Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

KONSTRUKTION DER BEDINGTEN ENERGIE EINES PUNKTPROZESSES

ERHARD GLÖTZL

Für den Punktprozess P wird gezeigt, daß die Bedingung Σ („nicht Vakuum") zusammen mit der Bedingung, das P bedingt absolut stetig in bezug zu einem Prozess Q (mit unabhängigen Zuwächsen und die selbe Bedingung Σ befriedigend) notwendig und hinreichend dafür ist, das P also Gibbschen Prozess interpretiert werden kann, dessen Wechselwirkungen durch eine Bedingte Energie definiert sind.

1. Einleitung. Unter Gibbsprozess versteht man Punktprozess, deren bedingte Wahrscheinlichkeiten in beschränktem Volumen mit einer vorgegebenen Spezifizierung fast überall übereinstimmen. In den Anwendungen in der statistischen Mechanik wird diese Spezifizierung durch die Wechselwirkungskräfte, die zwischen den Teilchen wirken, bestimmt. Die Wechselwirkungen lassen sich durch verschiedene Begriffe wie bedingte Energie, lokale Energie oder Potential beschreiben [4].

Von Kozlov [11] und in [6] werden hinreichende und in [5] hinreichende und notwendige Bedingungen angegeben, unter denen ein Punktprozeß als Gibbsprozeß mit Potential beschrieben werden kann. Das analoge Problem für lokale Energien wird in [6] behandelt.

Im Hauptergebnis (Satz 6) dieser Arbeit wird gezeigt, daß für einen Punktprozeß P die Eigenschaften (Σ) und $P\overset{e}{\ll}Q$ hinreichend und notwendig sind für die Existenz einer bedingten Energie v: $N_f\times N\to]-\infty,\infty]$, sodaß $P(d\varphi_B/\boldsymbol{N}_{\bar{B}})(\mu)\sim\exp(-v(\varphi_B,\mu_{\bar{B}}))Q(d\varphi_B)$ P-fast sicher, d. h. daß P sich als Gibbsprozeß mit einer bedingten Energie v interpretieren läßt. Weiters existiert unter diesen Voraussetzungen sogar eine Version v^* von v, sodaß die in der exakten Definition von Gibbsprozessen über Spezifizierungen auftretenden Ausnahmemengen (Komplemente der Regularitätsmengen) gleich der leeren Menge gesetzt werden können.

Ausgangspunkt für diese Arbeit ist eine Arbeit von Matthes, Warmuth, Mecke [13], welche die Verbindung zwischen den Arbeiten von Papangelou [15] und Kallenberg [8] über den bedingten Intensitätskern eines Punktprozesses und den Arbeiten von Georgii [2, Satz 3.5] und Nguyen, Zessin [14] über die lokale Charakterisierung von Gibbsprozessen behandelt. In dieser Arbeit [13] wird die zentrale Rolle der Bedingung Σ als natürliche Voraussetzung für die Beschreibung eines Punktprozesses als Gibbsprozeß herausgearbeitet. Diese Bedingung Σ entspricht übrigens genau der Bedingung eines nicht degenerierten Vakuums von Kozlov [11].

In Kapitel 2 bringen wir neben den Bezeichnungen einige bekannte Resultate. In Kapitel 3 werden die Hauptergebnisse formuliert und bewiesen. Die Beweise für die dazu notwendingen Lemmata führen wir in Kapitel 4 an.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 7, 1981, p. 217—233

2. **Bezeichnungen, Definitionen und bekannte Resultate.** Als Phasenraum T wählen wir wie üblich einen lokalkompakten, abzählbar erzeugten Hausdorffraum, um die für die statistische Mechanik wichtigen Fälle $T=\mathbb{R}^d$ und $T=\mathbb{Z}^d$ gleichzeitig zu erfassen, versehen mit der σ-Algebra $\boldsymbol{T}$ der Borelmengen. Es bezeichne weiter

$\boldsymbol{B}$ ... die Menge der beschränkten Borelmengen von T

N ... die Menge der ganzzahligen Radonmaße auf $(T, \boldsymbol{T})$

N_B ... die Menge der ganzzahligen Radonmaße auf $(T, \boldsymbol{T})$ mit Träger in B $(B\in\boldsymbol{B})$.

N_f ... die Menge der endlichen ganzzahligen Radonmaße auf $(T, \boldsymbol{T})$

$\boldsymbol{N}$ ... die übliche σ-Algebra, das ist die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von N, sodaß für alle $B\in\boldsymbol{B}$ die Funktionen $\beta_B: N\to\mathbb{R}$ mit $\mu\to\mu(B)$ meßbar sind

$\boldsymbol{N}_V$ ... die σ-Algebra der Ereignisse, die nur vom Inneren von V abhängen, das ist die kleinste Teil-σ-Algebra von $\boldsymbol{N}$, sodaß für alle $W\in\boldsymbol{T}$, $W\subset V$, die Funktionen β_W meßbar sind $(V\in\boldsymbol{T})$.

$\boldsymbol{N}_f$ ... $\boldsymbol{N}$ eingeschränkt auf N_f

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ ... die Menge der Punktprozesse mit Phasenraum $(T, \boldsymbol{T})$, d. h. die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(N, \boldsymbol{N})$

i_A ... die Indikatorfunktion der Menge A

$\mu_W:=\mu(.\cap W)$ für $\mu\in N$, $W\in\boldsymbol{T}$

$\overline{W}:=T\setminus W$.

Für das O-Maß schreiben wir O.

Da der Phasenraum T ein lokalkompakter, abzählbar erzeugter Hausdorffraum ist, existiert eine Metrik und entsprechend eine abzählbare Basis $\boldsymbol{K}^*$ bestehend aus offenen Kugeln mit Radius $1/n$ $(n\in\mathbb{N})$. $\boldsymbol{K}$ bezeichne die Menge aller endlichen Vereinigungen von Elementen aus $\boldsymbol{K}^*$.

B e m e r k u n g. Gibbsprozesse sind dadurch definiert, daß man für alle beschränkten Mengen B die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse im Inneren von B für alle möglichen Randbedingungen im Äußeren von B durch eine lokale Spezifizierung festlegt. Wir geben zunächst die Definition von Gibbsprozessen zu allgemeinen lokalen Spezifizierungen und werden uns im Kapitel 3 mit Gibbsprozessen zu speziellen lokalen Spezifizierungen befassen und zwar solchen, deren Spezifizierungen über bedingte Energien definiert sind.

D e f i n i t i o n (vgl. [16]). *Für jedes $B\in\boldsymbol{B}$ sei $\pi_B: N\times\boldsymbol{N}\to[0, 1]$ eine Abbildung mit $(\mu, F)\to\pi_B(\mu, F)$ und $R_B\in\boldsymbol{N}_{\overline{B}}$ ungleich der leeren Menge, dann heißt $\Pi:=\{\pi_B\}_{B\in\boldsymbol{B}}$ eine lokale Spezifizierung bezüglich $\boldsymbol{R}:=\{R_B\}_{B\in\boldsymbol{B}}$ falls für alle $B\in\boldsymbol{B}$ gilt:*

(1) $\pi_B(\mu, .)$ *ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(N, \boldsymbol{N})$. $(\mu\in R_B)$

(2) $\pi_B(\mu, F)=0$ $(\mu\notin R_B,\ F\in\boldsymbol{N})$

(3) $\pi_B(\,.,\, F)$ *ist* $\boldsymbol{N}_{\overline{B}}$*-meßbar* $(F\in\boldsymbol{N})$

(4) $\pi_B(\,.,\, F)=i_{F\cap R_B}$ $(F\in\boldsymbol{N}_{\overline{B}})$

(5) $\pi_B*\pi_W(\,.,\, F)=\pi_B(\,.,\, F)$ $(W, B\in\boldsymbol{B},\ W\subset B,\ F\in\boldsymbol{N})$.

D e f i n i t i o n. *Sei Π eine lokale Spezifizierung bezüglich $\boldsymbol{R}$.*

a) *Ein Punktprozeß P mit Phasenraum $(T, \boldsymbol{T})$ heißt Gibbsprozeß mit lokaler Spezifizierung Π bezüglich $\boldsymbol{R}$, falls für alle $B\in\boldsymbol{B}$, $F\in\boldsymbol{N}$ der bedingte Erwartungswert $P(F/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})=\pi_B(\,.,\, F)$ P. f. ü.*

b) *Die Menge aller Gibbs'schen Punktprozesse mit lokaler Spezifizierung Π bezüglich $\boldsymbol{R}$ bezeichnen wir mit $G(\Pi, \boldsymbol{R})$.*

Bemerkung. Ist Π eine lokale Spezifizierung bezüglich $\boldsymbol{R}$, dann gilt für alle $P \in G(\Pi, \boldsymbol{R})$, $B \in \boldsymbol{B}$.

