о среднем (например, в [6], 1.42) дает при $(x_0+ah, y_0+bh)\in G$

$$|f_n(x_0+ah,\ y_0+bh)-f_n(x_0,\ y_0)-hAf_n(x_0,\ y_0)|$$
$$\leq |h|\ \sup\{|Af_n(x_0+k,\ y_0+r)-Af_n(x_0,\ y_0)|:|k|\leq|ah|,\ |r|\leq|bh|\}.$$

Так как $(Af_n)\to F$ равномерно на G, то существуют $\delta>0$ и ν, такие, что при $|h|<\delta$ и $n>\nu$

$$\sup_{|k|\leq|ah|,\ |r|\leq|bh|}|Af_n(x_0+k,\ y_0+r)-Af_n(x_0,\ y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Поэтому

$$|f_n(x_0+ah,\ y_0+bh)-f_n(x_0,\ y_0)-hAf_n(x_0,\ y_0)|\leq|h|\ \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

После граничного перехода $n\to\infty$ получаем $|h|\,|F(x_0,\ y_0)|\leq|h|\,\varepsilon/2$. Отсюда $F(x_0,\ y_0)=0$.

2 случай — A есть эллиптический, $A=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}\cdot$

Пусть $H\in D$, где D есть множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Рассмотрим $\varphi_n=Hf_n$. Ясно, что

$$A\varphi_n=(f_nAH+HAf_n)\xrightarrow{\text{равн. на } G}HF.$$

Рассмотрим и обобщенную функцию $E=[\pi(\xi'x+\eta'g)]^{-1}$, где $\xi'=\xi/|\xi|^2$, $\eta'=-\eta/|\eta|^2$. Очевидно, что $AE=\delta(x,\ y)$, где $\delta(x,\ y)$ — δ-функция Дирака.

Кроме того, ясно, что существуют свертки $E*A\varphi_n$ и $E*HF$, так как $A\varphi_n$ и HF — финитные функции; ясно, что

$$E*A\varphi_n\longrightarrow E*HF,\ \text{так как}\ \operatorname{supp}A\varphi_n\subset\operatorname{supp}H\ \text{и}\ (A\varphi_n)\xrightarrow{\text{равн. на } G}HF.$$

Известно, что

$$E*A\varphi_n=AE*\varphi_n=\delta*\varphi_n=\varphi_n.$$

Итак,

$$\begin{array}{ccc} E*A\varphi_n & \longrightarrow & E*HF \\ \| & & \\ \varphi_n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Поэтому $E*HF=0$. Отсюда $A(E*HF)=0$. Но по правилу дифференцирования свертки получаем $A(E*HF)=AE*HF$.

Или $0=\delta*HF=HF$.

Так как $H\in D$ произвольна, то $F=0$. Доказательство окончено.

Пусть F принадлежит локально к $D[A]$. По определению для каждой точки тора существует круговая окрестность U этой точки и существует функция $f \in D[A]$, такие, что $f \mid U = F \mid U$. Определим на U функцию $AF = Af$. Ясно, что этим образом AF определяется однозначно на T и что AF непрерывна на T.

Аналогично лемме 3 можно продолжить по непрерывности отображения $A(\gamma \circ \Phi)$, $A(\gamma \circ P)$, $A(\gamma \circ Q)$ на всю плоскость R^2. Очевидно, что если Φ, P, Q дифференцируемы, то эти продолжения равны $A\Phi$, AP, AQ соответственно. Поэтому эти продолжения будем обозначать через $A\Phi$, AP, AQ соответственно.

Лемма 5. *Пусть* $A = \frac{\partial}{\partial x} + (a+ib)\frac{\partial}{\partial y}$, *где* a *и* b *реальные и* $b \neq 0$. *Если реальная функция* F *локально принадлежит к* $D[A]$, *то* F *имеет непрерывные первые частные производные.*

Доказательство. Пусть круг $U \subset T$, $\overset{\circ}{U} \neq \varnothing$ и $g \in D[A]$ суть такие, что $F \mid U = g \mid U$. Так как $g \in D[A]$, то существует такая последовательность (g_n), $g_n \in D_T^\infty$, что

$$(g_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} g \quad \text{и} \quad (Ag_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} Ag.$$

При достаточно большом n функции g_n реальны на U. Но

$$Ag_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right) g_n + ib \frac{\partial}{\partial y} g_n \xrightarrow{\text{равн. на } U} Ag = G_1 + iG_2,$$

где реальные функции $G_1, G_2 \in D_T^0$.

