Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОГРУЖАЕМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНО ПОГРУЖАЕМОГО РАСШИРЕНИЯ В УНИВЕРСАЛЬНО ПОГРУЖАЕМОЕ

НИКОЛА П. ЗЯПКОВ

Рассматриваем задачу погружения полей $(K/k, G, \alpha)$ где K/k — универсально погружаемое расширение Галуа периода $q=p^n$ с p-группой Галуа F, G — конечная p-группа, $\operatorname{Ker} \alpha$ — циклическая группа порядка p, K содержит первообразный корень из 1 степени q, а G и F имеют одинаковое число образующих. В работе показано, что существует решение L этой задачи, такое, что для задачи погружения $(L/k, G_1, \beta)$ с абелевым ядром периода p^{n-1} выполнено условие согласности. Это означает, что L/k будет универсально погружаемое расширение Галуа периода p^{n-1} тогда и только тогда, когда для задачи $(L/k, G_1, \beta)$ выполнено дополнительное условие погружения.

В [1, § 4] вводится класс полей — универсально погружаемые расширения Галуа. Расширение K/k называется универсально погружаемым периода q, если всякая задача погружения $(K/k, G, \alpha)$, ядро которой — абелева группа периода q, разрешима. В работе [2] найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное расширение Галуа K/k было универсально погружаемое. Напомним это условие. Пусть F — группа Галуа расширения K/k. Представим F в виде эпиморфного образа $F=\varphi(S)$ свободной группы S и обозначим через R ядро φ, через F_1 — фактор-группу $S/[R, R[R^q$ и через α_1 — естественный эпиморфизм $F_1 \to F$. Расширение K/k универсально погружаемое периода q тогда и только тогда, когда разрешима задача погружения $(K/k, F_1, \alpha_1)$.

Достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $q=p^n$, где p — простое число, а группа Галуа расширения K/k — p-группа (см. 5).

Пусть K/k — универсальное погружаемое расширение Галуа периода p^n с p-группой Галуа F, $\alpha: G \to F$ — эпиморфизм, ядро которого — циклическая группа порядка p, G и F имеют одинаковое число образующих, и пусть К содержит первообразный корень ζ_{p^n} степени p^n из единицы. Пусть L — решение задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$, т. е. группа Галуа расширения L/k равна G, и для любого $g \in G$ его ограничение на K совпадает с $\alpha(g)$. Интересуемся, когда L будет универсально погружаемое расширение периода p^{n-1}. Делаем аналогичное построение как в начале работы и для группы G, а именно: представим G в виде эпиморфного образа $G=\varphi_1(S_1)$ свободной группы S_1 и обозначим: $R_1 = \operatorname{Ker} \varphi_1$, $G_1 = S_1/[R_1, R_1]R_1^{p^{n-1}}$ и β эпиморфизм G_1 на G, индуцированный гомоморфизмом φ_1. Поле L—универсально погружаемое расширение периода p^{n-1} тогда и только тогда, когда разрешима задача погружения $(L/k, G_1, \beta)$.

Чтобы формулировать теорему 1, заметим, что имеем следующую последовательность эпиморфизмов: $G_1 \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} F$. Обозначим через C ядро $\alpha\beta$ а через B ядро β.

Теорема 1. *Для того, чтобы было выполнено условие согласности для задачи погружения $(L/k, G_1, \beta)$, достаточно разрешимости задачи погружения $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$, где γ индуцируется эпиморфизмом β.*

Доказательство. Ядром гомоморфизма β является группа $R_1/[R_1, R_1]R_1^{p^{n-1}}$; это ядро абелево и имеет период p^{n-1}. Поле K содержит ζ_{p^n} и содержится в поле L, следовательно, поле L содержит $\zeta_{p^{n-1}}$. В таком случае мы воспользуемся следующей формулировкой условия согласности: для любого гомоморфизма $\chi: B \to L^*$ обозначим через G_χ подгруппу группы G, состоящую из всех таких $g \in G$, что $\chi(b^g)=[\chi(b)]^g (b^g = \bar{g}^{-1}b\bar{g}$ для любого такого элемента $\bar{g} \in G_1$, что $\beta\bar{g}=g)$, а через $G_{1\chi}$ — полный прообраз группы G_χ относительно эпиморфизма β. Пусть c_χ — элемент из группы $H^2(G_\chi, B)$, отвечающий расширению $1 \to B \to G_{1\chi} \to G_\chi \to 1$. Условие согласности для задачи $(L/k, G_1, \beta)$ состоит в том, что для всех гомоморфизмов $\chi: B \to L^*$ образ элемента c_χ при отображении $\chi^*: H^2(G_\chi, B) \to H^2(G_\chi, L^*)$, индуцированном гомоморфизмом χ, равен единице.

