Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

P-РЕКУРСИВНОСТЬ В ИТЕРАТИВНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЛЮБОМИР Л. ИВАНОВ

В рабоге [7] Д. Скордев ввел понятие квазирекурсивности как обобщение понятия поисковой вычислимости (search computability) Я. Московакиса из [1]. В настоящей работе рассматривается частичная операция P в итеративном комбинаторном пространстве, при помощи которой вводится понятие P-рекурсивности, являющееся обобщением понятия квазирекурсивности. При некоторых предположениях показано, что для P-рекурсивности имеет место Первая теорема о рекурсии.

1. Пусть $\mathcal{S}=\langle \mathcal{F}, I, \mathcal{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F\rangle$ — итеративное комбинаторное пространство в смысле определения, данного в [8], $\mathcal{B}_0\subseteq\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$, $\boldsymbol{P}:\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}$ и если $\varphi\in\mathcal{F}_0$ и $\varphi=\psi$, то $\psi\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi)=\boldsymbol{P}(\psi)$. Пусть существуют такие рекурсивные относительно $\mathcal{B}_0$ отображения G_i, $i=0, 1, \ldots, 4$, что

(1) Для любых $\varphi, \psi\in\mathcal{F}_0$ имеем $G_i(\varphi, \psi)\in\mathcal{F}_0$, $i=0, 1, 2$, $\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi)=\boldsymbol{P}(G_0(\varphi, \psi))$, $(\boldsymbol{P}(\varphi), \boldsymbol{P}(\psi))=\boldsymbol{P}(G_1(\varphi, \psi))$, $[\boldsymbol{P}(\varphi), \boldsymbol{P}(\varphi)]=\boldsymbol{P}(G_2(\varphi, \psi))$,

(2) Для любого $\varphi\in\mathcal{F}$ имеет $G_3(\varphi)\in\mathcal{F}_0$ и $\varphi=\boldsymbol{P}(G_3(\varphi))$, для любого $\varphi\in\boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}_0)$ имеем $G_4(\varphi)\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi))=\boldsymbol{P}(G_4(\varphi))$.

Заметим, что если $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ и операция $\boldsymbol{P}$ однородна слева, то существование отображения G_4 вытекает из существования G_0. Действительно, пусть $G_4=\lambda\varphi\,.\,G_0(\varphi, I)$. Тогда $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi))=\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(I)=\boldsymbol{P}(G_0(\varphi, I))=\boldsymbol{P}(G_4(\varphi))$.

Заметим также, что в случае, когда отношение $=$ на $\mathcal{F}$ совпадает с отношением тождественности, мощность множества $\mathcal{F}_0$ равна мощности множества $\mathcal{F}$. Действительно, если $G_3(\varphi)=G_3(\psi)$, то $\boldsymbol{P}(G_3(\varphi))=\boldsymbol{P}(G_3(\psi))$, следовательно, $\varphi=\psi$. Таким образом, отображение G_3 из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_0$ инъективно. Поскольку $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$, то мощности обеих множеств одинаковы.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{S}'=\langle \mathcal{F}', I, \mathcal{C}', \Pi', L, R, \Sigma', T, F\rangle$ — итеративное комбинаторное пространство, $\mathcal{B}_0\subseteq\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$, если $\varphi\in\mathcal{F}'$ и $\varphi=\psi$, то $\psi\in\mathcal{F}'$, операции композиции и итерации в $\mathcal{S}'$, Π' и Σ' являются сужениями на $\mathcal{F}'$ соответствующих операций в $\mathcal{S}$ и $=$ совпадает с $='$ на $\mathcal{F}'$. Возьмем в качестве $\mathcal{B}'_0$, $\mathcal{F}'_0$, $\boldsymbol{P}'$ и G'_i соответственно $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{F}_0\cap\mathcal{F}'\cap\boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}')$, сужения $\boldsymbol{P}$ на $\mathcal{F}'_0$, G_i на $\mathcal{F}'\times\mathcal{F}'$ для $i=0, 1, 2$ и G_i на $\mathcal{F}'$ для $i=3, 4$. Тогда для $\boldsymbol{P}'$ будут исполнены* (1) *и* (2).

Доказательство. Для Π', Σ', композиции и итерации в $\mathcal{S}'$ будем употреблять те же самые обозначения, что и в $\mathcal{S}$. Отметим, что подмножество $\mathcal{F}'$ множества $\mathcal{F}$ замкнуто относительно операций композиции, Π, Σ и итерации в $\mathcal{S}$.

Пусть $\varphi, \psi\in\mathcal{F}'_0$. Поскольку $\mathcal{F}'_0\subseteq\mathcal{F}_0$ то $\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi)=\boldsymbol{P}(G_0(\varphi, \psi))$. Тогда из $\boldsymbol{P}(\varphi)$, $\boldsymbol{P}(\psi)\in\mathcal{F}'$ вытекает $\boldsymbol{P}(G_0(\varphi, \psi))\in\mathcal{F}'$, следовательно, $G_0(\varphi, \psi)\in\mathcal{F}'_0$, так как $G_0(\varphi, \psi)\in\mathcal{F}'\cap\mathcal{F}_0$. Следовательно, $G'_0(\varphi, \psi)\in\mathcal{F}'_0$ и $\boldsymbol{P}'(\varphi)\boldsymbol{P}'(\psi)=\boldsymbol{P}'(G'_0(\varphi, \psi))$.