Следовательно, $\left(\frac{\partial}{\partial y} g_n\right) \xrightarrow{\text{равн. на } U} \frac{1}{b} G_2$. А это означает, что на U существует и непрерывна $\frac{\partial}{\partial y} F$ и $b \frac{\partial}{\partial y} F = G_2$ на U ([6], теорема 1.46). Поэтому на U существует и непрерывна и $\frac{\partial}{\partial x} F$.

Так как F локально принадлежит к $D[A]$, для каждой точки тора существует такая круговая окрестность U и такая функция $g \in D[A]$, для которых $F \mid U = g \mid U$, т. е. F имеет непрерывные первые частные производные на T.

Пример. Так как P и Q реальны, то если A эллиптический оператор, то P и Q имеют непрерывные первые частные производные ва R^2.

Будем использовать следующую теорему.

Теорема 4 (К. де Лой и Х. Миркил [7]). *Пусть* $A, A_2, \ldots, A_m$ — *линейные дифференциальные операторы;* $A_1, \ldots, A_m$ — *с постоянными коэффициентами, для которых:*

1. *Существует такая константа* $\varkappa$, *что*

$$|Ag(0)| \leq \varkappa[\|A_1 g\| + \cdots + \|A_m g\|]$$

для $\forall g \in D$ *с носителем, содержащемся в* $\{Z : |Z| < \varepsilon\}$ *для некоторого* $\varepsilon < 0$.

2. *Порядок* $A_1, \ldots, A_m$ *не превышает* N.

Тогда

1. *Порядок* A *в* $Z = 0$ *тоже не превышает* N.

2. *Если обозначим однородные части операторов $A, A_1, \ldots, A_m$ порядка N через $A^N, A_1^N, \ldots, A_m^N$, то существуют такие константы $a_1, \ldots, a_m$, что $A^N = a_1 A_1^N + \ldots + a_m A_m^N$ при $Z=0$.*

Лемма 6. *Пусть алгебра $D[A]$ изоморфна алгебре $D[B]$, где $A = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$, $B = \zeta \frac{\partial}{\partial u} + \theta \frac{\partial}{\partial v}$; пусть изоморфизм порождается отображением $\varphi(x, y): T \to T$, и пусть в соответствии с леммой 3, $\Phi = (P, Q): R^2 \to R^2$, тогда существует функция $M(x, y)$ на торе T, $M(x, y) \neq 0$, такая, что*

1. $AP = M\zeta$ и $AQ = M\theta$;

2. $A[g(P(x, y)Q(x, y))] = M(x, y)[Bg][P(x, y), Q(x, y))$, *для каждой* $g(u, v) \in D[B]$.

Доказательство. Дифференцируемость есть локальное свойство, так что достаточно доказать утверждения леммы в какой-нибудь окрестности каждой точки $(x, y) \in R^2$. Сперва покажем, что если $g \in D_T^\infty$, то

$$A[g(P(x, y), Q(x, y)] = g'_u(P, Q)AP + g'_v(P, Q)AQ:$$

P и Q принадлежит локально к $D[A]$ (как вытекает из леммы 2 и 3), поэтому существует замкнутая круговая окрестность U точки $(x_0, y_0) \in R^2$ и существуют последовательности (P_n) и (Q_n), P_n, Q_n — бесконечно дифференцируемы, такие, что

$$(P_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} P, \qquad (Q_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} Q,$$

$$(AP_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} AP, \qquad (AQ_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} AQ.$$

Пусть $G(x, y) = g(P(x, y), Q(x, y))$ и $G_n(x, y) = g(P_n(x, y), Q_n(x, y))$. Ясно что $G_n \in D_T^\infty$ и что

$$(G_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} G.$$

Последнее следует из неравенства о среднем, так как

$$|g(P_n(x, y), Q_n(x, y)) - g(P(x, y), Q(x, y))| \leq \sup_{w \in U} |P_n(x, y)\, g'_u(P(w), Q(w)) + q_n(x, y)\, g'_v(P(w), Q(w))| \leq \sup_{(x, y) \in U} |P_n(x, y)| .$$

$$. \sup_{(x, y) \in U} |g'_u(P(x, y), Q(x, y))| + \sup_{(x, y) \in U} |q_n(x, y)| . \sup_{(x, y) \in U} |g'_v(P(x, y), Q(x, y))|$$

при $p_n = P_n - P$, $q_n = Q_n - Q$.