(6) $$P(R_B) = 1.$$

Beweis. Da für alle $B \in \boldsymbol{B}$ $N \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}}$, gilt wegen (4)

$$P(R_B) = \int_N i_{R_B \cap N}(\mu) dP(\mu) = \int_N \pi_B(\mu, N) dP(\mu) = \int_N P(N/\boldsymbol{N}_{\bar{B}})(\mu) dP(\mu) = P(N) = 1.$$

Satz 1. *Ist $P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(7) $$P \in G(\Pi, \boldsymbol{R})$$

(8) $$P(E \cap F) = \int_E \pi_B(\mu, F) dP(\mu) \qquad (B \in \boldsymbol{B},\ E \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}},\ F \in \boldsymbol{N})$$

(9) $$P(F) = \int_N \pi_B(\mu, F) dP(\mu) \qquad (B \in \boldsymbol{B},\ F \in \boldsymbol{N}).$$

Beweis [16].

Bemerkung. (a) Historisch gesehen wurden Gibbsprozesse durch Dobrushin, Lanford, Ruelle (vgl. [1, 2]) zunächst über die Gleichung (9) definiert. (9) wird daher allgemein als DLR-Gleichung bezeichnet.

(b) Obwohl wir es später nicht benötigen, erwähnen wir der Vollständigkeit halber, daß man mit Hilfe von (9) sogar folgendes zeigen kann: $P \in G(\Pi, \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow P = P * \pi_\infty$, wobei π_∞ im wesentlichen durch $\pi_\infty(\mu, F) \cong \lim_{Z \downarrow} \tau(\mu, F)$ definiert ist. Eine genaue Konstruktion findet man in [16].

Definition (vgl. [13]). *$P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ erfüllt die Bedingung Σ, falls für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und $E \in N_{\bar{B}}$ mit $P(E) > 0$ die Ungleichung $P(\{\mu \mid \mu(B) = 0\}/E) > 0$ erfüllt ist.*

Bemerkung. Diese Bedingung wurde ursprünglich von Kozlov [11] eingeführt unter dem Namen „P hat nicht degeneriertes Vakuum" und dann unabhängig davon von Matthes, Warmuth, Mecke [13].

Satz 2 (vgl. [3]). *Für alle $P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ sind folgende 3 Aussagen äquivalent:*

(a) *P erfüllt Σ*

(b) $P(A) = 0 \implies P(\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A\}) = 0 \qquad (B \in \boldsymbol{B},\ A \in \boldsymbol{N})$

(c) $P(A) = 1 \implies P(\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A\}) = 1 \qquad (B \in \boldsymbol{B},\ A \in \boldsymbol{N})$

Beweis. (a) $\implies$ (b): Angenommen $P(\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A\}) > 0$ dann gilt wegen Σ auch

$$0 < P(\{\mu \mid \mu(B) = 0\}/\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A\}) = P(\{\mu/\mu(B) = 0,\ \mu_{\bar{B}} \in A\})/P(\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A\})$$

und damit auch $P(\{\mu \mid \mu(B) = 0,\ \mu_{\bar{B}} \in A\}) > 0$. Da $\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in A,\ \mu(B) = 0\} = \{\mu \mid \mu \in A$ $\mu(B) = 0\} \subset A$ folgt daraus $P(A) > 0$.

(b) $\implies$ (a): Sei $B \in \boldsymbol{B}$ und $E \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}}$. Angenommen $P(E) > 0$ und $P(\{\mu \mid \mu(B) = 0\}$ $/E) = 0$ dann gilt $P(E) \cap \{\mu \mid \mu(B) = 0\}) = 0$. Wegen (2) gilt damit $P(\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in (E$ $\cap \{\mu \mid \mu(B) = 0\})\}) = 0$. Da wegen $E \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}}$ $\{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in (E \cap \{\mu(B) = 0\})\} = \{\mu \mid \mu_{\bar{B}} \in E\} = E$ folgt daraus $P(E) = 0$, was einen Widerspruch bedeutet.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): trivial.

Bemerkung. (a) Die Bedingung Σ spielt für Gibbsprozesse eine entscheidende Rolle. Sie garantiert z. B., daß die Zustandssumme beschränkt bleibt (vgl. Kapitel 3)

b) Die Charakterisierung von Σ im Satz 2 ist sehr nützlich und wird im folgenden oft verwendet. Mit ihrer Hilfe ist es auch möglich zu zeigen, daß zwei Punktprozesse mit der Eigenschaft Σ dann und nur dann zueinander singulär sind, wenn sie eingeschränkt auf $\boldsymbol{N}_\infty = \bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} \boldsymbol{N}_{\overline{B}}$ zueinander singulär sind [3].

Definition. *Seien P_1, $P_2 \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$. P_1 heißt bedingt lokal absolut stetig auf P_2 (symbolisch $P_1 \overset{e}{\ll} P_2$) genau dann wenn für alle $B \in \boldsymbol{B}$*

$$P_1(\,\cdot\,/\boldsymbol{N}_{\overline{B}}/_{N_B} \ll P_2/_{N_B} \qquad P_1 - f.\ \ddot{u}.$$

Dies ist äquivalent dazu, daß es für alle $B \in \boldsymbol{B}$ eine meßbare Funktion $f_B : N \to [0, \infty[$ gibt, sodaß für alle meßbaren Funktionen $g : \boldsymbol{N} \to]-\infty, \infty]$

$$\int_N g(\mu)dP_1(\mu) = \int_N \int_N g(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) dP_2(\varphi) dP_1(\mu) \tag{10}$$

Definition (vgl. [8], [13]). *Für alle $P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ heißt das auf $(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N})$ durch*

$$C^!_P(B \times F) := \int_N \int_B i_F(\mu - \delta_x) d\mu(x) dP(\mu) \qquad (B \in \boldsymbol{B},\ F \in \boldsymbol{N})$$

definierte Maß $C^!_P$ reduziertes Campbell-Maß von P.

Satz 3. *Ist $\nu \in M$ und Q_ν der Poissonprozeß mit Intensitätsmaß ν und P ein einfacher Punktprozeß, dann gilt*

$$C^!_P \ll \nu \times P \Leftrightarrow \begin{array}{ll} (1) & P \overset{e}{\ll} Q \\ (2) & P \text{ erfüllt } \Sigma. \end{array}$$

Beweis [13, Theorem 2.4 und 3.5].

Bemerkung. Dieser Satz bleibt für nicht einfache Punktprozesse nicht mehr richtig. Im Satz 6 zeigen wir, daß die rechte Seite im allgemeinen der Existenz einer bedingten Energie zur Beschreibung von P äquivalent ist und in [6] zeigen wir, daß die linke Seite dagegen der Existenz einer lokalen Energie zur Beschreibung von P äquivalent ist.

Definition. *$P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ heißt nachwirkungsfrei genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, alle paarweise disjunkten $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \boldsymbol{B}$ und alle $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Ereignisse $(\{\mu \mid \mu(B_i) = k_i\})_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ P-unabhängig sind.*

Bemerkung. (a) Eine Charakterisierung nachwirkungsfreier Zufallsmaße findet man in [10].

(b) Für nachwirkungsfreie Punktprozesse P gilt:
P erfüllt $\Sigma \Leftrightarrow$ für alle $B \in \boldsymbol{B}$ $P(\{\mu \mid \mu(B) = 0\}) > 0$

(c) Nachwirkungsfreie Punktprozesse mit der Eigenschaft Σ spielen die Rolle von Gewichtsprozessen bei der Definition von Gibbsprozessen mit bedingter Energie, lokaler Energie bzw. Potential. Daher geben wir im folgenden einige Beispiele davon.

Beispiel 1. Poissonprozeß (vgl. [7; 9])

Beispiel 2. β-Compound-Poissonprozeß (vgl. [7; 9])

Beispiel 3. Bernoulliprozeß.

Dies ist jener Punktprozeß auf $T := Z$, den man erhält, wenn man in jedem Punkt $t \in Z$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1[$ einen Punkt auswürfelt.

