Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСЛОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

СВЕТОЗАР Д. МАРГЕНОВ

Работа посвящена применению параболических и кубических сплайнов для приближенного решения краевых задач смешанного типа для бигармонического уравнения в прямоугольнике.

Сначала в работе рассмотрена конструкция пространств из сплайнов и некоторые их свойства. Получена вариационная формулировка исходного дифференциального уравнения. Затем с использованием этих результатов строятся системы вариационно-разностных уравнений и экономичные итерационные методы их решения.

Развитие теории сплайнов в основном связано с вопросами интерполяции и сглаживания функций [1—4, 6, 8]. Впоследствии оказывается удобным использовать их в методе колокации для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этой работе рассмотрены приложения сплайн-функций для решения частных дифференциальных уравнений. Задачи исследованы в их вариационной постановке. Рассмотренные вычислительные схемы являются модификациями классического подхода Релейя — Ритца — Галеркина. В основе этих конструкций лежит дискретизация пространства функций, в котором минимизируем соответственный вариационный функционал.

Когда область — прямоугольник $[a, b]\otimes[c, d]$ и краевые условия на каждой стороне однотипные, естественным оказывается использовать пространство, которое имеет вид $M=M_1\otimes M_2$, где M_1 и M_2 — конечномерные пространства функций, определенных соответственно на интервалах $[a, b]$ и $[c, d]$. Такие конструкции использовали Дуглас и Дюпонт [10] для решения эллиптических краевых задач второго порядка. В этой работе для решения эллиптических краевых задач четвертого порядка использованы параболические и кубические сплайны.

В п. 1 рассмотрена конструкция пространств из сплайнов и некоторые их свойства. В п. 2 получена вариационная формулировка одного класса эллиптических краевых задач смешанного типа для бигармонического уравнения. В п. 3 дана вариационно-разностная аппроксимация ставленных задач и оценка погрешности. В п. 4 предложены экономичные итерационные схемы для решения соответственных систем линейных алгебраических уравнений. Работа является обобщением результатов, полученных в [5].

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность Р. Лазарову за ценные замечания и полезные советы.

1. Параболические и кубические сплайны на прямоугольнике. Пусть $\Lambda_n=\{x_i=a+ih,\ i=0,\ 1,\ldots,\ n+1;\ h=(b-a)/(n+1)\}$ — равномерная сетка на интервале $[a, b]$. $S_p(\Delta_n)$ — линейное пространство полиномиальных сплайнов степени p на множестве узлов Δ_n, причем $p=2$, 3. Пусть

$$B_{p,k}(x)=B_{p,k}(x_k, \ldots, x_{k+p+1}; x)=(p+1)\sum_{s=k}^{k+p+1}(x_s-x)_+^p/\omega'_{k,p}(x_s),$$

$$(x_s-x)_+=\begin{cases}x_s-x, & x\leq x_s,\\ 0, & x_s\leq x,\end{cases}$$

$$\omega_{k,p}(x)=(x-x_k)\ldots(x-x_{k+p+1}).$$

Функцию $B_{2,k}(x)$ называем параболическим B-сплайном, а $B_{3,k}(x)$ — кубическим B-сплайном. Существенно, что $B_{k,p}^{(r)}(x)=0$, когда $r\leq p$ и $x\notin(x_k, x_{k+p+1})$. Это свойство называем локальностью B-сплайнов. Нетрудно проверить, что $\{B_{2,i}(x);\ i=-2, \ldots, n\}$ — базис для $S_2(\Delta_n)$ и $\{B_{3,i}(x);\ i=-3, \ldots, n\}$ — базис для $S_3(\Delta_n)$.

Пусть $\Omega=[a, b]\otimes[c, d]$ и Δ_n^1, Δ_m^2 — равномерные сетки на интервалах $[a, b]$ и $[c, d]$. Пусть $\{\alpha_{p,i}(x);\ i=1, \ldots, n+p+1\}$ — базис из B-сплайнов для $S_p(\Delta_n^1)$ и $\{\beta_{q,i}(y);\ j=1, \ldots, m+q+1\}$ — базис из B-сплайнов для $S_q(\Delta_m^2)$. Обозначим $S_{p,q}(\Delta_n^1\otimes\Delta_m^2)=S_p(\Delta_n^1)\otimes S_q(\Delta_m^2)$. Видно, что $\{\alpha_{p,i}(x)\beta_{q,j}(y);\ i=1, \ldots, n+p+1;\ j=1, \ldots, m+q+1\}$ — базис для $S_{p,q}(\Delta_n^1\otimes\Delta_m^2)$.

