Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

АСЕН Л. ДОНЧЕВ

Рассматривается конечно-разностная аппроксимация выпуклых задач оптимального управления при наличии интегральных ограничений типа неравенств и равенств. Предлагаются условия, обеспечивающие сходимость приближенного оптимального управления к оптимальному управлению исходной задачи.

1. В работе [1] исследовалась разностная аппроксимация выпуклой задачи оптимального управления с ограничениями локального типа. В настоящей работе продолжены исследования [1] для задачи с интегральными ограничениями. При этом используется подход, разработанный в [2], для исследования возмущенных экстремальных задач. Краткий обзор работ по дискретным аппроксимациям задач оптимального управления представлен в [1].

Важную роль в исследованиях возмущенных (параметрических) экстремальных задач с ограничениями имеют условия регулярности. Хейгером [3] впервые было предложено условие регулярности активных ограничений, обеспечивающее оценивание множителей Лагранжа при помощи прямых переменных. Это условие существенно используется в [1; 4] для получения оценки порядка сходимости разностной аппроксимации. Условие подобного типа формулируется в [2] для общей экстремальной задачи с конечным числом ограничений в виде неравенств и равенств. Там также показано, что для задачи с фиксированным конечным состоянием это условие соответствует управляемости системы.

В п. 2 настоящей работы рассматривается задача с конечным числом интегральных ограничений в виде неравенств. Формулируются условия регулярности, обеспечивающие точный порядок равномерной сходимости оптимального управления. В п. 3 этот результат распространяется на задачу с фиксированным правым концом траектории.

2. Вводим обозначения:

$L_2^n(0, 1)$ — пространство суммируемых с квадратом функций на интервале $[0, 1]$ со значениями из эвклидового пространства R^n, в котором задано обычное скалярное произведение;

$H_2^m(0, 1)$ — пространство абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$, с значениями из R^m, производные которых принадлежат $L_2^m(0, 1)$, с скалярным произведением

$$\langle x,\ y\rangle = x^T(1)\, y(1) + \int_0^1 \dot{x}^T(t)\, \dot{y}(t) dt,$$

где T обозначает транспонирование;

$\|\cdot\|_z$ — норма в функциональном пространстве типа z;

$|\cdot|$ — эвклидовая норма;

Рассматривается следующая задача (Γ): найти функции $\hat{u} \in L_2^n(0, 1)$ и $\hat{x} \in H_2^m(0, 1)$, которые минимизируют функционал

(1) $$J(x, u) = \int_0^1 f(x(t), u(t), t)\, dt$$

при наличии ограничений

(2) $$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ для почти всех } t \in [0, 1],\ x(0) = x^0,$$

(3) $$\int_0^1 \varphi(x(t), u(t), t)dt \leq 0.$$

Здесь матрицы $A(t)$, $B(t)$ размерности $m \times m$ и $m \times n$, соответственно значения функции φ, принадлежат R^p.

Розобьем отрезок $[0, 1]$ на N участков точками $t_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = 1/N$. Будем рассматривать конечномерную задачу (Γ_N), полученную из (Γ) при помощи схемы интегрирования Эйлера: найти векторы $(\hat{u}_0^N, \ldots, \hat{u}_{N-1}^N)$ и $(\hat{x}_1^N, \ldots, \hat{x}_N^N)$, которые минимизируют функционал

(4) $$J_N(x, u) = \sum_{i=1}^{N-1} h f(x_i, u_i, t_i)$$

при условиях

(5) $$x_{i+1} = (I + hA_i)x_i + hB_iu_i, \quad i = 0, \ldots, N-1,\ x_0 = x^0,$$

(6) $$\sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(x_i\ u_i,\ t_i) \leq 0,$$

где I — единичная матрица размерности $m \times m$, $A_i = A(t_i)$, $B_i = B(t_i)$.

В дальнейшем дискретное оптимальное управление $\hat{u}^N$ как и все остальные дискретные переменные рассматриваются как кусочно-постоянные непрерывные слева функции времени на интервале $[0, 1]$.

Задачу (Γ) будем рассматривать при следующих предположениях:

1°. Матрицы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условию Липшица на интервале $[0, 1]$.