Аналогичным образом рассуждаем о Π' и итерации в $\mathcal{S}'$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{F}'$. Поскольку $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, то $\varphi = \boldsymbol{P}(G_3(\varphi))$, следовательно, $\boldsymbol{P}(G_3(\varphi)) \in \mathcal{F}'$. Тогда $G_3(\varphi) \in \mathcal{F}'_0$, так как $G_3(\varphi) \in \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}'$. Следовательно, $G'_3(\varphi) \in \mathcal{F}'_0$ и $\varphi = \boldsymbol{P}'(G'_3(\varphi))$.

Пусть $\varphi \in \boldsymbol{P}'^{-1}(\mathcal{F}'_0)$. Поскольку $\boldsymbol{P}'^{-1}(\mathcal{F}'_0) \subseteq \boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi)) = \boldsymbol{P}(G_4(\varphi))$. Из $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}'_0$ вытекает $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi)) \in \mathcal{F}'$, следовательно, $\boldsymbol{P}(G_4(\varphi)) \in \mathcal{F}'$. Поскольку $G_4(\varphi) \in \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}'$, то $G_4(\varphi) \in \mathcal{F}'_0$, откуда заключаем, что $G'_4(\varphi) \in \mathcal{F}'_0$ и $\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{P}'(\varphi)) = \boldsymbol{P}'(G'_4(\varphi))$.

Следовательно, в $\mathcal{S}'$ исполнены (1) и (2). Легко проверяется, что отображения G'_i, $i = 0, 1, \ldots, 4$, рекурсивны относительно $\mathcal{B}'_0$ в $\mathcal{S}'$.

Этим предложение доказано.

Будем считать в дальнейшем, что дано некоторое подмножество $\mathcal{B}$ множества $\mathcal{F}$, такое, что $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть отображение Γ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ рекурсивно относительно $\mathcal{B}$. Тогда существует такое рекурсивное относительно $\mathcal{B}$ отображение Γ_2 из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, что $\forall \varphi (\varphi \in \mathcal{F}_0 \to \Gamma_2(\varphi) \in \mathcal{F}_0 \,\&\, \boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi)) = \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемое отображение Γ_2 построим индукцией относительно построения отображения Γ.

Если существует такой элемент ψ множества $\mathcal{B}$, что $\Gamma = \lambda\varphi\,.\,\psi$, то пусть $\Gamma_2 = \lambda\varphi\,.\,G_3(\psi)$. Тогда для $\varphi \in \mathcal{F}_0$ имеем $\Gamma_2(\varphi) \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi)) = \boldsymbol{P}(G_3(\psi)) = \psi = \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi))$.

Аналогичным образом поступаем, если $\Gamma = \lambda\varphi\,.\,L$ (соответственно $\lambda\varphi\,.\,R$, $\lambda\varphi\,.\,T$, $\lambda\varphi\,.\,F$).

Если $\Gamma = \lambda\varphi\,.\,\varphi$, то пусть $\Gamma_2 = \lambda\varphi\,.\,\varphi$. Тогда для $\varphi \in \mathcal{F}_0$ имеем $\Gamma_2(\varphi) \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi)) = \boldsymbol{P}(\varphi) = \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi))$.

Если $\Gamma = \lambda\varphi . \Gamma'(\varphi)\Gamma''(\varphi)$, то пусть $\Gamma_2 = \lambda\varphi\,.\,G_0(\Gamma'_2(\varphi), \Gamma''_2(\varphi))$, где отображения Γ'_2 и Γ''_2 являются соответствующими для Γ' и Γ''. Тогда для $\varphi \in \mathcal{F}$ имеем $\Gamma'_2(\varphi)$, $\Gamma''_2(\varphi) \in \mathcal{F}_0$, следовательно, $\Gamma_2(\varphi) \in \mathcal{F}_0$ и

$$\boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi)) = \boldsymbol{P}(G_0(\Gamma'_2(\varphi), \Gamma''_2(\varphi))) = \boldsymbol{P}(\Gamma'_2(\varphi))\boldsymbol{P}(\Gamma''_2(\varphi)) = \Gamma'(\boldsymbol{P}(\varphi))\Gamma''(\boldsymbol{P}(\varphi)) = \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)).$$

Аналогичным образом, используя G_1 и G_2, рассуждаем о Π и итерации. Из построения отображения Γ_2 видно, что оно рекурсивно относительно $\mathcal{B}$.

С л е д с т в и е 1.3. *Пусть отображение Γ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ рекурсивно относительно $\mathcal{B}$. Тогда существует такое рекурсивное относительно $\mathcal{B}$ отображение Γ_1 из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, что*

$$\forall \varphi (\varphi \in \mathcal{F}_0 \,\&\, \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)) \in \mathcal{F}_0 \to \Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{F}_0 \,\&\, \boldsymbol{P}(\Gamma_1(\varphi)) = \boldsymbol{P}(\Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)))).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ_2 — соответствующее для Γ отображение из предложения 1.2 и $\Gamma_1 = \lambda\varphi\,.\,G_4(\Gamma_2(\varphi))$. Отображение Γ_1 рекурсивно относительно $\mathcal{B}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}_0$ и $\Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)) \in \mathcal{F}_0$. Тогда $\boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi)) = \Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)) \in \mathcal{F}_0$, следовательно, $\Gamma_2(\varphi) \in \boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, следовательно, $\Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\Gamma_1(\varphi)) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\Gamma_2(\varphi))) = \boldsymbol{P}(\Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi)))$.