Аналогично доказывается, что $g'_u(P_n, Q_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} g'_u(P, Q)$ и $g'_v(P_n, Q_n) \xrightarrow{\text{равн. на } U} g'_v(P, Q)$. Отсюда $AG_n \xrightarrow{\text{равн. на } U} Ag$. Но тогда на внутренности U имеем

$$AG = A[g(P, Q)] = \lim_{n\to\infty} AG_n = \lim_{n\to\infty} \{g'_u(P_n, Q_n)AP_n + g'_v(P_n, Q_n)AQ_n\} = g'_u \,. AP + g'_v \,. AQ.$$

Это доказывает, что $AG = g'_u AP + g'_v AQ$.

Очевидно, что теорема о замкнутом графике применима к изоморфизму $D[A]\simeq D[B]$. Эта теорема дает, что отображение $\widetilde{\varphi}: D[B]\to D[A]$ непрерывно, где $\widetilde{\varphi}(g)=g(\varphi)=g(P,\ Q)$. А это означает, что $\|A\widetilde{\varphi}g\|\leq\varkappa(\|Bg\|+\|g\|)$ для некоторой константы $\varkappa$ и для $\forall g\in D[B]$ при $\|f\|=\sup\limits_{(x,\ y)\in T}|f(x,\ y)|$.

Мы уже доказали, что для каждого $g(u,\ v)\in D_T^\infty$ выполнено $A\widetilde{\varphi}g=AG=g'_u AP+g'_v AQ$, т. е. $A\widetilde{\varphi}$ есть линейный дифференциальный оператор для $g(u,\ v)\in D_T^\infty$ с коэффициентами AP и AQ. Из цитированной теоремы 4 получаем, что в нашем случае существует такая функция $M(x,\ y)\neq 0$, для которой $A\widetilde{\varphi}=M(x,\ y)B$ для $g\in D_T^\infty$, т. е. $AG=MBg$ для каждой $g\in D_T^\infty$.

Итак,

$$Ag(P,\ Q)=g'_u(P,\ Q)AP+g'_v(P,\ Q)AQ=M[\zeta g'_u(P,\ Q)+\theta g'_v(P,\ Q)]$$

для каждой $g\in D_T^\infty$. Следовательно, $AP(x,\ y)=\zeta M(x,\ y)$ и $AQ=\theta M(x,\ y)$.

Чтобы завершить доказательство леммы, остается показать, что $AG=MBg$ для каждой $g\in D[B]$.

Пусть $g\in D[B]$. Тогда $G(x,\ y)=g(P,\ Q)\in D[A]$; AG существует и непрерывна и существует последовательность (ψ_n), $\psi_n\in D_T^\infty$, для которой

$$(\psi_n)\xrightarrow{\text{равн. на } T} g \text{ и } (B\psi_n)\xrightarrow{\text{равн. на } T} Bg.$$

Рассмотрим последовательность $\{A[\psi_n(P,\ Q)]\}$. Вычисляем

$$A[\psi_n(P,\ Q)]=(\psi_n)'_u AP+(\psi_n)'_v AQ=M[\zeta(\psi_n)'_u+\theta(\psi_n)'_v]=MB\psi_n.$$

Итак, $A[\psi_n(P,\ Q)]\xrightarrow{\text{равн. на } T} MBg(P,\ Q)$ и $\psi_n(P,\ Q)\xrightarrow{\text{равн. на } T} g\ (P,\ Q)$.

Но тогда из определения и из леммы 4 следует, что $Ag(P,\ Q)=M[Bg](P,Q)$ для $\forall g\in D[B]$.

Из доказательства ясно, что для изоморфизма $D[A]\simeq D[B]$ достаточно существования непрерывного взаимно-однозначного отображения $\varphi(x,\ y): T\longrightarrow T$ и соответствующего отображения $\Phi=(P,\ Q): R^2\longrightarrow R^2$, для которых AP и AQ существуют и $AP=\zeta M$, $AQ=\theta M$ для некоторой непрерывной функции $M(x,\ y)\neq 0$ на торе T.