2°. Функции f, φ выпуклы и дважды дифференцируемы по (x, u) на $R^{m+n} \times [0, 1]$; f и φ непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими первыми производными по x и u на $R^{m+n} \times [0, 1]$ и производные $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial u} f$, $\frac{\partial}{\partial x} \varphi$, $\frac{\partial}{\partial u} \varphi$ удовлетворяют условию Липшица по t при $t \in [0, 1]$ и при (x, u), принадлежащим некоторому ограниченному множеству из R^{m+n}. Существует постоянное $\alpha > 0$ такое, что

$$\binom{x}{u}^T \left[\frac{\partial^2}{\partial (x, u)^2} f(x, u, t)\right]\binom{x}{u} \geq \alpha |u|^2,$$

для всех $x \in R^m$, $u \in R^n$, $t \in [0, 1]$.

3°. Существует непрерывная функция $\bar{u}$ и постоянное $\beta < 0$, такие, что

$$\int_0^1 \varphi_j(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)dt < \beta$$

для всех $j=1, \ldots, p$, где $\bar{x}$ — траектория, соответствующая $\bar{u}$.

Функционал Лагранжа для задачи (Γ) имеет вид

$$L(x, u, p, \lambda) \tag{7}$$

$$= J(x, u) + \int_0^1 p^T(t)(\dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t))dt + \lambda^T \int_0^1 \varphi(x(t), u(t), t)dt,$$

где $p \in L_2^m(0, 1)$, $\lambda \in R^p$, $\lambda \geqq 0$.

Лемма 2.1. *Существует оптимальное управление $\hat{u}$, которое удовлетворяет условию Липшица на интервале* $[0, 1]$. *Существуют множители Лагранжа $\hat{p}$, $\hat{\lambda}$, такие, что*

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min\{L(x, u, \hat{p}, \hat{\lambda}),\ x \in H_2^m(0, 1),\ x(0) = x^0,\ u \in L_2^n(0, 1)\}, \tag{8}$$

и $\hat{p}$ удовлетворяет условию Липшица на $[0, 1]$. *Для всех $t \in [0, 1]$ выполнены соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) - B^T(t)\hat{p}(t) - \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)^T \hat{\lambda} = 0, \tag{9}$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = -A^T(t)\hat{p}(t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)^T \hat{\lambda}, \tag{10}$$

$$\hat{p}(1) = 0,$$

где оптимальное состояние $\hat{x}(t)$ соответствует управлению $\hat{u}$ и *имеет липшицову производную на* $[0, 1]$. *Выполнено условие дополняющей нежесткости*

$$\hat{\lambda}^T \int_0^1 \varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)dt = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Функционал $J_1(u) = J(x_u, u)$ сильно выпуклый и минимизируется на выпуклом и замкнутом множестве из $L_2^n(0, 1)$. Следовательно, существует единственное решение задачи (Γ). Соотношения (8) и (11) следуют из теории двойственности выпуклых экстремальных задач — см. [5, с. 317].

Дифференцируя функционал Лагранжа (7) по x и u, получаем, что (9) и (10) выполнены для почти всех $t \in [0, 1]$ и $\hat{p} \in H_2^m(0,1)$. Функция Гамильтона задана следующим образом:

$$H(u, t) = -f(\hat{x}(t), u, t) + \hat{p}^T(t)B(t)u - \varphi(\hat{x}(t), u, t)^T \hat{\lambda}.$$

Она сильно вогнута по u равномерно по t на $[0, 1]$. Оптимальное управление удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial}{\partial u} H(\hat{u}(t), t) = 0 \tag{12}$$

для почти всех $t \in [0, 1]$. Из неравевства

$$\alpha |\hat{u}(t) - \bar{u}(t)| \leq \left|\frac{\partial}{\partial u} H(\bar{u}(t), t)\right|$$

следует, что $\widehat{u} \in L^n_\infty(0, 1)$. Тогда можно доопределить функцию $\widehat{u}$ на множестве нулевой меры таким образом, что (9) было выполнено для всех $t \in [0, 1]$ — см. приложение В в [3]. Принадлежность функции $\widehat{u}$ классу Липшица доказывается как в работе [1]. Соответствующие функции $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ из (2) и (10) имеют липшицовые производные на интервале $[0, 1]$.

Функционал Лагранжа для задачи (Γ_N) имеет вид

$$L_N(x, u, p^N, \lambda^N) = J_N(x, u) + \sum_{i=0}^{N-1} (p_i^N)^T (x_{i+1} - (I + hA_i)x_i - hB_i u_i)$$

$$+ (\lambda^N)^T \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(x_i, u_i, t_i),$$

где $p^N \in R^{Nm}$, $\lambda^N \in R^p$, $\lambda^N \geqq 0$.