О п р е д е л е н и е. *Элемент φ будем называть $\boldsymbol{P}$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}$, если существует такой рекурсивный относительно $\mathcal{B}$ элемент χ, что $\varphi = \boldsymbol{P}(\chi)$.*

Из (1) и (2) вытекает, что рекурсивные операции и операция $\boldsymbol{P}$ сохраняют относительную $\boldsymbol{P}$-рекурсивность, а также то, что рекурсивные относительно $\mathcal{B}$ элементы являются $\boldsymbol{P}$-рекурсивными относительно $\mathcal{B}$.

О п р е д е л е н и е. *Отображение H из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ будем называть $\boldsymbol{P}$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}$, если существует такое рекурсивное относительно $\mathcal{B}$ отображение Γ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, что $H = \lambda\varphi\,.\,\boldsymbol{P}(\Gamma(\varphi))$.*

Предложение 1.4. *Пусть $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ и операция $\boldsymbol{P}$ однородна слева Тогда для любого $\boldsymbol{P}$-рекурсивного относительно $\mathcal{B}$ отображения H уравнение $\theta=H(\theta)$ обладает $\boldsymbol{P}$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}$ решением θ_0, таким, что если $H(\theta_1)\leq\theta_1$, то $\theta_0\leq\theta_1$.*

Доказательство. Поскольку $\forall\varphi \boldsymbol{P}(\varphi)=\varphi\boldsymbol{P}(I)$, то $\boldsymbol{P}$-рекурсивность относительно $\mathcal{B}$ эквивалентна рекурсивности относительно $\mathcal{B}\cup\{\boldsymbol{P}(I)\}$. Тогда отображение H рекурсивно относительно $\mathcal{B}\cup\{\boldsymbol{P}(I)\}$. Согласно Первой теореме о рекурсии [8] существует такой элемент θ_0, что $\theta_0=H(\theta_0)$, если $H(\theta_1)\leq\theta_1$, то $\theta_0\leq\theta_1$, и θ_0 рекурсивен относительно $\mathcal{B}\cup\{\boldsymbol{P}(I)\}$, следовательно, θ_0 $\boldsymbol{P}$-рекурсивен относительно $\mathcal{B}$.

Сформулируем некоторые дополнительные условия, которые могут быть наложены на $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}$.

(3) Любая возрастающая последовательность в $\mathcal{F}$ имеет точную мажоранту, операция композиции и все отображения вида $\lambda\theta.(\chi\supset I,\theta)$ счетно-непрерывны.

Если в $\mathcal{S}$ исполнено (3) и отображиние Γ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ рекурсивно относительно $\mathcal{B}$, то для $\varphi=\sup_n\Gamma^n(O)$, где $O=[I,F]$, имеем $\Gamma(\varphi)=\varphi$ и если $\Gamma(\psi)\leq\psi$, то $\varphi\leq\psi$. Это будет вытекать из счетно-непрерывного варианта теоремы Кнастера — Тарского, если мы удостоверимся, что рекурсивные относительно $\mathcal{B}$ отображения счетно-непрерывны. Для этого достаточно проверить, что операция итерации счетно-непрерывна, так как счетная непрерывность операции Π вытекает из счетной непрерывности композиции.

Пусть даны возрастающие последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, пусть $\varphi=\sup_n\varphi_n$ и $\psi=\sup_n\psi_n$. Докажем, что $[\varphi,\psi]=\sup_n[\varphi_n,\psi_n]$. Операция итерации монотонна, следовательно, последовательность $\{[\varphi_n,\psi_n]\}$ тоже возрастающая и обладает точной мажорантой τ. Если l большее чем m, n и k, то $(\psi_m\supset I,[\varphi_n,\psi_n]\varphi_k)\leq(\psi_l\supset I,[\varphi_l,\psi_l]\varphi_l)=[\varphi_l,\psi_l]\leq\tau$. Это имеет место для любого n, откуда, имея в виду счетную непрерывность композиции и отображения $\lambda\theta.(\chi\supset I,\theta)$, заключаем, что $(\psi_m\supset I,\tau\varphi_k)\leq\tau$ для любого k, следовательно, $(\psi_m\supset I,\tau\varphi)\leq\tau$. Тогда для любого m и любого $x\in\mathcal{C}$ имеем $(\psi_m x\supset x,\tau\varphi x)\leq\tau x$, следовательно, $(I\supset x,\tau\varphi x)\psi_m x\leq\tau x$. Отсюда и из счетной непрерывности композиции заключаем, что $(I\supset x,\tau\varphi x)\psi x\leq\tau x$, следовательно, $(\psi x\supset x,\tau\varphi x)\leq\tau x$. Следовательно, $(\psi\supset I,\tau\varphi)\leq\tau$. Однако $[\varphi,\psi]$ является минимальным решением неравенства $(\psi\supset I,\theta\varphi)\leq\theta$, следовательно, $[\varphi,\psi]\leq\tau$. Поскольку $\forall n[\varphi_n,\psi_n]\leq[\varphi,\psi]$, то $[\varphi,\psi]=\tau$, откуда следует, что итерация счетно-непрерывна по обоим аргументам.