Оператор $A[g(P,\ Q)]$ будем обозначать через $A\widetilde{\varphi}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ — эллиптический оператор. Тогда $\xi\neq 0$ и можем считать $\xi=1$, а $\eta=a+ib$, a и b — реальны и $b\neq 0$.

Допустим, что существует алгебра $D[B]$, изоморфная алгебре $D[A]$, где $B=\zeta\frac{\partial}{\partial u}+\theta\frac{\partial}{\partial v}$, ζ и θ — реальны.

Ясно, что $D[B]$ локально изоморфна алгебре $D[\frac{\partial}{\partial u}]$. Это означает, что для каждой точки $(x_0,\ y_0)\in T$ существует замкнутый круг — $U(x_0,\ y_0)$ — окрестность точки $(x_0,\ y_0)$, и множество $V\subset T(u,\ v)$ такие, что $D[A]|U\simeq D[\partial/\partial u]/V$.

Пусть изоморфизм осуществляется отображением $\psi=(F, G): U\to V$. По тем же соображениям, как и P и Q (лемма 5), F и G имеют непрерывные червые частные производные на U. С другой стороны, из теоремы о замкнутом графике следует, что отображение $\widetilde{\psi}$ (где $\widetilde{\psi}g=g\circ\psi$) непрерывно. Это означает, что существует константа $\varkappa$, для которой $\|A\widetilde{\psi}g\|_U\leq\varkappa(\|g\|_V+\|Bg\|)$ для $\forall g\in D[B]$, как обычно $\|f\|_w=\sup\{|f(x, y)|:(x, y)\in w\}$.

Но тогда из теоремы 4 вытекает, что в нашем случае существует такая функция $M(x, y)\neq 0$, для которой $A\widetilde{\psi}g=M\frac{\partial}{\partial u}g$, $\forall g\in D_T^\infty$, т. е.

$$A\widetilde{\psi}g=[\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}]\,\xi+[\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}]\eta$$

$$=[\xi F'_x+\eta F'_y]\frac{\partial}{\partial u}g+[\xi G'_x+\eta G'_y]\frac{\partial}{\partial v}g,\ \forall g\in D_T^\infty.$$

Следовательно, $\xi G'_x+\eta G'_y\equiv 0$ на $\mathring{U}$ или $G'_x\equiv 0$ и $G'_y\equiv 0$ на $\mathring{U}$. Получаем, что $G\equiv$ константа на U, что невозможно.

Противоречие доказывает, что эллиптическая алгебра не может быть изоморфной гиперболической алгебре (даже локально!).

Доказательство теоремы 2. Пусть A и B — эллиптические операторы. Пусть $\Phi(x, y)=(P, Q)$ — отображение, порождающее изоморфизм $D[A]\cong D[B]$. Из леммы 5 следует, что P и Q имеют непрерывные первые частные производные.

Пусть $A=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ и $B=\zeta\frac{\partial}{\partial u}+\theta\frac{\partial}{\partial v}$. Константы ξ, η, ζ и θ отличны от нуля, так как A и B эллиптические.

Лемма 6 утверждает, что $AP=\zeta M(x, y)$ и $AQ=\theta M(x, y)$, где $M(x, y)$ отличная от нуля функция на торе T. Отсюда

$$AP/AQ=\zeta/\theta \quad\text{или}\quad (\xi P'_x+\eta P'_y)/(\xi Q'_x+\eta Q'_y)=\zeta/\theta, \qquad \text{т. е.}$$

$$[(\xi/\eta)P'_x+P'_y]/[(\xi/\eta)Q'_x+Q'_x]=\zeta/\theta. \tag{1}$$

Пусть $\xi/\eta=a+ib$ и $\zeta/\theta=c+id$, a, b, c и d — реальны. Так как A и B эллиптические, то b и d отличны от нуля.

Сравнивая реальные и комплексные части равенства (1), получаем

$$aP'_x+P'_y=(ca-bd)Q'_x+cQ'_y,$$
$$bP'_x\qquad=(cb+ad)Q'_x+dQ'_y.$$

Эта система эллиптична в смысле И. Г. Петровского [8], так как детерминант

$$\begin{vmatrix} -a\alpha-\beta & (ac-bd)\alpha+c\beta \\ -b\alpha & (cb+ad)\alpha+d\beta \end{vmatrix}=-d[\alpha^2(a^2+b^2)+2\alpha\beta a+\beta^2]$$

для реальных α и β аннулируется только при $\alpha=\beta=0$.