Пусть задача погружения $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$ разрешима. Это, в частности, означает, что для этой задачи выполнено условие согласности, которое являеется необходимым условием разрешимости задачи погружения [3]. Обозначим через U ядро эпиморфизма, α — циклическая группа простого порядка p. Группа U является подгруппой группы G и, следовательно, возможны следующие два случая для группы G_χ: $G_\chi \supset U$ или $G_\chi \cap U = 1$.

1. Пусть $G_\chi \supset U$. Из последовательности эпиморфизмов следует, что фактор-группа C/B изоморфна группе U. Отсюда легко следует, что $[C, C] = [C, B]$: здесь $[C, B]$ — взаимный коммутант.

Ввиду этого любой элемент из $[C, C]$ можно представить в виде произведения элементов вида $c^{-1}b^{-1}cb$; $c \in C$, $b \in B$. Ясно, что $c^{-1}b^{-1}cb$ принадлежит B. Тогда

$$\chi(c^{-1}b^{-1}cb) = \chi(c^{-1}b^{-1}c)\chi(b) = \chi(b^{-1\,\beta(c)})\chi(b) = [\chi(b^{-1})]^{\beta(c)}\chi(b) = \chi(b^{-1})\chi(b) = 1.$$

Здесь можно считать, что $c \notin B$ (противоположный случай тривиальный). Кроме того, $\beta(c) = \beta(cB)$. Поскольку группа C/B изоморфна группе U, то группа $\beta(C/B)$ тоже изоморфна группе U, а так как группа G_χ содержит группу U, то $\beta(c) \in G_\chi$ и, следовательно, $\chi(b^{-1\,\beta(c)}) = [\chi(b^{-1})]^{\beta(c)}$. Значения характера χ находятся в группе корней из единицы степени p^{n-1}. Но поле K содержит $\zeta_{p^{n-1}}$, т. е. значения характера χ принадлежат полю K. Группа Галуа расширения L/K равна U. Отсюда следует, что $[\chi(b^{-1})]^{\beta(c)} = \chi(b^{-1})]$. Таким образом получили, что характер χ индуцирует характер $\chi_1: B/[C, C] \to L^*$, где группа $B/[C, C] = \operatorname{Ker}\gamma$ и характер χ_1 задается следующим образом: $\chi_1(b[C, C]) = \chi(b)$. В таком случае группы G_χ и G_{χ_1} совпадают. Для задачи погружения $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$ выполнено условие согласности. Следовательно, образ элемента C_{χ_1} из группы $H^2(G_\chi, B/[C, C])$, отвечающий расширению $1 \to B/[C, C] \to C_{1\chi}/[C, C] \to G_\chi \to 1$ при отображении χ_1^*: $H^2(G_\chi, B/[C, C]) \to H^2(G_\chi, L^*)$, равен единице. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \to & B/[C, C] & \to & G_{1\chi}/[C, C] & \to & G_\chi & \to 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & | & \\
1 \to & B & \to & G_{1\chi} & \to & G_\chi & \to 1
\end{array}$$

индуцирует следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_\chi, B/[C, C]) & \xrightarrow{\chi_1^*} & H^2(G_\chi, L^*), \\ \varepsilon\uparrow & & \\ H^2(G_\chi, B) & \xrightarrow{\chi^*} & H^2(G_\chi, L^*). \end{array}$$

Гомоморфизм ε индуцируется каноническим гомоморфизмом $B \to B/[C, C]$. Тогда $\chi^*(c_\chi) = \chi_1^*\varepsilon(c_\chi) = \chi_1^*(C_{\chi_1}) = 1$. Это означает, что для задачи $(L/k, G_1, \beta)$ выполнено условие согласности.

Теперь рассмотрим второй случай, а именно

2. $G_\chi \cap U = 1$.