Это следствие из (3) будем обозначать тоже через (3).

(4) $O\in\mathcal{F}_0$ и для любой возрастающей последовательности $\{\varphi_n\}$ в $\mathcal{F}_0$, если $\varphi=\sup_n\varphi_n$, то $\varphi\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi)=\sup_n\boldsymbol{P}(\varphi_n)$. Иначе говоря, множество $\mathcal{F}_0$ содержит элемент O и замкнуто относительно точных мажорант возрастающих последовательностей, а операция $\boldsymbol{P}$ счетно-непрерывна.

Покажем, что если исполнено (4), то операция $\boldsymbol{P}$ монотонна и $\boldsymbol{P}(O)=O$. Пусть $\varphi_0,\varphi_1\in\mathcal{F}_0$ и $\varphi_0\leq\varphi_1$. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{\varphi_n\}$, где $\forall n\varphi_{n+1}=\varphi_1$. Очевидно $\varphi_1=\sup_n\varphi_n$, следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi_1)=\sup_n\boldsymbol{P}(\varphi_n)$, следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi_0)\leq\boldsymbol{P}(\varphi_1)$. Согласно [8] $\forall\varphi O\leq\varphi$. Тогда $O\leq G_3(O)$, следовательно, $\boldsymbol{P}(O)\leq\boldsymbol{P}(G_3(O))=O$, следовательно, $\boldsymbol{P}(O)=O$.

Предложение 1.5. *Пусть в $\mathcal{S}$ исполнены* (3) *и* (4). *Тогда для любого $\boldsymbol{P}$-рекурсивного относительно $\mathcal{B}$ отображения H уравнение $\theta=H(\theta)$ обладает таким $\boldsymbol{P}$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}$ решением θ_0, что если $H(\theta_1)\leq\theta_1$, то $\theta_0\leq\theta_1$.*

Доказательство. Пусть $H=\lambda\varphi\,.\,\boldsymbol{P}(\Gamma(\varphi))$, где отображение Γ рекурсивно относительно $\mathcal{B}$, и пусть Γ_1 — соответствующее для Γ отображение из следствия 1.3. Тогда $\forall\varphi(\varphi\in\mathcal{F}_0\to\Gamma_1(\varphi)\in\mathcal{F}_0\,\&\,\boldsymbol{P}(\Gamma_1(\varphi))=\boldsymbol{P}(\Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi))))$.

Пусть $\varphi_n=\Gamma_1^n(O)$. Индукцией по n докажем, что $\forall n\,(\varphi_n\in\mathcal{F}_0\,\&\,\forall\,\theta_1\,(H(\theta_1)\leqq\theta_1\to\boldsymbol{P}(\varphi_n)\leqq\theta_1))$. Для $n=0$ это очевидно. Допустим, что утверждение исполнено для n. Тогда $\varphi_{n+1}=\Gamma_1(\varphi_n)\in\mathcal{F}_0$. Если $H(\theta_1)\leqq\theta_1$, то $\boldsymbol{P}(\varphi_{n+1})=\boldsymbol{P}(\Gamma_1(\varphi_n))=\boldsymbol{P}(\Gamma(\boldsymbol{P}(\varphi_n))\leqq\boldsymbol{P}(\Gamma(\theta_1))=H(\theta_1)\leqq\theta_1$.

Пусть $\varphi=\sup_n\varphi_n$. Тогда $\varphi\in\mathcal{F}_0$ и φ рекурсивен относительно $\mathcal{B}$, так как согласно (3) φ является минимальной неподвижной точкой отображения Γ_1. Следовательно, элемент $\theta_0=\boldsymbol{P}(\varphi)$ $\boldsymbol{P}$-рекурсивен относительно $\mathcal{B}$ и $\theta_0=\boldsymbol{P}(\varphi)=\boldsymbol{P}(\Gamma_1(\varphi))=H(\boldsymbol{P}(\varphi))=H(\theta)$. Если $H(\theta_1)\leqq\theta_1$, то $\theta_0=\boldsymbol{P}(\varphi)=\sup_n\boldsymbol{P}(\varphi_n)\leqq\theta_1$.

Этим предложение доказано.

Можно доказать, что заключение предложения 1.5 будет иметь место в случаях, когда любое вполне упорядоченное подмножество множества $\mathcal{F}$ имеет точную мажоранту и для любого вполне упорядоченного подмножества $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{F}_0$ (возможно, $\mathcal{E}=\varnothing$), если $\varphi=\sup\mathcal{E}$, то $\varphi\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi)=\sup\{\boldsymbol{P}(\psi):\psi\in\mathcal{E}\}$.

Если в $\mathcal{S}$ исполнено заключение предложения 1.4 (предложения 1.5) и в некотором его подпространстве $\mathcal{S}'$ операция $\boldsymbol{P}'$ введена при помощи предложения 1.1, мы хотели бы заключить, что упомянутое заключение имеет место и в $\mathcal{S}'$. В следующих трех предложениях рассмотрим некоторые случаи, когда это возможно.