Уже имеем возможность сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Пусть $u(x, y)\in C^{k,l}(\Omega)$, $2\leq k\leq p+1$, $2\leq l\leq q+1$. Тогда существует $s(x, y)\in S_{p,q}(\Delta_n^1\otimes\Delta_m^2)$, такая, что на границе области $s(x_i, y_j)=u(x_i, y_j)$, $\frac{\partial s(x_i, y_j)}{\partial n}=\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial n}$, где n — внешняя нормаль и выполнено неравенство*

$$\text{(1)}\qquad \|D^\alpha(u(x, y)-s(x, y))\|_{C(\overline{\Omega})}\leq C\max_\beta\|D^\beta u(x, y)\|_{C(\overline{\Omega})}(h_1^{k-\alpha_1}+h_2^{l-\alpha_2}),$$

причем $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1\leq k$, $\alpha_2\leq l$; $\beta=(\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1\leq k$, $\beta_2\leq l$.

Техника доказательства таких теорем хорошо известна [4; 8], и на этом мы не будем останавливаться.

Рассмотрим еще едно свойство сплайнов, которое оказывается важным для приложений.

Линейное n-мерное пространство $\mathcal{L}[a, b]$ называется однородным порядка q, если существуют положительные постоянные $c_{i,j}(\mathcal{L})$, $0\leq i\leq q$, $0\leq j\leq r$, такие, что для каждой функции $\varphi\in\mathcal{L}$ и $r\leq q$ выполнено неравенство

$$\text{(2)}\qquad \|\varphi^{(r)}\|_{L_2[a, b]}\leq c_{p,r}(\mathcal{L})n^{r-p}\|\varphi^{(p)}\|_{L_2[a,b]},\qquad p\leq r.$$

Пользуясь локальными свойствами параболических и кубических B-сплайнов, нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *$S_p(\Delta_n)$ есть однородное линейное пространство порядка p.*

Так, например, для $S_2(\Delta_n)$ выполнены следующие неравенства однородности:

$$\|s_2''\|_{L_2[a,b]}\leq 38/h^2\|s_2\|_{L_2[a,b]},\quad \|s_2'\|_{L_2[a,b]}\leq 11/h\|s_2\|_{L_2[a,b]},$$

$$\|s_2''\|_{L_2[a,b]}\leq 2\sqrt{3}/h\|s_2'\|_{L_2[a,b]}.$$

2. Краевые задачи для бигармонического уравнения. Рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x, y), \qquad (x, y)\in\Omega, \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\alpha}=0; \tag{a}$$

$$u\Big|_{\Gamma\beta}=\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma_\beta}=0; \tag{в}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\Gamma_\gamma}=\left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \tau^2}\right)\Big|_{\Gamma_\gamma}=0, \tag{c}$$

где $\partial\Omega$ — граница области Ω, $\cup_\delta \Gamma_\varepsilon=\partial\Omega$ $(\delta\in\{\alpha, \beta, \gamma\})$, τ — касательная к $\partial\Omega$, такая, что $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ — правая пара векторов, $\nu\in[0, 1/2]$ — постоянная Пуассона.

Эта краевая задача описывает деформацию тонкой изотропной пластины (плиты) под давлением силы $f(x, y)$, нормальной к ее плоскости. Условия на границе имеют следующий физический смысл: (а) — жестко защемлен край, (в) — шарнирная связь, (с) — свободный край.

Мы рассматриваем задачи с однотипными краевыми условиями на каждой стороне прямоугольника Ω. Из-за этого удобно обозначить $\partial\Omega=\bigcup_{i=1}^{4} G_i$, где $G_1=\{(a, y), c\le y\le d\}$, $G_2=\{(x, c), a\le x\le b\}$, $G_3=\{(b, y\}, c\le y \le d\}$, $G_4=\{(x, d), a\le x\le b\}$.