Оценим рост $\Phi=P+iQ$: φ преобразует геомеоморфно тор в тор, кроме того, Φ имеет свойства, перечисленные в лемме 3. Отсюда

$$M_\Phi(R)\sup_{|(x, y)|\leq R}|\Phi(x, y)|\leq\mu(R+1)$$

для подходящей константы μ.

Используя теорему Л. Шварц [9], В. П. Паламодов [10] „*Для каждого решения* $(u_1, \ldots, u_m)$, $U_i: R^n \to C$, *однородной эллиптической системы, определенного на* R^n, *с оценкой* $M_{u_i}(|Z|) \leq \mu(1+|Z|^p)$, $i=1, 2, \ldots, m$, *где* μ — *константа,* p — *целое* ≥ 0, u_i, $i=1, \ldots, m$, *являются полиномами степени не выше* p“, получаем, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть линейные функции x и y.

Так как Φ преобразует линейно Z^2 на Z^2, то $P=kx+ly$, $Q=mx+ny$; числа k, l, m и n — целые и $kn-lm=\pm 1$.

Кроме того, (1) ограничивает еще возможные изоморфизмы требованием

$$[(\xi/\eta)k+l]/[(\xi/\eta)m+n]=\zeta/\theta. \tag{2}$$

Очевидно, что если существуют такие целые k, l, m и n, для которых выполнено условие (2) и $kn-lm=\pm 1$, то $\Phi=(P, Q)$ при $P=kx+ly+a_0$ и $Q=mx+ny+b_0$, a_0, b_0 — реальны, осуществляет изоморфизм между алгебрами $D[A]$ и $D[B]$.

Доказательство теоремы 3. Так как A и B гиперболические и определены с точностью до ненулевого множителя, то ξ, η, ζ и θ можем считать реальными.

Пусть опять $\Phi(P, Q)$ есть отображение, построенное в лемме 3, порождающее изоморфизм $D[A] \cong D[B]$. Имея в виду лемму 6, получаем, что $A[\theta P(x, y)-\zeta Q(x, y)]=0$. Отсюда $\theta P(x, y)-\zeta Q(x, y)=\psi(\eta x-\xi y)$, где $\psi(t)$ — некоторая функция $R^1 \to R^1$. Так как уже доказана непрерывность P и Q, то ψ непрерывна. (Так как $\Phi=(P, Q)$ взаимно однозначное отображение, то ψ и монотонна.)

Φ преобразует Z^2 на Z^2 линейно, т. е. для целых r и s имеем $P(r, s)=kr+ls$ и $Q(r, s)=mr+ns$, где k, l, m и n — целые числа, для которых $kn-lm=\pm 1$. Поэтому при r и s целых имеем $\psi(\eta r-\xi s)=(\theta k-\zeta m)r+(\theta l-\zeta n)s$.

Рассмотрим сначала

Первый случай: ξ/η — иррациональное, ξ, $\zeta \neq 0$.

В этом случае ясно, для каждой прямой $\eta x-\xi y=t_0$, t_0 — константа, можно найти последовательность точек $\{(r_p, s_p)\}$ с целочисленными координатами, для которой $(\eta r_p-\xi s_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} t_0$, $(\eta r_p-\xi s_p) \neq t_0$.

Пусть $t_p=\eta r_p-\xi s_p$. Так как r_p и s_p — целые, то $\psi(t_p)=(\theta k-\zeta m)r_p+(\theta l-\zeta n)s_p$, и $\psi(t_p)$ можно записать в виде

$$\psi(t_p)=(\theta k-\zeta m)\frac{t_p}{\eta}+\frac{1}{\eta}[(\theta l-\zeta n)\eta+(\theta k-\zeta m)\xi]s_p.$$

Ввиду непрерывности $\psi(t)$, $\psi(t_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} \psi(t_0)$. И получаем, что при $p\to\infty$ последовательность $[(\theta k-\zeta m)\xi+(\theta l-\zeta n)\eta]s_p$ имеет предел.