Предложение 1.6. *Пусть в $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения 1.4 и любое вполне упорядоченное подмножество множества $\mathcal{F}$ имеет точную мажоранту. Пусть о $\mathcal{S}'$ сказано то же, что и в формулировке предложения 1.1, $\mathcal{B}'_0\subseteq\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{F}'$, $\leq$ совпадает с $\leq'$ на $\mathcal{F}'$ и для любого вполне упорядоченного подмножества $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{F}'$, если $\varphi=\sup\mathcal{E}$, то $\varphi\in\mathcal{F}'$. Тогда для любого $\boldsymbol{P}'$-рекурсивного относительно $\mathcal{B}'$ отображения H' из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$ уравнение $\theta=H'(\theta)$ обладает таким $\boldsymbol{P}'$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}'$ решением $\theta_0\in\mathcal{F}'$, что если $\theta_1\in\mathcal{F}'$ и $H'(\theta_1)\leqq\theta_1$, то $\theta_0\leqq\theta_1$.*

Доказательство. Пусть $\forall\varphi\in\mathcal{F}'H'(\varphi)=\boldsymbol{P}'(\Gamma'(\varphi))$, где отображение Γ' рекурсивно относительно $\mathcal{B}'$. Индукцией по рекурсивным относительно $\mathcal{B}'$ отображениям из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$ проверяем, что существует рекурсивное относительно $\mathcal{B}'$ отображение Γ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, которое совпадает с Γ' на множестве $\mathcal{F}'$. Пусть $\forall\varphi\in\mathcal{F}H(\varphi)=\boldsymbol{P}(\Gamma(\varphi))$. Отображение H определено корректно, так как $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$. При этом $\forall\varphi\in\mathcal{F}'H(\varphi)=H'(\varphi)$. Поскольку $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ и операция $\boldsymbol{P}$ однородна слева, то операция $\boldsymbol{P}$ монотонна, следовательно, отображение H монотонно. Тогда можно построить такую трансфинитную последовательность $\{\psi_\xi\}$, что $\forall\xi\psi_\xi=\sup\{H(\psi_\eta):\eta<\xi\}$ и $\exists\zeta\psi_\zeta=\theta_0$, где θ_0 является минимальной неподвижной точкой отображения H (см. [2] или [8]).

Согласно предложению 1.4, элемент θ_0 $\boldsymbol{P}$-рекурсивен относительно $\mathcal{B}'$. Тогда $\theta_0=\boldsymbol{P}(\chi)$, где элемент χ рекурсивен относительно $\mathcal{B}'$, следовательно, $\chi\in\mathcal{F}'$. Чтобы доказать, что θ_0 является $\boldsymbol{P}'$-рекурсивной относительно $\mathcal{B}'$ неподвижной точкой отображения H', остается лишь проверить, что $\theta_0\in\mathcal{F}'$. Трансфинитной индукцией докажем, что $\forall\xi\psi_\xi\in\mathcal{F}'$. Допустим, что $\forall\eta(\eta<\xi\to\psi_\eta\in\mathcal{F}')$. Отображение H монотонно, следовательно, множество $\mathcal{E}=\{H(\psi_\eta):\eta<\xi\}$ вполне упорядочено. Поскольку $\psi_\eta\in\mathcal{F}'$, то $H(\psi_\eta)=H'(\psi_\eta)\in\mathcal{F}'$ для $\eta<\xi$, следовательно, $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F}'$. Из посылок предложения заключаем, что $\psi_\xi=\sup\mathcal{E}\in\mathcal{F}'$.

Допустим теперь, что $\theta_1\in\mathcal{F}'$ и $H'(\theta_1)\leqq\theta_1$. Тогда $H(\theta_1)\leqq\theta_1$, следовательно, $\theta_0\leqq\theta_1$.

Предложение 1.7. *Пусть в $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения* 1.5, *о $\mathcal{S}'$ сказано то же, что и в формулировке предложения* 1.1, $\leqq$ *совпадает с* $\leqq'$ *на $\mathcal{F}'$ и для любой возрастающей последовательности* $\{\varphi_n\}$ *в $\mathcal{F}'$ имеем* $\sup_n \varphi_n \in \mathcal{F}'$. *Тогда в $\mathcal{S}'$ тоже исполнены предположения предложения* 1.5.

Доказательство. Докажем, что любая возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ из $\mathcal{F}'$ имеет точную мажоранту в $\mathcal{F}'$, совпадающую с ее точной мажорантой в $\mathcal{F}$. Действительно, согласно (3), существует такой элемент φ из $\mathcal{F}$, что $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Из посылок предложения следует, что $\varphi \in \mathcal{F}'$. Из $\varphi = \sup_n \varphi_n$ вытекает $\varphi = \sup'_n \varphi_n$ (символом $\sup'$ обозначаем точную мажоранту в $\mathcal{F}'$).

Пусть дана возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ в $\mathcal{F}'_0$, $\varphi = \sup'_n \varphi_n$ и $\varphi \in \mathcal{F}'$. Тогда $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Вспомним, что $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}' \cap \boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}')$. Тогда $\forall n \varphi_n \in \mathcal{F}_0$, следовательно, $\varphi \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_n \boldsymbol{P}(\varphi_n)$. Однако последовательность $\{\boldsymbol{P}(\varphi_n)\}$ возрастающая, следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}'$, следовательно, $\varphi \in \mathcal{F}'_0$.

Поскольку $O \in \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}'$ и $\boldsymbol{P}(O) = O \in \mathcal{F}'$, то $O \in \mathcal{F}'_0$.