Из предположений 2°, 3° и из теории выпуклого программирования непосредственно следует

Лемма 2.2. *Существует постоянное $h_0 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_0)$ существует единственное решение $(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N)$ задачи (Γ_N) и множители Лагранжа $(\widehat{p}^N, \widehat{\lambda}^N)$ такие, что*

$$J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N) = \min\{L_N(x, u, \widehat{p}^N, \widehat{\lambda}^N), x \in R^{Nm}, x_0 = x^0, u \in R^{Nm}\}. \tag{13}$$

Выполнены соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i) - B_i^T \widehat{p}_i^N + \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i)^T \widehat{\lambda}^N = 0, \tag{14}$$

$$\widehat{p}_{i-1}^N = (I + hA_i^T)\widehat{p}_i^N - h\frac{\partial}{\partial x} f(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i) - h\frac{\partial}{\partial x} \varphi(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i)^T \widehat{\lambda}^N, \tag{15}$$

$$\widehat{p}_{N-1}^N = 0,$$

$$(\widehat{\lambda}^N)^T \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i) = 0. \tag{16}$$

В дальнейшим будем предполагать, что $h \in (0, h_0)$. Все постоянные, которые не зависят от N, обозначены через c_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Лемма 2.3. *Последовательности $\{J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N)\}$ и $\{\|\widehat{u}^N\|_{L_2}\}$ ограничены при $N \to +\infty$. Справедлива оценка*

$$\|\widehat{x}^N - \widehat{x}\|_C \leqq c_1(\|\widehat{u}^N - \widehat{u}\|_{L_2} + h). \tag{17}$$

Доказательство проводится как доказательство леммы 3.1 в [1].

Лемма 2.4. *Последовательности $\{\|\widehat{u}^N\|_C\}$, $\{\|\widehat{p}^N\|_C\}$, $\{\|\widehat{\lambda}^N\|\}$ ограничены при $N \to +\infty$.*

Доказательство. Для достаточно больших N имеем

$$\max_{1 \leqq j \leqq p} \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi_j(x_i^N, u_i^N, t_i) \leqq \beta/2,$$

где $\bar{u}^N$ — кусочно-постоянная аппроксимация управления $\bar{u}$, а $\bar{x}^N$ — соответствующая дискретная траектория.
Тогда, используя соотношения

$$J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N) \leq L_N(\bar{x}^N, \bar{u}^N, \widehat{p}^N, \widehat{\lambda}^N) = J_N(\bar{x}^N, \bar{u}^N) + (\widehat{\lambda}^N)^T \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(\bar{x}_i^N, \bar{u}_i^N, t_i),$$

получаем

$$0 \geq \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j^N \geq J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N) - J_N(\bar{x}^N, \bar{u}^N).$$

Из этого неравенства и из леммы 2.3 следует, что последовательность $\{\|\widehat{\lambda}^N\|\}$ ограчичена. Для доказательства равномерной ограниченности $\{\widehat{p}_i^N\}$ достаточно воспользоваться уравнением (15), леммой 2.3 и леммой Гроноулла. Функция Гамильтона для задачи (Γ_N) имеет вид

$$H_N(u, t_i) = -f(\widehat{x}_i^N, u, t_i) + (\widehat{p}_i^N)^T B_i u - \varphi(\widehat{x}_i^N, u, t_i)^T \widehat{\lambda}^N.$$

Равенство (14) записывается как

$$\frac{\partial}{\partial u} H_N(\widehat{u}_i^N, t_i) = 0. \tag{18}$$

Ограниченность последовательности $\{\|\widehat{u}^N\|_C\}$ следует из сильной вогнутости $H_N(\cdot, t_i)$ — см. лемму 4.1 в [2].