3. Gibbsprozesse mit bedingter Energie V. Im folgenden bezeichnet Q jeweils einen beliebig aber fest gewählten nachwirkungsfreien Punktprozeß mit der Eigenschaft Σ.

Definition. *Eine Abbildung* $v\colon N_f \times N \to]-\infty, \infty]$ *heißt bedingte Energie falls*

(11) $$v(\boldsymbol{N}_f \times \boldsymbol{N})\text{-meßbar ist}$$

(12) $$v(0, \mu) = 0 \quad (\mu \in N)$$

Definition. *Sei v eine bedingte Energie*

a) *Für alle* $B \in \boldsymbol{B}$, $\mu \in N$ *heißt* $\boldsymbol{Z}(v, B, \mu) := \int \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi)$ *Zustandssumme (von (v, B, μ))*

b) *Für alle* $B \in \boldsymbol{B}$ *ist* $S_B^v := \{\mu \mid Q(\{\varphi \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v(\varphi_1, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \varphi_1)$ für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ mit disjunkten Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B\}) = 1\}$

c) *Für alle* $B \in \boldsymbol{B}$ *ist* $R_B^v := \{\mu \mid \mu \in N,\ 0 < \boldsymbol{Z}(v, B, \mu) < \infty\} \cap S_B^v$

d) $\boldsymbol{R}^v := \{R_B^v\}_{B \in \boldsymbol{B}}$

e) *Für alle* $B \in \boldsymbol{B}$ *ist* $\pi_B^v : N \times \boldsymbol{N} \to \mathbb{R}_+$ *definiert durch* $\pi_B^v(\mu, F) := \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \int \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})) i_F(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi)$ *falls* $\mu \in R_B^v$ *und* $\pi_B^v(\mu, F) := 0$ *falls* $\mu \notin R_B^v$

f) $\Pi(Q, v) := \{\pi_B^v\}_{B \in \boldsymbol{B}}$

Bemerkung. $v(\varphi, \mu)$ soll die Energie angeben, die notwendig ist, um zur Konfiguration μ die Konfiguration φ „dazuzuwerfen".

Bemerkung. Da Q die Bedingung Σ erfüllt, gilt wegen (12) für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $\mu \in N$ stets

(13) $$\boldsymbol{Z}(v, B, \mu) \geq Q(\{\varphi \mid \varphi(B) = 0\}) > 0.$$

Satz 4. *$\Pi(Q, v)$ ist eine Spezifizierung bezüglich $\boldsymbol{R}^v$.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir 3 Lemmata.

Lemma 1. *Erfüllt $P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ die Bedingung Σ, dann gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und alle $A \in \boldsymbol{N}_B$*

$P(\{\varphi \mid \varphi_B \in A\}) = 1 \implies P(\{\varphi \mid$ Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ mit disjunktem Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B$ gilt $\varphi_1 \in A\}) = 1.$

Lemma 2. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, und alle $\mu \in S_B^v$ gilt*

$$\int i_{\{\psi \mid (\mu_{\overline{B}} + \psi_{B \setminus W}) \notin S_W^v\}}(\varphi) \exp(-v(\varphi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) = 0.$$

Lemma 3. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, und alle $\mu \in S_B^v$* gilt:

$$\boldsymbol{Z}(v, B, \mu) < \infty \implies \int i_{\{\varphi \mid \boldsymbol{Z}(v, W, \mu_{\overline{B}} + \varphi_{B \setminus W}) = \infty\}}(\psi) \exp(-v(\varphi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) = 0.$$

Beweis von Satz 4. Die Eigenschaften (1)—(4) sind trivial erfüllt. Es bleibt die Eigenschaft (5) zu zeigen.

Sei $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$.

Falls $\mu \notin R_B^v$ ist (5) trivial erfüllt, da für alle $F \in \boldsymbol{N}$

$(\pi_B^v * \pi_W^v)(\mu, F) = 0 = \pi_B^v(\mu, F)$

Falls $\mu \in R_B^v$ gilt für alle F

$$\pi_B^v * \pi_W^v(\mu, F) = \int \pi_W^v(\chi, F) d\pi_B^v(\mu, .)(\chi)$$

$$= \int \pi_W^v(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}, F) \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_B)) dQ(\varphi)$$

$$= \int\int \pi_W^v(\varphi_W + \psi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}, F) \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_W + \psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}})) dQ(\varphi) dQ(\psi)$$

$$= \int\int \pi_W^v(\psi_{B\setminus W}+\mu_{\bar{B}}, F)\boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_W, \mu_{\bar{B}}+\psi_{B\setminus W}))$$

$$. \exp(-v(\psi_{B\setminus W}, \mu_{\bar{B}}))dQ(\varphi)d\boldsymbol{Q}(\psi)$$

da $\pi_W^v(., F)\, \boldsymbol{N}_{\bar{W}}$-meßbar ist und $\mu \in S_B^v$ ist und damit weiter

$$= \int \pi_W^v(\psi_{B\setminus W}+\mu_{\bar{B}}, F)\boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1}\boldsymbol{Z}(v, W, \mu_{\bar{B}}+\psi_{B\setminus W}) \exp(-v(\psi_{B\setminus W}, \mu_{\bar{B}}))dQ(\psi)$$

$$= \int\int i_F(\varphi_W+\psi_{B\setminus W}+\mu_{\bar{B}})\boldsymbol{Z}(v, W, \mu_{\bar{B}}+\psi_{B\setminus W})^{-1} \exp(-v(\varphi_W, \mu_{\bar{B}}+\psi_{B\setminus W}))$$

$$\times \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1}\boldsymbol{Z}(v, W, \mu_{\bar{B}}+\psi_{B\setminus W}) \exp(-v(\psi_{B\setminus W}, \mu_{\bar{B}}))d\boldsymbol{Q}(\psi)dQ(\varphi)$$

da wegen Lemma 2 und Lemma 3 für alle $\mu \in R_B^v$

$$\int i_{\{\varphi \mid (\varphi_{B\setminus W}+\mu_{\bar{B}}) \notin R_W^v\}}(\psi_{B\setminus W}) \exp(-v(\psi_{B\setminus W}, \mu_{\bar{B}}))dQ(\psi)=0$$

gilt. Damit gilt weiter wegen $\mu \in S_B^v$

$$= \int\int i_F(\varphi_W+\psi_{B\setminus W}+\mu_{\bar{B}})\boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_W+\psi_{B\setminus W}, \mu_{\bar{B}}))dQ(\varphi)dQ(\psi)$$

$$= \pi_B^v(\mu, F).$$

Damit ist Satz 4 gezeigt.

B e m e r k u n g. Eine ähnliche Aussage wie Satz 4 findet man in [17].

D e f i n i t i o n. *Sei v eine bedingte Energie*

a) *$P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ heißt Gibbsprozeß mit bedingter Energie v und Gewichtsprozeß Q, falls $P \in G(\Pi(Q, v), \boldsymbol{R}^v)$ ist.*

b) *Die Menge der Gibbsprozesse mit bedingter Energie v und Gewichtsprozeß Q bezeichnen wir mit $\boldsymbol{G}(Q, v)$.*

B e m e r k u n g. Der nächste Satz gibt Auskunft darüber in welchem Sinn die zu einem Punktprozeß gehörige bedingte Energie eindeutig bestimmt ist.

S a t z 5. *Seien v und v' bedingte Energien und $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$, dann gilt: $P \in \boldsymbol{G}(Q, v')$ dann und nur dann, wenn für alle $B \in \boldsymbol{B}$*

$$(Q\times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}})=v'(\varphi_B, \mu_{\bar{B}})\})=1.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Lemma.