Остановимся на следующих типах краевых условий: (A) — жестко защемлен край на G_1 и произвольные условия (из (a), (в), (c) на остальных сторонах; (B) — шарнирная связь на G_1 и G_3 и произвольные условия на G_2 и G_4; (C) — шарнирная связь на G_1 и G_2 и произвольные условия на G_3 и G_4.

Как принято [9], для уравнений четвертого порядка краевые условия, содержащие только функцию $u(x, y)$ и ее первые производные, называем главными. Остальные краевые условия называем естественными. Следовательно, когда край жестко защемлен, первое и второе условия — главные, когда связь шарнирная — только первое, а свободному краю соответствует пара естественных условий.

Воспользуемся пространством Соболева $H^2(\Omega)=\{v\colon D^\alpha v\in L_2(\Omega);\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2),$ $0\le\alpha_1,\ 0\le\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\le 2\}$ с нормой

$$\|v\|^2_{H^2(\Omega)}=\iint_\Omega (v^2_{xx}+v^2_{xy}+v^2_{yy}+v^2_x+v^2_y+v^2)\,dxdy.$$

Тогда в вариационной постановке задачи (3, A), (3, B) и (3, C) сформулируем так: найти функцию $u\in H^2_E(\Omega)$, такую, что $I(u)=\inf\limits_{v\in H^2_E(\Omega)}(Iv)$, где

$$H^2_E(\Omega)=\{v\in H^2(\Omega)\colon v \text{ удовлетворяют главным краевым условиям задачи}\} \tag{4}$$

$$I(v)=\iint_\Omega (v^2_{xx}+v^2_{yy}+2\nu v_{xx}v_{yy}+2(1-\nu)v^2_{xy}-2fv)\,dxdy.$$

Имеет место следующая теорема (об эллиптичности):

Теорема 3. *Для задач* (3, A), (3, B) *и* (3, C) *существует положительная постоянная* $\gamma_0>0$, *такая, что для каждого* $v\in H^2_E(\Omega)$ *выполнено неравенство*

$$(5)\qquad a(v, v)\geq\gamma_0\|v\|^2_{H_2(\Omega)},\ \textit{где}$$

$$a(u, v)=\iint_\Omega [u_{xx}v_{xx}+u_{yy}v_{yy}+\nu(u_{xx}v_{yy}+u_{yy}v_{xx})+2(1-\nu)u_{xy}v_{xy}]\,dxdy.$$

Доказательство. Рассмотрим случай (3, C). Квадратичной форме (относительно v_{xx}, v_{yy}, v_{xy}), порождающей $a(v, v)$, соответствует матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1-\nu)\end{pmatrix}.$$

Если обозначим через $\gamma_{\min}$ минимальное собственное число матрицы A то $\lambda_{\min}=1-\nu$. Следовательно, $a(v, v)\geq(1-\nu)\iint_\Omega(v^2_{xx}+v^2_{yy}+v^2_{xy})dxdy$.

Используя дефиницию пространства $H^2_E(\Omega)$, получаем тождества

$$v(x, y)=\int_a^x v_s(s, y)ds,\qquad v(x, y)=\int_c^y v_t(x, t)dt,$$

$$v_x(x, y)=\int_a^x v_{ss}(s, c)ds+\int_c^y v_{xt}(x, t)dt,$$

$$v_y(x, y)=\int_c^y v_{tt}(a, t)dt+\int_a^x v_{sy}(s, y)ds\quad \text{при}\quad (x, y)\in\bar\Omega.$$

Тогда из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$\iint_\Omega v^2dxdy\leq(b-a)^2\iint_\Omega v^2_x dxdy,\quad \iint_\Omega v^2dxdy\leq(d-c)^2\iint_\Omega v^2_y dxdy,$$

$$\iint_\Omega v^2_x dxdy\leq 2(b-a)^2\iint_\Omega v^2_{xx}dxdy+2(d-c)^2\iint_\Omega v^2_{xy}dxdy,$$

$$\iint_\Omega v^2_y dxdy\leq 2(d-c)^2\iint_\Omega v^2_{yy}dxdy+2(b-a)^2\iint_\Omega v^2_{xy}dxdy.$$

Из полученных неравенств легко получается (5).