Лемма 2.5. *Справедлива оценка*

$$\|\widehat{x}^N - \widehat{x}\|_C + \|\widehat{u}^N - \widehat{u}\|_{L_2} \leq c_2 h^{1/2}. \tag{19}$$

Доказательство. Используется идея доказательства предложения 3.1 из [2]. Поскольку $\widehat{x}$, $\widehat{p}$ и $\widehat{u}$ удовлетворяют условию Липшица, имеем

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} |\widehat{x}(t_{i+1}) - (I + hA_i)\widehat{x}(t_i) - hB_i\widehat{u}(t_i)| \leq c_3 h^2, \tag{20}$$

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} \Big|\widehat{p}(t_{i-1}) - (I + hA_i^T)\widehat{p}(t_i) + h\frac{\partial}{\partial x} f(\widehat{x}(t_i), \widehat{u}(t_i), t_i) \tag{21}$$

$$+ h\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\widehat{x}(t_i), \widehat{u}(t_i), t_i)^T\widehat{\lambda}\Big| \leq c_4 h^2.$$

Используя соотношения (10), (15), леммы 2.3 и 2.4 и лемму Гроноулла, получаем

$$\|\widehat{p}^N - \widehat{p}\|_C \leq c_5(\|\widehat{u}^N - \widehat{u}\|_{L_2} + \|\widehat{\lambda}^N - \widehat{\lambda}\| + h). \tag{22}$$

Из условия (13) следует

$$J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N) \leq L_N(\widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}^N, \widehat{\lambda}^N) \tag{23}$$

$$= J_N(\widehat{x}, \widehat{u}) + \sum_{i=0}^{N-1} (\widehat{p}_i^N)^T (\widehat{x}(t_{i+1}) - (I + hA_i)\widehat{x}(t_i) - hB_i\widehat{u}(t_i))$$

$$+(\hat{\lambda}^N)^T \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(\hat{x}(t_i),\ \hat{u}(t_i),\ t_i).$$

Далее, используя предположение 2° и (9), имеем

$$J_N(\hat{x}^N,\ \hat{u}^N) \geqq L_N(\hat{x}^N,\ \hat{u}^N,\ \hat{p},\ \hat{\lambda}) \tag{24}$$

$$\geqq J_N(\hat{x},\ \hat{u}) + \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{p}(t_i))^T (\hat{x}(t_{i+1}) - (I+hA_i)\hat{x}(t_i)$$

$$-hB_i\hat{u}(t_i)) + \hat{\lambda}^T \sum_{i=0}^{N-1} h\varphi(\hat{x}(t_i),\ \hat{u}(t_i),\ t_i)$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1} (\hat{p}(t_{i-1}) - (I+hA_i)^T p(t_i) - h\frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}(t_i),\ \hat{u}(t_i),\ t_i)$$

$$-h\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\hat{x}(t_i),\ \hat{u}(t_i),\ t_i)^T)\hat{\lambda})^T (\hat{x}_i^N - \hat{x}(t_i))$$

$$+\alpha \sum_{i=0}^{N-1} h\,|\hat{u}_i^N - \check{u}(t_i)|^2.$$

Складывая (23) и (24) и учитывая (17), (20) и (21), получаем

$$\|\hat{u}^N - \hat{u}\|_{L_2}^2 \leqq c_6 h(\|\hat{u}^N - \hat{u}\|_{L_2} + |\hat{\lambda}^N - \hat{\lambda}| + h). \tag{25}$$

Из этого неравенства леммы 2.4 и оценки (17) следует (19).

Замечание 2.1. Схему доказательства оценки (19) можно применить к задаче с дополнительным ограничением для управляющих переменных $u(t) \in \Omega$, где Ω — выпуклое и замкнутое множество из R^n.

Обозначим через ψ множество активных ограничений задачи (Γ):

$$\psi = \{j,\ j \in \{1,\ldots,p\},\ \int_0^1 \varphi_j(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t),\ t)dt = 0\}.$$

Лемма 2.6. *Существует* $h_1 \in (0,\ h_0)$ *такое, что для всех* $h \in (0,\ h_1)$ *и для всех* $j \in \{1,\ldots,p\} \setminus \psi$, $\hat{\lambda}_j^N = 0$.

Доказательство проводится как доказательство леммы 3.2 из [2].

Этот результат обозначает, что для достаточно малого h множество активных ограничений задачи (Γ) будет содержать в себе множество активных ограничений задачи (Γ_N). В дальнейшем $h \in (0,\ h_1)$. Тогда без потери общности можно принять, что $\varphi = \{1,\ldots,p\}$.