L e m m a 4. *Ist v eine bedingte Energie und $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$, dann gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und $A \in \boldsymbol{N}$*

$$P(A)=1 \Leftrightarrow (Q\times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}})<\infty \text{ impliziert } (\varphi_B+\mu_{\bar{B}}) \in A\})=1.$$

B e w e i s v o n S a t z 5. (1) Angenommen $P \in \boldsymbol{G}(Q, v')$, dann folgt für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $E \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}}$, $G \in \boldsymbol{N}_B$ wegen (9) und (6)

$$\int_E\int_G \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}))dQ(\varphi)dP(\mu)$$

$$= \int_N\int_N \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}))i_G(\varphi)i_E(\mu)d\boldsymbol{Q}(\varphi)dP(\mu)$$

$$= \int_N\int_N \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}))i_{G\cap E}(\varphi_B+\mu_{\bar{B}})dQ(\varphi)dP(\mu)$$

$$= \int_N \pi_B^v(\mu, G\cap E)dP(\mu)=P(G\cap E)= \ldots$$

$$\ldots = \int_E\int_G \boldsymbol{Z}(v', B, \mu)^{-1} \exp(-v'(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}))dQ(\varphi)dP(\mu).$$

Da die beiden Integranden $\boldsymbol{N}_B \times \boldsymbol{N}_B$ meßbar sind, gilt daher für alle $B \in \boldsymbol{B}$

$$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}))$$

$$= \boldsymbol{Z}(v', B, \mu)^{-1} \exp(-v'(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}))\}) = 1.$$

Da für alle $B \in \boldsymbol{B}$ $Q(\{\varphi \mid \varphi(B) = 0\}) > 0$ und für alle $\mu \in N$ wegen

(12) $\qquad v(0, \mu) = v'(0, \mu) = 0$, folgt daraus $\boldsymbol{Z}(v, B, \mu) = \boldsymbol{Z}(v', B, \mu)$

P. f. ü. und damit auch $(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v'(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})\}) = 1$

(2) Angenommen für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gelte $(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v'(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})\}) = 1$, dann gilt:

a) $\boldsymbol{Z}(v, B, \mu) = \boldsymbol{Z}(v', B, \mu)$ für P-fast alle μ:
folgt unmittelbar aus der Definition.

(b) $i_{S_B^v}(\mu) = i_{S_B^{v'}}(\mu)$ für P-fast alle μ:
Da wegen (2.11) $P(S_B^v) = 1$, genügt zu zeigen $P(S_B^{v'}) = 1$:

(α) Für alle $K \in \boldsymbol{K}$ ist $(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) = v'(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}})\}) = 1$:
Folgt aus der Voraussetzung wegen Satz 2, da Q die Eigenschaft Σ besitzt.

(β) Für alle $K \in \boldsymbol{K}$ ist $(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) < \infty$ impliziert $v(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}} + \varphi_{B \setminus K}) = v'(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}} + \mu_{B \setminus K})\}) = 1$:
Aus der Voraussetzung folgt
$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_{\overline{B \cap K}}), \mu_{\overline{B \cap K}} = v'(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B \cap K}})\}) = 1$
und damit wegen Lemma 4 und der Nachwirkungsfreiheit von Q die Behauptung

(γ) Für alle $K \in \boldsymbol{K}$ ist $(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) = \infty$ impliziert $v'(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = \infty = v'(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) + v'(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}} + \varphi_{B \setminus K})\}) = 1$:
Da $P(S_B^v) = 1$ gilt für $(Q \times P)$-fast alle (φ, μ)
$v(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) = \infty$ impliziert $v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = \infty$.
Damit folgt die Behauptung aus der Voraussetzung und (α)

(δ) Für alle $K \in \boldsymbol{K}$ ist
$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v'(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v'(\varphi_{B \setminus K}, \mu_{\overline{B}}) + v'(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}} + \varphi_{B \setminus K})\}) = 1$:
Dies gilt wegen $P(S_B^v) = 1$, der Voraussetzung, (α), (β), (γ).

(ε) Für alle $\varphi \in N$ und alle $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ mit disjunktem Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B$ existiert ein $K \in \boldsymbol{K}$, sodaß $\varphi_1 = \varphi_{B \cap K}$ und $\varphi_2 = \varphi_{B \setminus K}$, damit folgt die Behauptung (b) unmittelbar aus (δ).

(c) Aus (a) und (b) folgt unmittelbar für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $F \in \boldsymbol{N}$
$\pi_B^v(\,.\,, F) = \pi_B^{v'}(\,.\,, F)$ P-f. ü.
und damit $P \in \boldsymbol{G}(Q, v')$.

Satz 6. *Eine bedingte Energie v, sodaß $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$ ist, existiert dann und nur dann, wenn P die Bedingung Σ erfüllt und $P \overset{e}{\ll} Q$. In diesem Fall existiert auch immer eine Version v^* der bedingten Energie, sodaß $P \in \boldsymbol{G}(Q, v^*)$ und $R_B^{v^*} = N$ für alle $B \in \boldsymbol{B}$.*

Beweis. (1) Angenommen $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$:

(a) P erfüllt Σ:
Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $\mu \in N$ gilt wegen (12)

$$\int_N \exp(-v(\psi_B, \mu_{\bar{B}})) i_{\{\varphi \mid \varphi(B)=0\}}(\psi_B + \mu_{\bar{B}}) dQ(\psi) = Q(\{\varphi \mid \varphi(B)=0\}) > 0.$$

Wegen (6) gilt damit für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und P-fast alle $\mu \in N$

$$\pi_B^v(\mu, \{\mu, \{\varphi \mid \varphi(B)=0\}) > 0.$$

Daraus folgt mit (9) für alle $E \in \boldsymbol{N}_{\bar{B}}$ mit $P(E) > 0$

$$P(\{\varphi \mid \varphi(B)=0\} \cap E) = \int_E \pi_B^v(\mu, \{\varphi \mid \varphi(B)=0\}) dP(\mu) > 0,$$

welches gleichbedeutend mit der Eigenschaft Σ ist.

(b) $P \overset{e}{\ll} Q$:
Wegen (6) und der Definition von $\boldsymbol{G}(Q, v)$ gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$ für P-fast alle $\mu \in N$ für alle $F \in \boldsymbol{N}_B$

$$P(F/\boldsymbol{N}_{\bar{B}})(\mu) = \pi_B^v(\mu, F)$$

$$= \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \int_N i_F(\varphi_B + \mu_{\bar{B}}) \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}})) dQ(\varphi)$$

$$= \int_F \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}})) d\boldsymbol{Q}(\varphi),$$

welches gleichbedeutend mit der Behauptung ist.

(2) Angenommen P erfüllt Σ und $P \overset{e}{\ll} Q$:

Wegen $P \overset{e}{\ll} Q$ existiert für jedes $B \in \boldsymbol{B}$ ein $f_B : N \to [0, \infty[$ mit der Eigenschaft (10).

Zur Konstruktion von v benötigen wir einige Bezeichnungen: Für alle $\varphi \in N_f$, $\varphi \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\boldsymbol{K}(n, \varphi)$ jene Teilmenge von $\boldsymbol{K}$, deren Elemente K endliche Vereinigungen von offenen Kugeln mit Radius $1/n$ sind und für die $\varphi_K = \varphi$ gilt.

Weiter bezeichne L_0 die Menge aller $(\varphi, \mu) \in N_f \times N$ mit den Eigenschaften:

1) $\varphi = 0$ oder
2) $\varphi \neq 0$, φ und μ haben disjunkte Träger und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $K(n, \varphi) \in \boldsymbol{K}(n, \varphi)$, $K(m, \varphi) \in \boldsymbol{K}(m, \varphi)$ gilt
   a) $f_{K(n,\varphi)}(\mu) > 0$ und
   b) $f_{K(n,\varphi)}(\varphi + \mu)/f_{K(n,\varphi)}(\mu) = f_{K(m,\varphi)}(\varphi + \mu)/f_{K(m,\varphi)}(\mu)$.

Damit sind wir in der Lage ein bedingtes Potential v auf folgende Weise zu definieren: $v : N_f \times N \to]-\infty, \infty]$ mit $v(\varphi, \mu) := -\log \lim_{n \to \infty} [f_{K(n,\varphi)}(\varphi + \mu)/f_{K(n,\varphi)}(\mu)]$ falls $(\varphi, \mu) \in L_0$, $\varphi \neq 0$, wobei wir $K(n, \varphi) \in \boldsymbol{K}(n, \varphi)$ beliebig wählen.

$v(\varphi, \mu) := 0$ falls $\varphi = 0$,

$v(\varphi, \mu) := \infty$ andernfalls.

Für den weiteren Beweis des Satzes benötigen wir zunächst einige Lemmata.

Lemma 5. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt für $(Q \times P)$ — fast alle (φ, μ)*

(i) $$(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}) \in L_0$$

(ii) $$v(\varphi_B, \mu_{\bar{B}}) = -\log f_B(\varphi_B + \mu_{\bar{B}})/f_B(\mu_{\bar{B}})$$

Lemma 6. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt für P-fast alle μ*

$$0 < \boldsymbol{Z}(v, B, \mu) = (f_B(\mu_{\bar{B}}))^{-1} < \infty$$

Lemma 7. *Für alle* $B \in \boldsymbol{B}$ *gilt*:

$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v(\varphi_1, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \varphi_1)$ *für alle* $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ *mit disjunktem Träger und* $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B\}) = 1$.