3. Вариационно-разностная аппроксимация. Рассмотрим вычислительные схемы, которые получаем после дискретизации пространства допустимых функций $H^2_E(\Omega)$. Пусть $M=\{s: s\in S_{p,q}(\Delta^1_n\otimes\Delta^2_m)$, s удовлетворяют главным краевым условиям задачи$\}$. Ищем приближенное решение $w\in M$, такое, что

$$(6)\qquad I(w)=\inf\{I(v):\ v\in M\}.$$

Из теории дискретных вариационных методов [9], теоремы 1 и теоремы 3 получаем оценку для разности между точным и приближенным решениями. Выполнена следующая теорема:

Теорема 4. *Если* $u\in C^{p+1,q+1}(\bar\Omega)$, *то* $\|w-u\|_{H^2(\Omega)}=O(h_1^{p-1}+h_2^{q-1})$.

Пусть $\{\alpha_{p,i}(x)\beta_{q,j}(y)\,;\; i=1,\ldots,\; N_1,\; j=1,\ldots,\; N_2\}$ — базис из B-сплайнов для M. Главные краевые условия соответствующей задачи удовлетворяем линейными комбинациями из B-сплайнов. Видно, что это можно сделать, не теряя локальности базиса. N_1 и N_2 зависят от m, n и числа главных краевых условий.

Нам нужны следующие матричные обозначения:

$$A_{kl}=\{\langle\alpha_{p,i}^{(k)},\ \alpha_{p,j}^{(l)}\rangle_x\},\quad i,\, j=1,\ldots,\, N_1;\quad 0\le k\le p,\quad 0\le l\le p,$$

$$B_{ts}=\{\langle\beta_{q,i}^{(t)},\ \beta_{q,j}^{(s)}\rangle_y\},\quad i,\, j=1,\ldots,\, N_2;\quad 0\le t\le q,\quad 0\le s\le q,$$

где

$$\langle\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\rangle_x=\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx,\quad \langle\psi_1(y),\ \psi_2(y)\rangle_y=\int_c^d \psi_1(y)\psi_2(y)dy.$$

Из локальности базиса следует, что матрицы A_{kl} и B_{ts} имеют ленточную пятидиагональную структуру.

Приближенное решение можно представить в виде

$$w=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\xi_{N_1(i-1)+j}\alpha_{p,i}(x)\beta_{q,j}(y).$$

Дискретная минимизационная задача эквивалентна следующей системе линейных уравнений:

$$(7)\qquad [A_{22}\otimes B_{00}+A_{00}\otimes B_{22}+\nu(A_{20}\otimes B_{02}+A_{02}\otimes B_{20})+2(1-\nu)A_{11}\otimes B_{11}]\xi=F,$$

где $\xi^T=(\xi_1,\ldots,\,\xi_{N_1N_2})$, $F=(\iint_\Omega f(x,y)\alpha_{p,i}(x)\beta_{q,j}(y)dxdy)_{\substack{i=1,\ldots,N_1\\ j=1,\ldots,N_2}}$.

Реализуя полученную вычислительную схему, нам приходится преодолеть следующие проблемы:

— вычислить интегралы для формирования матриц A_{kl}, B_{ts} и F,

— решить систему (7).

Обычно интегралы вычисляют при помощи квадратурных формул. Этот подход универсальный, но алгоритмические трудности, к которым он приводит в рассматриваемой задаче, существенны.

Другая возможность — воспользоваться тем, что аналитический вид B-сплайнов достаточно хорош для точного вычисления матриц A_{kl} и B_{ts}. Чтобы получить вектор F, удобно интерполировать $f(x,y)$ сплайнами из $S_{p-1,q-1}(\Delta_n^1\otimes\Delta_m^2)$. Так, проблема снова сводится к интегрированию произведений из B-сплайнов, что делаем точно. Отметим, что при такой интерполяции оценка, данная в теореме 4, сохраняется.

Особое внимание обратим на методы решения системы (7). Ее матрица — симметрическая, положительно определенная и ленточная. Ширина полуленты $H=pN_2+q+1$. Если $N_2\ll N_1$, тогда удобно применить точные методы, учитывающие ленточную структуру метрицы. Такие, например, метод прогонки и метод квадратного корня. Когда $N_1\sim N_2$, решающие преимущества преобретают итерационные методы.