Пусть $\Phi(t,\ \tau)$, $t \geqq \tau$, — фундаментальное матричное решение однородного уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Введем обозначения

$$\hat{\varphi}_u(t) = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t),\ t)^T,\quad \hat{\varphi}_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t),\ t)',$$

$$M_1 = \int_0^1 \hat{\varphi}_u(t)^T \hat{\varphi}_u(t)dt,\qquad \Theta(t) = \int_1^t \Phi^T(t,\ \tau)\,\hat{\varphi}_x(\tau)d\tau,$$

$$K(t) = \hat{\varphi}_u(t) - B^T(t)\Theta(t),\qquad M_2 = \int_0^1 K^T(t)K(t)dt.$$

В дальнейшем предполагается, что выполнено одно из следующих предположений:

4A. Существует число $\gamma_0>0$ такое, что для всех $z\in R^p$, $t\in[0,\ 1]$ $|\widehat{\varphi}_u(t)z|\geq\gamma_0|z|$.

4B. Существует число $\gamma_1>0$ такое, что для всех $z\in R^p$

$$(z^T M_1 z)^{1/2}\geq\gamma_1|z|,\ \gamma_1>\exp(\|A\|_C)\|B\|_{L_2}\|\widehat{\varphi}_x\|_{L_1}.$$

4C. Существует число $\gamma_2>0$ такое, что для всех $z\in R^p$ $(z^T M_2 z)^{1/2}\geq\gamma_2|z|$.

Лемма 2.7. *Справедлива оценка*

$$|\widehat{\lambda}^N-\widehat{\lambda}|\leq c_7(\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_{L_2}+h). \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим: $\Delta u=\widehat{u}^N-\widehat{u}$, $\Delta x=\widehat{x}^N-\widehat{x}$, $\Delta p=\widehat{p}^N-p$, $\Delta\lambda=\widehat{\lambda}^N-\widehat{\lambda}$.

Пусть выполнено 4A. Тогда из (9) для $t=t_i$ и из (14), используя леммы 2.3 и 2.4, имеем

$$\gamma_0|\Delta\lambda|\leq c_8(|\Delta x(t_i)|+|\Delta u(t_i)|+|\Delta p(t_i)|). \tag{27}$$

Подобным образом из (15) и (21) получаем

$$\begin{aligned}|\Delta p)t_{i-1})|&\leq(1+h\|A\|_C|\Delta p(t_i)|\\&\quad+c_9h(|\Delta x(t_i)|+|\Delta u(t_i)|+|\Delta\lambda|+h),\\|\Delta p(t_{N-1})|&\leq c_{10}h.\end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя (27) в (28) и используя лемму 2.3 и лемму Гроноулла, заключаем, что

$$\max_{0\leq i\leq N-1}|\Delta p(t_i)|\leq c_{11}(\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_{L_2}+h). \tag{29}$$

Из этого неравенства, леммы 2.3 и из (27) непосредственно следует (26).

Пусть теперь выполнено 4B. Введем матрицу

$$M_1^N=\sum_{i=0}^{N-1}h\,\widehat{\varphi}_u(t_i)^T\,\widehat{\varphi}_u(t_i).$$

Поскольку $M_1^N\to M_1$ при $N\to+\infty$, то выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малое при больших N, получаем $(\Delta\lambda^T M_1^N\Delta\lambda)^{1/2}\geq(\gamma_1-\varepsilon)|\Delta\lambda|\geq\exp(\|A\|_C)\|B\|_{L_2}\|\widehat{\varphi}_x\|_{L_1}|\Delta\lambda|$. Тогда из (9) и (14), используя неравенство Минковского и леммы 2.3 и 2.4, имеем

$$(\gamma_1-\varepsilon)|\Delta\lambda|\leq c_{12}(\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_{L_2}+h)+\|B\|_{L_2}\max_{0\leq i\leq N-1}|\Delta p(t_i)|. \tag{30}$$

Из соотношений (16) и (21), леммы 2.3 и леммы Гроноулла следует

$$\max_{0\leq i\leq N-1}|\Delta p(t_i)|\leq(1+h\|A\|_C)^N(c_{13}(\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_{L_2}+h)+\|\widehat{\varphi}_x\|_{L_2}|\Delta\lambda|).$$

Учитывая (30) и условие 4B, получаем (29).