Lemma 8. *Ist* $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$ *und* $A \in \boldsymbol{N}$, *dann gilt für alle* $B \in \boldsymbol{B}$

$$P(A) = 1 \Longrightarrow (Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = \infty \text{ oder } (\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1.$$

Lemma 9. *Ist* $P \in \boldsymbol{G}(Q, v)$ *und* $A \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, *dann gilt für alle* $B \in \boldsymbol{B}$

$$(Q \times P)(\{(\psi, \mu) \mid (\psi_B, \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1 \Longrightarrow P(\{\mu \mid (\mu_B, \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1.$$

Beweis von Satz 6. Wegen Satz 1 genügt es, die DLR-Gleichung zu zeigen, d. h. daß für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $F \in \boldsymbol{N}$ gilt $P(F) = \int_N \pi_B^v(\mu, F)\, dP(\mu)$.

Sei also $B \in B$ und $F \in \boldsymbol{N}$ dann gilt

$$P(F) = \int_N i_F(\mu)\, dP(\mu) = \int_N \int_N i_F(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})\, f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})\, dQ(\varphi)\, dP(\mu)$$

$$= \int_N \int_N i_F(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \frac{f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} \cdot f_B(\mu_{\overline{B}})\, dQ(\varphi)\, dP(\mu)$$

$$= \int_N \int_N i_F(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \exp(-v(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}))\, \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1}\, dQ(\varphi)\, dP(\mu) = \int_N \pi_B^v(\mu, F)\, dP(\mu),$$

wobei wir bei der 3. Gleichheit Lemma 6, bei der 4. Gleichheit Lemma 5 und Lemma 6 ausgenützt haben und bei der 5. Gleichheit, daß wegen Lemma 6 und Lemma 7 $P(R_B^v) = 1$ folgt.

Für den zweiten Teil des Beweises zeigen wir zunächst

a) $P \bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} R_B^v) = 1$:

Sei $K \in \boldsymbol{K}$ beliebig aber fest.

α) Da für jedes $\varphi \in N$ und jedes $B \in \boldsymbol{B}$, $B \subset K$ ein $K' \in \boldsymbol{K}$ mit $K' \subset K$ und $\varphi_B = \varphi_{K'}$, existiert, ist wegen (6)

$P(\{\mu \mid$ für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $B \supset K$, $\mu_{\overline{K}} \in S_B^v\})$

$= P(\{\mu \mid$ für alle $K' \in \boldsymbol{K}$, $K' \subset K$, $\mu_{\overline{K}} \in S_{K'}^v\}) = 1$.

β) Wegen der Nachwirkungsfreiheit von Q und $P(R_K^v) = 1$ gilt für P-fast alle μ für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $B \subset K$

$$\Pi_K^v(\mu, \{\varphi \mid \varphi(K \setminus B) = 0\})$$

$$= (\boldsymbol{Z}(v, K, \mu))^{-1} \int_N \int_N \exp\{-v(\psi_B + \chi_{K \setminus B}, \mu_{\overline{B}})\} \cdot i_{\{\varphi \mid \varphi(K \setminus B) = 0\}}(\chi_{K \setminus B})\, d\boldsymbol{Q}(\varphi)\, d\boldsymbol{Q}(\psi)$$

$$= (\boldsymbol{Z}(v, K, \mu))^{-1} \cdot Q(\{\varphi \mid \varphi(K \setminus B) = 0\}) \cdot \int e^{-v(\psi_B, \mu_{\overline{K}})}\, dQ(\psi)$$

$$= (\boldsymbol{Z}(v, K, \mu))^{-1} \cdot Q(\{\varphi \mid \varphi(K \setminus B) = 0\}) \cdot Z(v, B, \varphi_{\overline{K}}),$$

woraus sich mit (13) unmittelbar

$$P(\{\mu \text{ für alle } B \in \boldsymbol{B},\ B \subset K,\ 0 < \boldsymbol{Z}(v, B, \mu_{\overline{K}}) < \infty\}) = 1$$

ergibt.

γ) Insgesamt gilt also wegen α) und β) für alle $K \in \boldsymbol{K}$ $P(\{\mu \mid$ für alle

$B \in \boldsymbol{B},\ B \subset K,\ \mu_{\overline{K}} \in S_B^v\}) = 1.$

Mit Lemma 8 gilt

$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_K, \mu_{\overline{K}}) = \infty$ oder für alle $B \in \boldsymbol{B},\ B \subset K,\ (\varphi_K + \mu_{\overline{K}}) \in R_B^v\}) = 1$

und damit wegen Lemma 9

$P(\{\mu \mid v(\mu_K, \mu_{\overline{K}}) = \infty$ oder für alle $B \in \boldsymbol{B},\ B \subset K,\ \mu \in R_B^v\}) = 1$ und wegen

$$P(\{\mu \mid v(\mu_K, \mu_{\overline{K}}) = \infty\}) = \int\int e^{-v(\varphi_K, \chi_{\overline{K}})} i_{\{\mu \mid v(\mu_K, \mu_{\overline{K}}) = \infty\}}(\varphi_K + \chi_{\overline{K}}) dQ(\varphi) dP(\chi) = 0$$

damit auch $P(\bigcap_{B \in \boldsymbol{B},\, B \subset K} R_B^v) = 1$. Da K beliebig gewählt war und für jedes $B \ni \boldsymbol{B}$ ein $K \in \boldsymbol{K}$ existiert mit $B \subset K$ gilt $P(\bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} R_B^v) = 1$.

b) Nun definieren wir $R := \bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} R_B^v$ und

$v^*(\varphi, \mu) = v(\varphi, \mu)$ falls $\mu \in R$ oder $\varphi = 0$,

$v^*(\varphi, \mu) = 0$ falls $\mu \notin R$ und $\varphi \neq 0$.

Wegen a) und Satz 2 gilt damit für alle $B \in \boldsymbol{B}$, alle $\varphi \in N$ und P-fast alle $\mu \in N$ $v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v^*(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})$, woraus wegen Satz 5 $P \in \boldsymbol{G}(Q, v^*)$ folgt.

c) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und alle $\mu \in N$ gilt $\mu \in R_B^{v^*}$:

Falls $\mu_B \notin R$ folgt unmittelbar $\mu_B \in R_B^{v^*}$ und damit $\mu \in R_B^{v^*}$.

Falls $\mu_{\overline{B}} \in R$ folgt $v(\,.\,, \mu_B) = v^*(\,.\,, \mu_B)$ und $\mu_{\overline{B}} \in R_B^v$, woraus ebenfalls $\mu_{\overline{B}} \in R_B^{v^*}$ bzw. $\mu \in R_B^{v^*}$ folgt.

Beweise der Lemmata.

Lemma 1. *Erfüllt $P \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ die Bedingung Σ, dann gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und alle $A \in \boldsymbol{N}_B$*

$P(\{\varphi \mid \varphi_B \in A\}) = 1 \implies P(\{\varphi \mid$ Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ mit disjunktem Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B$ gilt $\varphi_1 \in A\}) = 1$.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2, wenn man berücksichtigt, daß zwei Konfigurationen mit disjunktem Träger immer durch Elemente von **k** getrennt werden können und daß **k** abzählbar ist.