Из (3), приняв во внимание сказанное выше о точных мажорантах возрастающих последовательностей в $\mathcal{F}'$, получаем, что операции композиции и $\boldsymbol{P}'$ и отображение $\lambda\theta.(\chi \supset I, \theta)$ счетно-непрерывны в $\mathcal{F}'$.

Следовательно, в $\mathcal{S}'$ тоже исполнены (3) и (4).

Предложение 1.8. *Пусть в $\mathcal{S}$ исполнены* (3) *и* (4) *и все элементы множества $\mathcal{C}$ $\boldsymbol{P}$-рекурсивны относительно $\mathcal{B}$. Рассмотрим полугруппу $\mathcal{F}'$ из всех $\boldsymbol{P}$-рекурсивных относительно $\mathcal{B}$ элементов множества $\mathcal{F}$ и определим $\mathcal{B}'_0$, $\mathcal{F}'_0$ и $\boldsymbol{P}'$ как в формулировке предложения* 1.1. *Тогда* $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{F}', I, \mathcal{C}, \Pi \restriction \mathcal{F}'^2, L, R, \Sigma \restriction \mathcal{F}'^3, T, F \rangle$ *будет итеративным комбинаторным пространством, в котором исполнены* (1) *и* (2), *и если* $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{F}'$, *то для любого $\boldsymbol{P}'$-рекурсивного относительно $\mathcal{B}'$ отображения H' из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$ уравнение* $\theta = H'(\theta)$ *обладает таким $\boldsymbol{P}'$-рекурсивным относительно $\mathcal{B}'$ решением* $\theta_0 \in \mathcal{F}'$, *что если* $\theta_1 \in \mathcal{F}'$ *и* $H'(\theta_1) \leqq \theta_1$, *то* $\theta_0 \leqq \theta_1$.

Доказательство. Множество $\mathcal{F}'$ действительно замкнуто относительно применения композиции, Π и Σ, так как рекурсивные операции сохраняют относительную $\boldsymbol{P}$-рекурсивность. При этом $I, L, R \in \mathcal{F}'$ и $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}'$. Тогда аксиомы комбинаторного пространства для $\mathcal{S}'$ вытекают из соответствующих аксиом для $\mathcal{S}$. Теперь проверим, что комбинаторное пространство $\mathcal{S}'$ итеративно, модифицируя доказательство итеративности комбинаторного пространства, рассмотренного в примере (5) из [8] (здесь и в дальнейшем нумерация примеров из [8] относится к главе III, п. 3. 2).

Элемент O из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}'$, операция композиции и отображение $\lambda\theta.(\chi \supset I, \theta)$ счетно-непрерывны. Пусть $\sigma, \chi \in \mathcal{F}'$ и $\varphi_n = \Gamma^n_{\sigma,\chi}(O)$, где $\Gamma_{\sigma\chi} = \lambda\theta.(\chi \supset I, \theta\sigma)$. Если последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет точную мажоранту в $\mathcal{F}'$, то этот элемент и будет итерацией элементов σ и χ в $\mathcal{S}'$. Однако в $\mathcal{S}$ элемент $[\sigma, \chi]$ является точной мажорантой $\{\varphi_n\}$, итерация в $\mathcal{S}$ сохраняет относительную $\boldsymbol{P}$-рекурсивность, следовательно, $[\sigma, \chi] \in \mathcal{F}'$. Следовательно, существует итерация элементов σ и χ в $\mathcal{S}'$, и она совпадает с их итерацией в $\mathcal{S}$.

Согласно предложению 1.1, в $\mathcal{S}'$ исполнены (1) и (2).

Пусть $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{F}'$ и отображение H' из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$ $\boldsymbol{P}'$-рекурсивно относительно $\mathcal{B}'$. Тогда существует такое рекурсивное относительно $\mathcal{B}'$ отображение Γ'' из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$, что $\forall \varphi \in \mathcal{F}' H'(\varphi) = \boldsymbol{P}'(\Gamma''(\varphi))$. Согласно следствию 1.3

существует такое рекурсивное относительно $\mathcal{B}'$ отображение Γ_1' из $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}'$, что $\forall\varphi(\varphi\in\mathcal{F}_0'\to\Gamma_1'(\varphi)\in\mathcal{F}_0'\ \&\ \boldsymbol{P}'(\Gamma_1'(\varphi))=\boldsymbol{P}'(\Gamma'(\boldsymbol{P}'(\varphi))))$. Как это было отмечено в доказательстве предложения 1.6, существует рекурсивное относительно $\mathcal{B}'$ отображение Γ_1 из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, совпадающее с Γ_1' на $\mathcal{F}'$. Из (3) следует, что элемент $\psi=\sup_n\varphi_n$, где $\varphi_n=\Gamma_1'^n(O)$, является минимальной неподвижной точкой отображения Γ_1. Элемент ψ рекурсивен относительно $\mathcal{B}'$, следовательно, $\boldsymbol{P}$-рекурсивен относительно $\mathcal{B}$, следовательно, $\psi\in\mathcal{F}'$.