Но $\{|s_p|\}$ стремится к бесконечности. Мы так выбрали последовательность $\{(r_p, s_p)\}$, что $\eta r_p-\xi s_p \neq t_0$ и r_p, s_p — целые. Отсюда $\xi(\theta k-\zeta m)+(\theta l-\zeta n)\eta=0$ или $[(\xi/\eta)k+l]/[(\xi/\eta)m+n]=\zeta/\theta$, k, l, m и n — целые.

Второй случай: ξ, $\eta \neq 0$, ξ/η — рационально.

В этом случае существуют две различные точки (r_1, s_1) и (r_2, s_2) с целочисленными координатами, для которых $\eta r_1-\xi s_1=\eta r_2-\xi s_2$ или $\xi/\eta=(r_1-r_2)/(s_1-s_2)$. Так как тогда $\psi(\eta r_1-\xi s_1)=\psi(\eta r_2-\xi s_2)$, то $(\theta k-\zeta m)(r_1-r_2)+(\theta l-\zeta n)(s_1-s_2)=0$. Отсюда $-\xi/\eta=[\theta l-\zeta n]/[\theta k-\zeta m]$, т. е. опять получаем необходимые условия из теоремы 3.

Случаи, когда ζ или η равны нулю, очевидным образом рассматриваются как второй случай.

Условия теоремы и достаточны, так как если они выполнены, изоморфизм можем осуществить линейным преобразованием вида $\Phi=(P, Q)$, $P=kx+ly$, $Q=mx+ny$.

Доказательство следствия 1. Условия

$$(2') \qquad [(\xi/\eta)k+l]/[(\xi/\eta)m+n]=\zeta/\theta, \quad kn-lm=\pm 1, \quad k,\ l,\ m \text{ и } n \text{ — целые,}$$

при исследовании представляют следующие случаи:

А. $\xi\neq 0$. Тогда можем считать $\xi=1$.

а. При $\zeta\neq 0$ тоже можем считать $\zeta=1$ и условия (2') принимают вид $[(1/\eta)k+l]/[(1/\eta)m+n]=1/\theta$, $kn-lm=\pm 1$; k, l, m и n — целые.

1. При $l=0$ получаем, что хоть одно из чисел $\theta\pm\eta$ — целое.

2. При $l\neq 0$ получаем, что θ равно одному из чисел $n/l+\varepsilon/(k+\eta l)l$ для h, l, n и $(kn+\varepsilon)/l$ — целые, $\varepsilon=\pm 1$.

Случай А. б. При $\zeta=0$ можем считать $\theta=1$ и из условия (2') получаем, что η — рационально.

Случай Б. При $\xi=0$ можем считать, что $\eta=1$.

а. При $\zeta\neq 0$ получаем, что θ/ζ рационально.

б. При $\zeta=0$ имеем $D[A]=D[B]$.

Итак, алгебры $D[A]$ и $D[B]$ изоморфны только в случаях, перечисленных в следствии 1.

Доказательство следствия 2. Если A — эллиптический оператор, можем считать $\xi=1$. Условия (2') при $\xi=\zeta=1$, $\eta=\theta=a+ib$, a и b реальны, эквивалентны системе

$$(3) \qquad \left|\begin{array}{l} 2al+k=n \\ -l(a^2+b^2)=m \\ kn-lm=\pm 1, \quad k,\ l,\ m \text{ и } n \text{ — целые.} \end{array}\right.$$

А. При $l=0$ получаем только тривиальные автоморфизмы $P=\varepsilon x$, $Q=\varepsilon y$, $\varepsilon=\pm 1$.

Б. При $l\neq 0$ получаем $a=(n-k)/2l$, $b^2=-[\{(n+k)^2-4\}/4l^2]$, т. е. необходимо, чтобы a и b^2 были одновременно рациональными и чтобы $kn-lm=1$.

Для k получаем уравнение $k^2+2al+l^2(a^2+b^2)-1=0$, $2al=n-k$.

Отсюда $4(1-l^2b^2)=w^2$, где w — целое, неотрицательное и $w^2\leq 4$, т. е. возможны только случаи:

а) $w=0$; б) $w=1$; в) $w=2$.

В случае в) имеем $b=0$, т. е. алгебра $D[A]$ гиперболическая; $a=r/s$; $l=l_1 s$, где r, s, l_1 — целые; $r=(-k\pm 1)/l_1$; $k_{1,2}=-al\pm 1$; r/s — несократима.