Lemma 2. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, und alle $\mu \in S_B^v$ gilt*

$\int i_{\{\psi \mid (\mu_{\overline{B}} + \psi_{B \setminus W}) \notin S_W^v\}}(\varphi) \exp(-v(\varphi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) = 0.$

Beweis. Wegen der Nachwirkungsfreiheit von Q gilt für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, und alle $A \in \boldsymbol{N}_B$

(14) $$Q(\{\varphi \mid \varphi_B \in A\}) = Q \times Q)(\{(\varphi, \psi) \mid (\varphi_W + \psi_{B \setminus W}) \in A\}).$$

Daher gilt für alle $\mu \in S_B^v$ für $(Q \times Q)$-fast alle (φ, ψ) und für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{N}_W$ mit disjunktem Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_W$

(15) $$v(\psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_1 + \varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \psi_{B \setminus W}) = v(\varphi_1 = \varphi_2 + \psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}})$$
$$= v(\varphi_1 + \psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \varphi_1 + \psi_{B \setminus W})$$

und weiter, da Q die Bedingung Σ erfüllt, wegen Lemma 1 auch

(16) $$v(\varphi_1 + \psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) = v(\psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_1, \mu_{\overline{B}} + \psi_{B \setminus W}).$$

Aus (15) und (16) folgt unter der Bedingung $v(\psi_{B \setminus W}, \mu_B) < \infty$:

$$v(\varphi_1 + \varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \psi_{B \setminus W}) = v(\varphi_1 + \psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) - v(\psi_{B \setminus W}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_2, \mu_B + \varphi_1 + \psi_{B \setminus W})$$

$$=v(\varphi_1,\ \mu_{\overline{B}}+\psi_{W\setminus B})+v(\varphi_2,\ \mu_{\overline{B}}+\psi_{B\setminus W}+\varphi_1).$$

Da $\int i_{\{\psi|v(\psi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}})=\infty\}}(\varphi)\ \exp(-v(\varphi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}})dQ(\varphi)=0$ folgt daraus unmittelbar die Behauptung.

Lemma 3. *Für alle $W,\ B\in\boldsymbol{B},\ W\subset B$, und alle $\mu\in S_B^v$ gilt:*

$$\boldsymbol{Z}(v,B,\mu)<\infty \implies \int i_{\{\varphi|\boldsymbol{z}(v,\ W,\ \mu_{\overline{B}}+\varphi_{B\setminus W})=\infty\}}(\psi)\exp(-v(\psi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}})dQ(\psi)=0.$$

Beweis.

$$\int \boldsymbol{Z}(v,\ W,\ \mu_{\overline{B}}+\psi_{B\setminus W})\ \exp\ (-v(\psi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}}))\,dQ(\psi)$$
$$=\int\int \exp\ (-v(\varphi_W,\ \mu_B+\psi_{B\setminus W}))\ \exp\ (-v(\psi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}}))\ dQ(\varphi)dQ(\psi)$$
$$=\int\int \exp\ (-v(\varphi_W+\psi_{B\setminus W},\ \mu_{\overline{B}})dQ(\varphi)dQ(\psi)$$
$$=\boldsymbol{Z}(v,\ B,\ \mu)<\infty.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Lemma 4. *Ist v eine bedingte Energie und $P\in\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{v})$, dann gilt für alle $B\in\boldsymbol{B}$ and $A\in\boldsymbol{N}$*

$$P(A)=1 \iff (Q\times P)\ (\{(\varphi,\mu)\ \ (v(\varphi_B,\ \mu_{\overline{B}})<\infty \text{ impliziert } (\varphi_B+\mu_B)\in A\})=1.$$

Beweis. Sei $B\in\boldsymbol{B}$ und $A\in\boldsymbol{N}$ beliebig aber fest gewählt. Wegen (9) und (6) gilt

$$P((A)=\int_N \pi_B(\mu,\ (A)dP(\mu)$$
$$=\int_N\int_N \boldsymbol{Z}(v,\ B,\ \mu)^{-1}\ \exp\ (-v(\varphi_B,\ \mu_{\overline{B}})\ i_{CA}(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})dQ(\varphi)dP(\mu).$$

Da wegen (6) $P(\{\mu\,|\,0>\boldsymbol{Z}(v,\ B,\ \mu)<\infty\})=1$ gilt damit wegen (9)

$$P(A)=1 \iff P(CA)=0$$
$$\iff \int_N\int_N \exp\ (-v(\varphi_B,\ \mu_{\overline{B}})\ i_{CA}(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})dQ(\varphi)dP(\varphi)=0$$
$$\iff (Q\times P)\ (\{(\varphi,\ \mu)\,|\,v(\varphi_B,\ \mu_{\overline{B}})=\infty \text{ oder } (\varphi_B+\mu_{\overline{B}})\in A\})=1$$
$$\iff (Q\times P)\ (\{(\varphi,\ \mu)\ \ v(\varphi_B,\ \mu_{\overline{B}})<\infty \text{ impliziert } (\varphi_B+\mu_{\overline{B}})\in A\})=1.$$

Zum Beweis der Lemmata 5, 6, 7 benötigen wir einige Hilfslemmata.

Hilfslemma 1. *Für alle $\boldsymbol{N}$-meßbaren Funktionen g und alle $B\in\boldsymbol{B}$ gilt für P-fast alle $\mu\in N$*

$$\int_N g(\varphi)d(P(\,.\,/\,N_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi)=\int_N g(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})d(P(\,.\,\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi).$$

Beweis. Sei $B\in\boldsymbol{B},\ F\in\boldsymbol{N}_B,\ G\in\boldsymbol{N}_{\overline{B}}$, dann gilt für P-fast alle $\mu\in N$

$$\int_N i_{F\cap G}(\varphi)d(P(\,.\,/\,\boldsymbol{N}_{\overline{B}}))\,(\mu))\,(\varphi)=E(i_F\,.\,i_G/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu)=i_G(\mu)\,.\,E(i_F/\boldsymbol{N}_B)\,(\mu)$$
$$=i_G(\mu)\int_N i_F(\varphi)d(P(\,.\,/\,\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi)$$

$$= \int i_G(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \,.\, i_F(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \,.\, d(P(\,.\,/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi)$$
$$= \int i_{G \cap F}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) d(P(\,.\,/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi).$$

Damit folgt die Aussage aus der üblichen Fortsetzungsprozedur.

Hilfslemma 2. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, gilt:*

$$(Q \times P)\,(\{(\varphi, \mu) \mid f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) = f_W(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \,.\, \int_{\overline{B}} f_B(\psi_W + \varphi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi)\}) = 1.$$

Beweis. Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, $E \in \boldsymbol{N}_W$, $F \in \boldsymbol{N}_{B \setminus W}$, $G \in \boldsymbol{N}_{\overline{B}}$ gilt

$$\int_G \int_{F \cap E} f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) dP(\mu)$$
$$= \int_G P(F \cap E / \boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F P(E/\boldsymbol{N}_{\overline{W}})\,(\varphi) d(P(\,.\,/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F P(E/\boldsymbol{N}_{\overline{W}})\,(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) d(P(\,.\,/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu))\,(\varphi) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F P(E/\boldsymbol{N}_{\overline{W}})\,(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F \int_N P(E/\boldsymbol{N}_{\overline{W}})\,(\psi_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\psi_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) dQ(\beta) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F \int_N \int_E f_W(\gamma_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\gamma) f_B(\psi_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) dQ(\beta) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_F \int_E f_W(\gamma_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_W + \beta_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) dQ(\gamma) dQ(\beta) dP(\mu)$$
$$= \int_G \int_{F \cap E} f_W(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_W + \varphi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) dQ(\varphi) dP(\mu).$$

Dabei haben wir bei der 3. Gleichheit Hilfslemma 1 und bei der 5. und der letzten Gleichheit die Nachwirkungsfreiheit von Q ausgenützt.

Hilfslemma 3. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt $P(\{\mu \mid f_B(\mu_{\overline{B}}) > 0\}) = 1$.*

Beweis. Sei $B \in \boldsymbol{B}$, dann gilt für P-fast alle $\mu \in N$

$$f_B(\mu_{\overline{B}}) = \int_N f_B(\mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) \geq \int_N f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})\, i_{\{\varphi_B = 0\}}(\varphi) dQ(\varphi) = P(\{\varphi \mid \varphi_B = 0\}/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu).$$

Da P die Bedingung Σ erfüllt, gilt für P-fast alle μ $P(\{\varphi \mid \varphi_B = 0\}/\boldsymbol{N}_{\overline{B}})\,(\mu) > 0$ und damit die Behauptung.

Hilfslemma 4. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$ gilt*

$(Q \times P)\,(\{\varphi, \mu) \mid \varphi_B = \varphi_W$ und $\mu_{\overline{B \cup W}} = \mu_{\overline{B}}$ impliziert

$$f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})/f_B(\mu_{\overline{B}}) = f_W(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})/f_W(\mu_{\overline{B}})\}) = 1.$$

Beweis. (a) Sei $W, B \in \boldsymbol{B}'$ $W \subset B$, dann gilt, wegen Q erfüllt Σ, Satz 2, Hilfslema 2 und Hilfslemma 3 für P-fast alle μ

$$f_B(\mu_{\overline{B}}) = f_W(\mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_W + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) > 0.$$

Wegen Hilfslemma 2 gilt daher weiter für $(Q \times P)$-fast alle (φ, μ) unter Voraussetzung $\varphi_B = \varphi_W$

$$\frac{f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} = \frac{f_W(\varphi + \mu_{\overline{B}}) \int\limits_N f_B(\psi_W + \varphi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi)}{f_W(\mu_{\overline{B}}) \int\limits_N f_B(\psi_W + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi)} = \frac{f_W(\psi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_W(\mu_{\overline{B}}}$$

da $\varphi_B = \varphi_W$ natürlich $\varphi_{B \setminus W} = 0$ impliziert.