Предположим теперь, что выполнено 4C. Пусть $\Phi^N(t_i, \tau_j)$ — фундаментальное матричное решение уравнения $x_{i+1}=(I+hA_i)x_i$ Обозначим:

$$\widehat{\varphi}_u^N(t_i)=\frac{\partial}{\partial u}\varphi(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i)^T, \qquad \widehat{\varphi}_x^N(t_i)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i)^T,$$

$$\Theta_i^N=\sum_{j=N-1}^{i}h\Phi^N(t_i, \tau_j)^T\,\widehat{\varphi}_x^N(\tau_j),\ K_i^N=\widehat{\varphi}_u^N(t_i)-B_i^T\Theta_i^N.$$

Введем новые переменные $q(t)=\Theta(t)\widehat{\lambda}-\widehat{p}(t)$, $q_i^N=\Theta_i^N\lambda^N-\widehat{p}_i^N$. Тогда соотношения (9), (10), (14) и (15) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial u}f(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t)+B^T(t)q(t)+K(t)\widehat{\lambda}=0, \tag{31}$$

$$\dot{q}(t)=-A^T(t)q(t)-\frac{\partial}{\partial x}f(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t),\ q(1)=0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}f(\widehat{x}_i^N, \widehat{u}_i^N, t_i)+B_i^Tq_i^N+K_i^N\lambda^N=0, \tag{33}$$

$$q_{i-1}^N=(I+hA_i^T)q_i^N+h\frac{\partial}{\partial x}f(\widehat{x}_i^N, u_i^N, t_i) \tag{34}$$

$$-h^2A_i^T\,\widehat{\varphi}_x^N(t_i)\,\widehat{\lambda}^N,\ q_{N-1}^N=h\widehat{\varphi}_x^N(t_{N-1})\widehat{\lambda}^N.$$

Сравнивая (31) с (33) и (32) с (34) и следуя доказательствам прежних двух случаев, получаем (26).

Теорема 2.1. *Существуют постоянное c_{14} и число $h_2\in(0, h_1)$ такое, что для $h\in(0, h_2)$*

$$\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_C\leq c_{14}h. \tag{35}$$

Доказательство. Подставляя (26) в (25), получаем $\|\widehat{u}^N-\widehat{u}\|_{L_2}\leq$ $\leq c_{15}h$. Тогда из (17), (26) и (29) следует

$$\|\widehat{x}^N-\widehat{x}\|_C+\|\widehat{p}^N-\widehat{p}\|_C+|\widehat{\lambda}^N-\widehat{\lambda}|\leq c_{16}h. \tag{36}$$

Повторяя доказательство леммы 4.1 из [2], получаем $|\widehat{u}_i^N-\widehat{u}(t_i)|\leq c_{17}h$, $i=0, \ldots, N-1$, поскольку $\widehat{u}$ — липшицовая функция времени, из этой оценки следует (35).

Замечание 2.2. Полученная оценка точная, поскольку порядок $O(h)$ является точным для рассматриваемой схемы интегрирования. Заметим, что другие продолжения дискретных переменных, например ломаными, не повышает этот порядок сходимости.

Замечание 2.3. Числа γ_1 и γ_2 соответствуют минимальным собственным значениям матриц M_1 и M_2 соответственно. Если функция φ не зависит от x, тогда условие 4B эквивалентно условию $4C$ и включает в себя условие 4A. Из доказательства леммы 2.7 вытекает, что множители Лагранжа $(\widehat{p}, \widehat{\lambda})$ единственные и для достаточно малого h множители $(\widehat{p}^N, \widehat{\lambda}^N)$ также единственные.

3. Задача оптимального управления линейной системы с фиксированным правым концом траектории является естественным обобщением классической задачи вариационного исчисления. Покажем, что использованный в пре-

дыдущем параграфе подход приводит к оценке разностной аппроксимации этой задачи.

Рассматривается задача (Δ): найти функции $\widehat{u} \in L_2^n(0, 1)$ и $\widehat{x} \in H_2^m(0, 1)$, которые минимизируют функционал (1) при ограничениях (2) и при заданных значениях вектора состояния в конечном моменте времени

$$x(1) = x^1. \tag{37}$$

Это ограничение можно интерпретировать как интегральное ограничение типа равенства для управляющих переменных. Обозначим $P(t) = \Phi(1, t)B(t)$. Тогда (37) записывается в виде

$$\int_0^1 P(t)u(t)dt = x^1 - \Phi(1,0)x^0.$$

Дискретный аналог задачи (Δ) соостоит в минимизации (4) при условиях (5) и $x(t_N) = x^1$. Пусть $P_i^N = \Phi^N(t_N, t_i)B_i$. Тогда имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1} hP_i^N u_i = x^1 - \Phi^N(t_N, 0)x^0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия 1^0, 2^0 и 5^0: система (2) управляемая.