В этом случае группа G_χ изоморфна своему образу F_χ при эпиморфизме α. Вложения $\{\zeta_{p^{n-1}}\} \to \{\zeta_{p^n}\} \to K^* \to L^*$, где $\{\zeta_{p^n}\}$ — группа корней из единицы степени p^n, индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_\chi, \{\zeta_{p^{n-1}}\}) & \xrightarrow{\mu} & H^2(G_\chi, L^*), \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^2(F_\chi, \{\zeta_{p^n}\}) & \xrightarrow{v} & H^2(F_\chi, K^*). \end{array}$$

Расширение K/k — универсально погружаемое периода p^n и $K \ni \zeta_{p^n}$, а это означает, что K/k является универсально согласным расширением периода p^n. Следовательно, гомоморфизм ϑ нулевой (см. [1]), т. е. гомоморфизм μ тоже нулевой. Гомоморфизм χ^* можно представить в виде композиции двух гомоморфизмов $H^2(G_\chi, B) \to H^2(G_\chi, \{\zeta p^{n-1}\}) \to H^2(G_\chi, L^*)$, второй из которых нулевой. Следовательно, χ^* — тоже нулевой гомоморфизм. Это означает, что для задачи $(L/k, G_1, \beta)$ выполнено условие согласности. Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало такое решение L задачи $(K/k, G, \alpha)$, что задача $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$ разрешима, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима задача погружения $(K/k, G_1/[C, C], \alpha\gamma)$.*

Доказательство. Пусть поле L — такое решение задачи $(K/k, G, \alpha)$, что задача погружения $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$ разрешима, и пусть поле (или алгебра Галуа) M — ее решение. Это означает, что группа Галуа расширений M/k равна $G_1/[C, C]$ и для любого автоморфизма $g \in G_1/[C, C]$ поля M его ограничение на L совпадает с $\gamma(g)$. Ясно, что M является решением задачи $(K/k, G_1/[C, C], \alpha\gamma)$, т. е. она разрешима. Необходимость условия теоремы 2 доказана.

Докажем теперь достаточность теоремы. Пусть задача погружения $(K/k, G_1/[C, C], \alpha\gamma)$ разрешима и пусть поле $\mathcal{O}$ — ее решение. Обозначим через L подполе поля $\mathcal{O}$, которое инвариантно относительно группы $B/[C, C]$. Тогда группа Галуа расширения L/k изоморфна фактор-группе $G_1/[C, C]/B/[C, C] \approx G_1/B$, а фактор-группа G_1/B изоморфна группе G. Следовательно, поле L является решением задачи $(K/k, G, \alpha)$, а поле $\mathcal{O}$ решает задачу $(L/k, G_1/[C, C], \gamma)$. Этим и завершается доказательство теоремы 2.

Замечание. Ядром гомоморфизма $\alpha\gamma$ является группа $C/[C, C]$; это ядро абелево и имеет период p^n. Расширение K/k — универсально погружаемое периода p^n, а это означает, что задача погружения $(K/k, G_1/[C, C], \alpha\gamma)$ разрешима. Следовательно, в этом случае существует поле L, которое решает задачу $(K/k, G, \alpha)$ и для задачи $(L/k, G_1, \beta)$ выполнено условие согласности.

Таким образом задача погружения $(L/k, G_1, \beta)$ разрешима (это равносильно, что L — универсально погружаемое расширение периода p^{n-1}) тогда и только тогда, когда выполнено дополнительное условие погружения, т. е. распадается некоторый конструктивно вычисляемый элемент ξ из группы $\mathrm{Ext}^1_G(A, L^*)$ (A — ядро естественного эпиморфизма $Z(\bar{B}) \to \bar{B}$; $\bar{B} = \mathrm{Hom}_G(B, L^*)$, $Z(\bar{B})$ — групповой модуль группы $\bar{B}$ (см. [4])).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Зяпков, А. В. Яковлев. Универсально согласные расширения Галуа. *Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР*, **71**, 1977, 133—152.
2. Н. П. Зяпков. Универсально погружаемые расширения Галуа. *Плиска*, **2**, 1981, 153—156.
3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Исследования по геометрии теории Галуа. *Мат. сб.*, **15**, 1944, 243—276.
4. А. В. Яковлев. Задача погружения полей. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **28**, 1964, 645—660.
5. R. Kochendörffer. Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem für Abelschen Algebren. *Math. Nachr.*, **10**, 1953, 75—84.

Высший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 20. 11. 1979