(b) Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$ und $\mu \in N$ gilt unter der Voraussetzung $\varphi_B = \varphi_W$ und $\mu_{\overline{B \cup W}} = \mu_{\overline{B}}$ zunächst $\mu_{\overline{B \cup W}} = (\mu_{\overline{B}})_{\overline{B \cup W}} = (\mu_{\overline{B}})_{\overline{W}}$ und $\varphi_{B \cup W} = \varphi_B$ und damit

$$\frac{f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} = \frac{f_B(\varphi_{B \cup W} + \mu_{\overline{B \cup W}})}{f_B(\mu_{\overline{B \cup W}})} = \frac{f_{B \cup W}(\varphi_{B \cup W} + \mu_{\overline{B \cup W}})}{f_{B \cup W}(\mu_{\overline{B \cup W}})}$$

$$= \frac{f_{B \cup W}(\varphi_{B \cup W} + (\mu_{\overline{B}})_{\overline{B \cup W}})}{f_{B \cup W}((\mu_{\overline{B}})_{\overline{B \cup W}}} = \frac{f_W(\varphi_{\overline{B \cup W}} + (\mu_{\overline{B}})_{\overline{B \cup W}})}{f_W((\mu_{\overline{B}})_{\overline{B \cup W}})} = \frac{f_W(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_W(\mu_{\overline{B}})},$$

wobei wir für die 2. Gleichheit (a) und für die 4. Gleichheit (a) und Satz 2 ausgenützt haben; damit gilt die Behauptung

Lemma 5. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt für $Q \times P$-fast alle* (φ, μ)

(i) $$(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) \in \boldsymbol{L}_0,$$

(ii) $$v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = -\log f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) / f_B(\mu_{\overline{B}}).$$

Beweis. Für $B \in \boldsymbol{B}$ und alle $\varphi, \mu \in N$ mit $\varphi_B \neq 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq n_0$ und für alle $K(n, \varphi_B) \in \boldsymbol{K}(n, \varphi_B)$ gilt: $\varphi_B = \varphi_{K(n, \varphi_B)}$ und $\mu_{\overline{B \cup K(n, \varphi_B)}} = \mu_{\overline{B}}$.

Damit existiert wegen H-Lemma 4 und der Abzählbarkeit von $\boldsymbol{K}$ für $(Q \times P)$—fast alle (φ, μ) unter der Voraussetzung $\varphi_B \neq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq n_0$ und alle $K(n, \varphi_B) \in \boldsymbol{K}(n, \varphi_B)$ gilt:

$$f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) / f_B(\mu_B) = f_{K(n, \varphi_B)}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) / f_{K(n, \varphi_B)}(\mu_{\overline{B}})$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt, da sie für $\varphi_B = 0$ trivial wird.

Lemma 6. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt für P-fast alle μ*
$0 < \boldsymbol{Z}(v, B, \mu) = f_B(\mu_{\overline{B}}))^{-1} < \infty.$

Beweis. Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt für P-fast alle μ wegen (13) Lemma 5 und Hilfslemma 3

$$0 < \boldsymbol{Z}(v, B, \mu) = \int\limits_N \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})) dQ(\varphi)$$

$$= \int\limits_N \frac{f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} dQ(\varphi) = (f_B(\mu_{\overline{B}}))^{-1} \int\limits_N f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) d\boldsymbol{Q}(\varphi)$$

$$= (f_B(\mu_{\overline{B}}))^{-1} \cdot P(N / \boldsymbol{N}_B)(\mu_{\overline{B}}) = (f_B(\mu_B))^{-1} < \infty.$$

Hilfslemma 5. *Für alle $W, B \in \boldsymbol{B}$, $W \subset B$, und alle $A \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ gilt:*

$$(Q \times P)(\{\varphi, \mu) \mid (\varphi_W, \mu_{\overline{W}}) \in A\}) = 1 \implies$$

$$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \; f_B(\varphi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) > 0 \text{ impliziert } (\varphi_W, \varphi_{B \setminus W} + \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1.$$

Beweis: Wegen $P \overset{I}{\leqslant} Q$

$$0 = \int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \mu_{\overline{W}}) dP(\mu) dQ(\varphi)$$

$$= \int_N \int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\psi_B + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi) dP(\mu) dQ(\varphi),$$

d. h. $Q(\{\psi \mid \int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\psi_B + \mu_{\overline{B}}) dP(\mu) dQ(\varphi) = 0\}) = 1$,

woraus wegen Q erfüllt Σ und Satz 2

$$Q(\{\psi \mid \int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dP(\mu) dQ(\varphi) = 0\}) = 1$$

folgt, bzw.

$$\int_N \int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\psi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dP(\mu) dQ(\varphi) dQ(\psi) = 0$$

und damit wegen der Nachwirkungsfreiheit von Q

$$\int_N \int_N i_{CA}(\varphi_W, \varphi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) f_B(\varphi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) dP(\mu) dQ(\varphi) = 0.$$

Das heißt es gilt

$$(Q \times P)(\{\varphi, \mu) \mid f_B(\varphi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) > 0,\ (\varphi_W, \varphi_{B\setminus W} + \mu_{\overline{B}}) \notin A\}) = 0$$

was gleichbedeutend mit der Behauptung ist.

Lemma 7. *Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt:*

$$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v(\varphi_1, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_2, \mu_{\overline{B}} + \varphi_1) \text{ für alle }$$
$$\varphi_1, \varphi_2 \in N_B \text{ mit disjunktem Träger und } \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B\}) = 1.$$

Beweis. (a) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ und für alle $K \in \boldsymbol{K}$ gilt für $(Q \times P)$-fast alle (φ, μ)

$$f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \cdot f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) = f_B(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) \cdot {}_{B\setminus K}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}):$$

Beweis: Wegen Q erfüllt Σ und Satz 2 und wegen H-Lemma 2 gilt

$$f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \cdot f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_{B\setminus K} + \varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi)$$

$$= f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \cdot f_B(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}})$$

$$= f_B(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) \cdot f_{B\setminus K}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_{B\setminus K} + \varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) dQ(\psi).$$

Falls die Integrale ungleich 0 sind, gilt damit die Behauptung (a), falls die Integrale gleich 0 sind, gilt wegen H-Lemma 2 sowohl $f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) = 0$ als auch $f_B(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) = 0$; damit gilt die Behauptung (a) auch in diesem Fall.

(b) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$ gilt für $(Q \times P)$—fast alle (φ, μ) unter der Voraussetzung $f_B(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) > 0$

$$v(\varphi_{B\setminus K}, \varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}}) = -\log\,[f_{B\setminus K}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}/f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K} + \mu_{\overline{B}})]:$$

Beweis. Sei $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$, dann gilt wegen Lemma 10 für $(Q \times P)$-fast alle (φ, μ)

$$(\varphi_{B\setminus K}, \mu_{\overline{B\setminus K}}) \in L_0 \text{ ung } v(\varphi_{B\setminus K}, \mu_{\overline{B\setminus K}}) = -\log\left(f_{B\setminus K}(\varphi_{B\setminus K}+\mu_{\overline{B\setminus K}})/f_{B\setminus K})\right]$$

und damit wegen H-Lemma 5 unter der Voraussetzung $f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})>0$ $(\varphi_{B\setminus K}, \varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}}) \in L_0$ und

$$v(\varphi_{B\setminus K}, \varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}}) = -\log\left[f_{B\setminus K}+\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})\right],$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

(c) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$ gilt $(Q\times P)$-fast alle (φ, μ) unter der Voraussetzung $f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})>0$

$$v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = v(\varphi_{B\cap K}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_{B\setminus K}, \varphi_{B\cap K}+\mu_B):$$

Beweis. Für $(Q\times P)$-fast alle (φ, μ) gilt wegen Lemma 5

$$v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = -\log\left[f_B(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})/f_B(\mu_B)\right].$$

Wegen Q erfüllt Σ und Satz 2 gilt für $(Q\times P)$-fast alle (φ, μ) wegen Lemma 5

$$v(\varphi_{B\cap K}, \mu_{\overline{B}}) = -\log\left[f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu)/f_B(\mu_{\overline{B}})\right]$$

und wegen Hilfslemma 2

$$f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}}) = f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap R}+\mu_{\overline{B}}) \int_N f_B(\psi_{B\setminus K}+\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})\,dQ(\psi),$$

woraus unter der Voraussetzung $f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})>0$ folgt, daß $f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})>0$ ist.