Лемма 3.1. *Существует $h_3 > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_3)$ система (5) управляемая.*

Доказательство. Из условия 5^0 следует, что матрица $M = \int_0^1 P(t)P^T(t)dt$ неособая — см [6]. Тогда для достаточно малого h матрица $M^N = \sum_{i=0}^{N-1} hP_i^N(P_i^N)^T$ также неособая. Управление $\widetilde{u}_i^N = (P_i^N)^T(M^N)^{-1}(x^1 - \Phi^N, (t_N, 0)x^0)$ является допустимым для произвольных точек x^0 и x^1.

Вводя функционалы Лагранжа подобным образом, как в п. 2, получаем

Лемма 4.2. *Справедливы все утверждения лемм* 2.1 *и* 2.2. *В соотношениях* (9), (10) *и* (14), (15) *будем иметь* $\frac{\partial}{\partial x}\varphi \equiv 0$ *и* $P^T(t)$, $(P_i^N)^T$ *вместо* $\frac{\partial}{\partial u}\varphi$.

Заметим, что множитель Лагранжа $\widehat{\lambda}$, соответствующий терминальному ограничению, единственный. В терминах [6] это обозначает, что существует единственная опорная гиперплоскость к множеству достижимости в точке $(J(\widehat{x}, \widehat{u}), x^1)$.

Теорема 3.1. *Существуют $h_4 > 0$ и c_{18}* такие, что для всех $h \in (0, h_4)$

$$\|\widehat{u}^N - \widehat{u}\|_C \leq c_{18}h. \tag{39}$$

Доказательство. Используя равномерную ограниченность последовательности $\{\widehat{u}^N\}$ и схему доказательства леммы 3.1 в [1], получаем, что последовательности $\{J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N)\}$ и $\{\|\widehat{u}^N\|_{L_2}\}$ ограничены и справедлива оценка (17). Предположим, что $|\widehat{\lambda}^N| \to +\infty$, когда $N \to +\infty$. Выберем последовательность управлений $\bar{\bar{u}}_i^N = -(P_i^N)^T(M^N)^{-1}\widehat{\lambda}^N / |\widehat{\lambda}^N|$, $i = 0, \ldots, N-1$. Тогда $\{\bar{\bar{u}}^N\}$ и последовательность соответствующих траекторий $\bar{\bar{x}}^N$ равномерно ограничены. Из соотношения $J_N(\widehat{x}^N, \widehat{u}^N) \leq L(\bar{\bar{x}}^N, \bar{\bar{u}}^N, \widehat{p}^N, \lambda^N)$ следует, что $|\widehat{\lambda}^N| \geq J(\widehat{x}, \widehat{u}^N) - J(\bar{\bar{x}}^N, \bar{\bar{u}}^N)$, т. е. последовательность $\{\widehat{\lambda}^N\}$ ограничена. Как в доказательстве леммы 2.4, показывается, что последовательности $\{\|\widehat{u}^N\|_C\}$ и $\{\|\widehat{p}^N\|_C\}$ ограничены. Следуя доказательству леммы 2.5, получаем оценки

$$\|\widehat{u}^N - \widehat{u}\|^2_{L_2} \leq c_{19} h(\|\widehat{u} - \widehat{u}\|_{L_2} + |\widehat{\lambda} - \widehat{\lambda}| + h), \quad \|\widehat{p}^N - \widehat{p}\|_C \leq c_{20} h(\|\widehat{u} - \widehat{u}\|_{L_2} + h).$$

Заметим, что матрица M соответствует матрице M_1 в п. 2. Условия 4В и 5⁰ эквивалентны. Это обозначает, что требование об управляемости системы является условием регулярности типа условия Хейгера — см. также теорему 5.2 в [2]. Следуя доказательству леммы 2.7 и теоремы 2.1, получаем оценку (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Dontchev, Error estimates for a discrete approximation to constrained control problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **18**, 1981.
2. A. L. Dontchev. Efficient estimates of the solutions of perturbed control problems. *J. Optim. Theory and Appl.*, **35**, 1981.
3. W. W. Hager. Lipschitz continuity for constrained processes. *SIAM J. Contr. and Optim.*, **17**, 1979.
4. K. Malanovski. On convergence of finite-difference approximations to control and state constrained convex optimal control problems. *Archiwum Aut. Telem.*, 24, 1979.
5. А. Д. Йоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. Москва, 1974.
6. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. Москва, 1972.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 28. I. 1980.