Итак, нетривиальные автоморфизмы гиперболической алгебры $D[A]$ возможны только когда $\xi/\eta=1/a$ — рациональный элемент CP_1. Проверяется, что в этом случае отображения $P=(-\lambda rs+\varepsilon)x+\lambda s^2 y$, $Q=-\lambda r^2 x+(\lambda rs+\varepsilon)y$, $\varepsilon=\pm 1$, λ — произвольное целое число, осуществляют автоморфизмы алгебры $D[A]$.

В случае а) $w=0$ получаем, что нетривиальные автоморфизмы осуществляются тогда и только тогда, когда $a=s/r$, $b=1^{\text{В}}/r$ при r, s и (s^2+1) r — целые, отображениями $P=\varepsilon(-sx+ry)$, $Q=\varepsilon[-(s^2+1)x/r+sy]$, $\varepsilon=\pm 1$.

Исследуя случай $w=1$ (случай б), получаем случай 2.2. из следствия 2.

Следствия о целых числах получаются так: 1. Следствие 2 устанавливает, что в эллиптической алгебре $D[B]$, $\zeta=1$, $\theta=a+ib$, $a=s/r$, $b=1/r$, где r, s, $(s^2+1)/r$ — целые, $r\neq 0$, ± 1, существуют нетривиальные автоморфизмы. Согласно теореме 2 и классификации модулей римановых поверхностей рода 1, эта алгебра должна быть изоморфна или алгебре $D[A]$ при $\xi=1$, $\eta=-i$, или алгебре $D[A']$ при $\xi'=1/2+i\sqrt{3}/2$, $\eta'=1$. Но условия (2) не выполняются для алгебр $D[B]$ и $D[A']$. Следовательно, $D[B]\cong D[A]$. Ввиду следствия 1 или $\theta\pm\eta$ — целое (что невозможно, так как $r\neq\pm 1$), или θ равно одному из чисел $n/l+\varepsilon/(k+\eta l)l$, k, l, n, $(kn+\varepsilon)/l$ — целые. Отсюда получаем необходимость условий. Достаточность получается непосредственной проверкой.

2. Согласно следствию 2 в эллиптической алгебре $D[B]$, $\zeta=1$, $\theta=a+ib$ при $a=(2\delta+1)/2\lambda$ и $b=\sqrt{3}/2\lambda$, где λ, δ и $(\delta^2+\delta+1)/\lambda$ — целые, существуют нетривиальные автоморфизмы. Следовательно, алгебра $D[B]$ изоморфна одной из алгебр $D[A]$ и $D[A']$. Но алгебры $D[B]$и $D[A]$ не удовлетворяют условиями (2). Итак, в этом случае $D[B]\cong D[A']$. Так как при $\lambda\neq\pm 1$ числа $\theta\pm(\eta'/\xi')$ не являются целыми, то ввиду следствия 1, число θ равно одному из чисел $n/l+\varepsilon/[k+(\eta'/\xi')l]l$, $\varepsilon=\pm 1$, при k, l, n и $(kn+\varepsilon)/l$ — целые. Отсюда получаем необходимость условий. Достаточность условий очевидна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов. Об однородных кольцах функций на торе. *Доклады АН СССР*, **82**, 1952, 681—684.
2. Г. Е. Шилов. О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец. *Успехи мат. наук*, **12**, 1957, вып. 1, 246—249.
3. Г. Е. Шилов. Однородные кольца функций. *Успехи мат. наук*, **6**, 1951, вып. 1, 91—137.
4. J. P. Serre et al. Seminar on complex multiplication. *Lecture Notes in Math.* **21**, Berlin, 1966.
5. Г. Е. Шилов. О регулярных нормированных кольцах. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **21**, 1947.
6. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Москва, 1972.
7. K. de Leeuw, H. Mirkil. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm. *Illinois J. Math.*, **8**, 1964, 112—124.
8. И. Г. Петровский. Sur l'analycité des solutions des systèms d'équations differentielles. *Мат. сб.*, **5**, 1939, 3—68.
9. L. Schwartz. Theorie des distributions, vol. 2. Paris, 1951.
10. В. П. Паламодов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 7. 1979