Damit gilt wegen (a) und Hilfslemma 3

$$\frac{f_B(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} = \frac{f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})}{f_B(\mu_{\overline{B}})} \cdot \frac{f_{B\setminus K}(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})}{f_{B\setminus K}(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})}$$

und damit wegen (b) die Behauptung.

(d) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$ gilt

$$(Q\times P)\left(\{(\varphi, \mu) \mid f_B(\varphi_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}}) = 0 \longrightarrow f_B(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})=0\}\right)=1:$$

Beweis. Für alle $B \in \boldsymbol{B}$ gilt wegen $P \overset{l}{\gg} Q$

$$P(\{\mu \mid f_B(\mu)=0\}) = \int_N i_{\{\mu \mid f_B(\mu)=0\}}(\chi)\,dP(\chi)$$

$$= \int_N \int_N i_{\{\mu \mid f_B(\mu)=0\}}(\varphi_B+\chi_{\overline{B}})\,f_T(\varphi_B+\chi_{\overline{B}})\,dQ(\varphi)\,dP(\chi)=0$$

und damit wegen Satz 2 für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$

$$0 = P(\{\mu \mid f_B(\mu_{\overline{B\setminus K}})=0\}) = \int_N i_{\{\mu \mid f_B(\mu_{\overline{B\setminus K}})=0\}}(\chi)\,dP(\chi)$$

$$= \int_N \int_N i_{\{\mu \mid f_B(\mu_{\overline{B\setminus K}})=0\}}(\varphi_B+\chi_{\overline{B}})\,f_B(\varphi_B+\chi_{\overline{B}})\,dQ(\varphi)\,dP(\chi),$$

woraus $(Q\times P)(\{(\varphi, \mu) \mid f_B(\varphi_B+\mu_{\overline{B}})>0,\ f_B(\varphi_{B\cap K}+\mu_{\overline{B}})=0\})=0$ folgt, was gleichbedeutend mit der Behauptung ist.

(e) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $K \in \boldsymbol{K}$ gilt für $(Q \times P)$—fast alle (φ, μ) unter der Voraussetzung $f_B(\varphi_{B \cap K} + \mu_{\overline{B}}) = 0$ einerseits wegen Lemma 5, Q erfüllt Σ, Satz 4 und Lemma 6

$$v(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}}) = -\log [f_B(\varphi_{B \cap K} + \mu_{\overline{B}}/f_B(\mu_{\overline{B}})] = \infty$$

und andererseits wegen (d) $f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) = 0$ und damit wegen Lemma 5 und Lemma 6 $v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = -\log [f_B(\varphi_B + \mu_{\overline{B}})/f_B(\mu_{\overline{B}})] = \infty$,

woraus wegen $v > -\infty$ $v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = \infty = v(\varphi_{B \cap K}, \mu_{\overline{B}}) + v(\varphi_{B \setminus K}, \varphi_{B \cap K} + \mu_{\overline{B}})$ folgt.

(f) Für alle $B \in \boldsymbol{B}$, $\varphi \in N$ und alle $\varphi_1, \varphi_2 \in N_B$ mit disjunktem Träger und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_B$ existiert ein $K \in \boldsymbol{K}$, sodaß $\varphi_1 = \varphi_{B \cap K}$ und $\varphi_2 = \varphi_{B \setminus K}$, damit folgt die Behauptung des Lemmas unmittelbar aus (c), (e) und der Abzählbarkeit von $\boldsymbol{K}$.

Lemma 8. *Ist $P \in g(Q, v)$ und $A \in \boldsymbol{N}$, dann gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$*

$$P(A) = 1 \Rightarrow (Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) = \infty \text{ oder } (\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1.$$

Beweis. Sei $P(A) = 1$, dann gilt wegen Satz 1 (DLR-Gleichung)

$$0 = P(CA) = \int_N \int_N \exp(-v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}})) \boldsymbol{Z}(v, B, \mu)^{-1} \cdot i_{CA}(\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) dQ(\varphi) dP(\mu),$$

woraus sich

$$(Q \times P)(\{(\varphi, \mu) \mid v(\varphi_B, \mu_{\overline{B}}) < \infty \text{ und } (\varphi_B + \mu_{\overline{B}}) \in CA\}) = 0$$

ergibt, was gleichbedeutend mit der Behauptung ist.

Lemma 9. *Ist $P \in \boldsymbol{g}(Q, v)$ und $A \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, dann gilt für alle $B \in \boldsymbol{B}$*

$$(Q \times P)(\{(\psi, \mu) \mid \psi_B, \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1 \Rightarrow P(\{\mu \mid (\mu_B, \mu_{\overline{B}}) \in A\}) = 1.$$

Beweis. Angenommen $P(\{\mu \mid (\mu_B, \mu_{\overline{B}}) \in A\}) < 1$, dann gilt wegen Satz 1 (DLR-Gleichung) für alle $B \in \boldsymbol{B}$

$$0 < P(\{\mu \mid (\mu_B, \mu_{\overline{B}}) \notin A\})$$

$$= \int_N \int_N \exp(-v(\psi_B, \chi_B)) \boldsymbol{Z}(v, B, \chi)^{-1} i_{\{\mu \mid (\mu_B, \mu_{\overline{B}}) \notin A\}} (\psi_B + \chi_B) dQ(\psi) dP(\chi),$$

woraus

$$\int_N \int_N i_{\{\mu \mid (\mu, \mu_{\overline{B}}) \notin A\}} (\psi_B + \chi_B) dQ(\psi) dP(\chi) > 0$$

folgt, was gleichbedeutend mit $(Q \times P)(\{(\psi, \mu) \mid (\psi_B, \mu_{\overline{B}}) \notin A\} > 0$ ist. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

LITERATUR

1. Р. Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. *Функц. анализ и его прилож.*, 2, 1968, № 4, 31—43.
2. H. O. Georgii. Canonical and grand canonical Gibbs states for continuous systems. *Communs Math. Phys.*, 48, 1976, 31—51.
3. E. Glötzl. On the singularity of Σ point processes. erscheint in *Math. Nachr.*

4. E. Glötzl. Gibbsian description of point processes erscheint in *Proceedings of the Colloquium on Point Processes and Queuing Theory of the Bolyai Janos Mathematical Society*, Sept. 1978. Keszthely.
5. E. Glötzl. Bemerkungen zu einer Arbeit von O. K. Kozlov, erscheint in *Math. Nachr.*
6. E. Glötzl. Lokale Energien und Potentiale für Punktprozesse, erscheint in *Math. Nachr.*
7. O. Kallenberg. Random measures. Berlin, 1975.
8. O. Kallenberg. On conditional intensities of point processes. Preprint, Göteborg (1976).
9. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecce. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974
10. J. F. C. Kingmann. Completely random measures. *Pacif. J. Math.*, **21**, 1967, 59—78.
11. О. К. Козлов. Гиббсовское описание точечных случайных полей. *Теория вероятностей, ее применения*, **21**, 1976, 348—365.
12. O. E. Lanford, D. Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communs Math. Phys.*, **13**, 1969, 194—215.
13. K. Matthes, J. Warmuth, J. Mecee. Bemerkungen zu einer Arbeit von X. X. Nguyen und H. Zessin, erscheint in *Math. Nachr.*
14. X. X. Nguyen, H. Zessin. Integral and differential characterisations of Gibbs Process. *Math. Nachr.* (im Druck).
15. F. Papangelou. The conditional intensity of general point processes and an application to line processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete*, **28**, 1974, 207—226.
16. C. Preston. Random Fields. Lecture Notes in math., **534**. Berlin, 1976.
17. B. Rauchenschwandtner. Gibbsprozesse und Papangelou-Kerne. Dissertation, Linz, 1978.

Mathematisches Institut
J. Kepler Universität Linz
A-4045 Linz DDR

Eingegangen am 21. 11. 1979