4. Экономичные итерационные методы. Рассмотрим итерационную схему типа Ричардсона $Q(\xi^{k+1}-\xi^k)/\tau_{k+1}+R\xi^k=F$: $k=0,\,1,\ldots;\; \xi_0$ — задано, где $Q=(A_{11}+A_{00})\otimes(B_{11}+B_{00})$, $R=A_{22}\otimes B_{00}+A_{00}\otimes B_{22}+\nu(A_{20}\otimes B_{02}+A_{02}\otimes B_{20})+2(1-\nu)A_{11}\otimes B_{11}$. Выполнена следующая теорема:

Теорема 5. *Существуют положительные постоянные ν_1 и ν_2, такие, что*

(8) $$\nu_1 Q \leq R \leq \nu_2 N^2 Q, \qquad N = \max(N_1, N_2).$$

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что $\gamma_0 Q \leq R$. Второе неравенство тоже получается легко. Пусть максимальное собственное число матрицы A, введенной в доказательство теоремы 3, обозначим через $\lambda_{\max} = \max[1+\nu, 2(1-\nu)]$. Тогда

$$R \leq \lambda_{\max}(A_{00} \otimes B_{00} + A_{11} \otimes B_{00} + A_{00} \otimes B_{11} + A_{22} \otimes B_{00} + A_{00} \otimes B_{22} + A_{11} \otimes B_{11}).$$

Неравенства однородности, полученные в теореме 2, используем в виде $A_{22} \otimes B_{00} \leq c_{12}(S_p(\Delta_n^1))N^2 A_{11} \otimes B_{00}$, $A_{00} \otimes B_{22} \leq c_{12}(S_q(\Delta_m^1))N^2 A_{00} \otimes B_{11}$. Следовательно, $R \leq \lambda_{\max}(c+1)N^2 Q$, где $c = \max[c_{12}(S_p(\Delta_n^1)l, \; c_{12}(S_q(\Delta_m^2))]$.

Используя устойчивый набор чебышевских итерационных параметров [7], из (8) получаем, что после $O(N \ln 2/\varepsilon)$ итераций относительная ошибка удовлетворяет неравенству $\| w^k - w \|_{H^2(\Omega)} / \| w^0 - w \|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, где $w^i(x, y) \in M$ $i = 0, 1, \ldots, k$; w^i — приближение i-той итерации, соответствующее ξ^i.

Из определения тензорного произведения матриц следует, что

$$(A_{11} + A_{00}) \otimes (B_{11} + B_{00}) = [(A_{11} + A_{00}) \otimes I_{N_2}][I_{N_1} \otimes (B_{00} + B_{11})],$$

где I_{N_1} и I_{N_2} — диагональные единичные матрицы размерности соответственно N_1 и N_2.

Реализация итерационного процесса приводит к решению последовательности линейных систем с матрицами $A_{11} + A_{00}$ и $B_{11} + B_{00}$. Так как эти матрицы допускают применение метода прогонки, то число арифметических операций, необходимых для итерационного решения задачи с относительной погрешностью, меньше чем ε — пропорционально $N^3 \ln 2/\varepsilon$:

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Москва, 1972.
2. В. А. Василенко. Сходимость операторных интерполирующих сплайнов. Сб.: *Вариационно-разностные методы в математической физике*. Новосибирск, 1973.
3. Ю. С. Завьялов. Интерполирование кубическими многозвенниками. Сб.: *Вычислительные системы*, 38. Новосибирск, 1970, стр. 23—73.
4. Ю. С. Завьялов. Интерполирование бикубическими многозвенниками. Сб: *Вычислительные системы*, 38. Новосибирск, 1970, стр. 74—101.
5. С. Д. Маргенов, Р. Д. Лазаров. Применение параболических и кубических сплайнов для решения эллиптических краевых задач четвертого порядка в прямоугольнике. Препринт № 64. Новосибирск, 1979.
6. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Москва, 1977.
7. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.
8. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. Москва, 1976.
9. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. Москва, 1977.
10. J. Douglas, T. Dupont. Alternating direction Galercin methods on rectangles. *Proc Simposium on Numerical Solution on Partial Differential Equations*, II (Mariland, 1970). New York, 1971. p. 133—214.

ж. к. „Червена звезда", бл. 1, ап. 48
1172 София

Поступила 20. 11. 1979