Индукцией по n докажем, что $\forall n(\varphi_n\in\mathcal{F}_0'\ \&\ \forall\theta_1\in\mathcal{F}'(H'(\theta_1)\leqq\theta_1\to\boldsymbol{P}'(\varphi_n)\leqq\theta_1))$. Для $n=0$ это очевидно. Допустим, что утверждение исполнено для n. Тогда $\varphi_{n+1}=\Gamma_1(\varphi_n)=\Gamma_1'(\varphi_n)\in\mathcal{F}_0'$. Если $H'(\theta_1)\leqq\theta_1$, то $\boldsymbol{P}'(\varphi_{n+1})=\boldsymbol{P}'(\Gamma_1'(\varphi_n))=H'(\boldsymbol{P}'(\varphi_n))\leqq H'(\theta_1)\leqq\theta_1$.

Тогда $\forall n\varphi_n\in\mathcal{F}_0$, следовательно, $\psi\in\mathcal{F}_0$. Так как очевидно $\mathcal{F}_0\cap\mathcal{F}'\subseteq\boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}')$, то $\mathcal{F}_0'=\mathcal{F}_0\cap\mathcal{F}'$, откуда заключаем, что $\psi\in\mathcal{F}_0'$. Следовательно, элемент $\theta_0=\boldsymbol{P}'(\psi)$ $\boldsymbol{P}'$-рекурсивен относительно $\mathcal{B}'$, $\theta_0=\boldsymbol{P}'(\psi)=\boldsymbol{P}'(\Gamma_1(\psi))=\boldsymbol{P}'(\Gamma_1'(\psi))=H'(\boldsymbol{P}'(\psi))=H'(\theta_0)$ и если $H'(\theta_1)\leqq\theta_1$, то $\theta_0=\boldsymbol{P}'(\psi)=\boldsymbol{P}(\psi)=\sup_n\boldsymbol{P}(\varphi_n)=\sup_n\boldsymbol{P}'(\varphi_n)\leqq\theta_1$.

Этим предложение доказано.

2. Рассмотрим некоторые примеры итеративных комбинаторных пространств, в которых оказывается возможным ввести подходящим образом операцию P. Будем считать в дальнейшем, что

$$\mathcal{B}_0=\{\alpha,\beta\},$$

$$G_0=\lambda\varphi\psi\,.\,\varphi(\psi(L,LR),R^2)(L,\alpha R),$$

$$G_1=\lambda\varphi\psi\,.\,(\varphi(L,LR),\psi(L,R^2))(L,\alpha R),$$

$$G_2=\lambda\varphi\psi\,.\,\gamma(L,R^2)[(\varphi(L,LR),\alpha R^2)(L,\alpha R^2),\psi(L,LR)](L,\alpha R),$$

$$G_3=\lambda\varphi\,.\,\varphi\gamma,$$

$$G_4=\lambda\varphi\,.\,G_0(\varphi,I),$$

где $\gamma=L(L,\beta R)$, и в каждом случае элементы α и β будут указаны особо

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — итеративное комбинаторное пространство, α, β, $V\in\mathcal{F}$, $\forall xVx=V$, $(V,V)=\alpha V$ и $\beta V=T$. Тогда для $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ и $\boldsymbol{P}=\lambda\varphi\,.\,\varphi(I,V)$ исполнены* (1) *и* (2), *где в тождестве для итерации знак равенства заменен на $\leqq$.*

Доказательство. Аналогично тождеству $(\varphi L,\psi R)(\theta,\tau)=(\varphi\theta,\psi\tau)$ из [8] доказываем тождества $(\varphi(L,LR),R^2)(\theta,\tau,\chi)=(\varphi(\theta,\tau),\chi)$ и $(\varphi(L,LR),\psi(L,R^2))(I,\theta,\tau)=(\varphi(I,\theta),\psi(I,\tau))$. Используя их, получаем

$$\boldsymbol{P}(\varphi)P(\psi)=\varphi(\psi(I,V),V)=\varphi(\psi(L,LR),R^2)(I,V,V)$$

$$=\varphi(\psi(L,LR),R^2)(I,\alpha V)=\varphi(\psi(L,LR),R^2)(L,\alpha R)(I,V)=\boldsymbol{P}(G_0(\varphi,\psi)),$$

$$(\boldsymbol{P}(\varphi),\boldsymbol{P}(\psi))=(\varphi(L,LR),\psi(L,R^2))(I,V,V)=(\varphi(L,LR),\psi(L,R^2))(I,\alpha V)=\boldsymbol{P}(G_1(\varphi,\psi)),$$

$$\boldsymbol{P}(G_3(\varphi))=\varphi\gamma(I,V)=\varphi L(L,\beta R)(I,V)=\varphi L(I,\beta V)=\varphi L(I,T)=\varphi I=\varphi.$$

Поскольку $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ и операция $\boldsymbol{P}$ очевидно однородна слева, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi))=\boldsymbol{P}(G_4(\varphi))$.

Используя тождество $(\chi L\supset\varphi R,\ \psi R)(\theta,\ \tau)=(\chi\theta\supset\varphi\tau,\ \psi\tau)$ из [8], получаем

$$(\boldsymbol{P}(\chi)\supset\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi))=(\chi L\supset\varphi R,\ \psi R)((I,\ V),(I,\ V))$$
$$=(\chi L\supset\varphi R,\ \psi R)((L,\ LR),\ (L,\ R^2))(L,\ aR)(I,\ V)$$
$$=\boldsymbol{P}((\chi(L,\ LR)\supset\varphi(L,R^2),\ \psi(L,\ R^2))(L,aR)).$$

Следующее упрощенное доказательство неравенства $[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]\leqq\boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi))$ предложено Д. Скордевым.

Обозначим $[(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2),\ \psi(L,\ LR)]$ через τ. Тогда

$$(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ \boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi))\boldsymbol{P}(\varphi))=(\boldsymbol{P}(\psi)\supset\boldsymbol{P}(\gamma),\ \boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi)(\varphi(L,\ LR),\ R^2)(L,\ aR)))$$
$$=\boldsymbol{P}((\psi(L,\ LR)\supset\gamma(L,\ R^2),\ \gamma(L,\ R^2)\tau(L,\ aR)(\varphi(L,\ LR),\ R^2)(L,\ aR)(L,\ R^2))(L,\ aR))$$
$$=\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)(\psi(L,\ LR)\supset I,\ \tau(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2)(L,\ aR))=\boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi)).$$

Поскольку $[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]$ является минимальной неподвижной точкой отображения $\lambda\theta\,.\,(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ \theta\boldsymbol{P}(\varphi))$, то $[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]\leqq\boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi))$.

Этим предложение доказано.

Рассмотрим некоторые случаи, когда в комбинаторном пространстве $\mathcal{S}$, удовлетворяющем предположениям предложения 2.1, имеет место также обратное неравенство

$$\boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi))\leqq[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]. \tag{5}$$

Предложение 2.2. *Пусть в $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения 2.1 и элемент V удовлетворяет также условиям $\forall xx\leqq V$ и $\forall xxV\leqq x$. Тогда в $\mathcal{S}$ исполнено неравенство* (5).

Доказательство. Рассуждения здесь аналогичны рассуждениям из второй части доказательства леммы 13 из [7]. Заметим, что согласно [7], из условий $\forall xVx=V$, $\forall xx\leqq V$ и $\forall xxV\leqq x$ вытекает, что для любых φ и ψ из $\mathcal{F}$, если $\forall x\varphi x\leqq\psi$, то $\varphi V\leqq\psi$.

Обозначим $[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]$ через τ и пусть $\mathcal{E}=\{\theta:\theta\in\mathcal{F}\ \&\ \boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta(L,\ aR))\leqq\tau\}$ $=\{\theta:\theta\in\mathcal{F}\ \&\ \gamma(L,R^2)\,\theta(I,\ V,\ V)\leqq\tau\}$. Для любых x и y из $\mathcal{C}$ множество $\mathcal{E}_{x,y}=\{\theta:\gamma(L,\ R^2)\,\theta(I,\ x,\ y)\leqq\tau\}$ очевидно является простым $\Phi_1(\mathcal{S})$-началом в смысле определения, данного в [8]. Проверим, что множество $\mathcal{E}$ является $\Phi_1(\mathcal{S})$-началом, доказав для этой цели, что $\mathcal{E}=\cap\{\mathcal{E}_{x,y}:x,\ y\in\mathcal{C}\}$. Поскольку $\forall x\forall y(x,\ y)\leqq(V,\ V)$, то $\mathcal{E}\subseteq\cap\{\mathcal{E}_{x,y}:x,\ y\in\mathcal{C}\}$. Пусть теперь $\theta\in\cap\{\mathcal{E}_{x,y}:x,\ y\in\mathcal{C}\}$. Тогда $\forall x\forall y\gamma(L,\ R^2)\,\theta\,(I,\ x,\ y)\leqq\tau$, следовательно, $\forall z\forall x\forall y\gamma\,(L,\ R^2)\,\theta\,(z,\ x,\ I)y\leqq\tau z$, следовательно, $\forall z\forall x\gamma\,(L,\ R^2)\,\theta\,(z,\ x,\ I)V\leqq\tau z$, следовательно, $\forall z\forall x\gamma(L,\ R^2)\,\theta\,(z,\ I,\ V)x\leqq\tau z$, следовательно, $\forall z\gamma(L,\ R^2)\theta(z,\ V,\ V)\leqq\tau z$, откуда заключаем, что $\theta\in\mathcal{E}$.

Для доказательства неравенства (5) остается проверить, что $(\psi(L,\ LR)\supset I,\ \theta(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2))\in\mathcal{E}$ для любого θ из $\mathcal{E}$. Пусть $\theta\in\mathcal{E}$. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)(\psi(L,\ LR)\supset I,\ \theta(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2))(L,\ aR))$$
$$=\boldsymbol{P}((\psi(L,\ LR)\supset\gamma(L,\ R^2),\ \gamma(L,\ R^2)\,\theta\,(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR)(L,\ R^2))\,(L,\ aR))$$
$$=(\boldsymbol{P}(\psi)\supset\boldsymbol{P}(\gamma),\ \boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\,\theta\,(L,\ aR)(\varphi(L,\ LR),\ R^2)\,(L,\ aR)))$$
$$=(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ \boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\,\theta\,(L,\ aR))\boldsymbol{P}(\varphi))\leqq(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ \tau\boldsymbol{P}(\varphi))=\tau.$$

Этим предложение доказано. Заметим, что при выполнении условий $\forall x V x = V$, $\forall x x \leqq V$ и $\forall x x V \leqq x$ в качестве β можно взять T, так как из $TV \leqq T$ и $T \leqq V$ следует $TV = T$.

Если в итеративном комбинаторном пространстве $\mathcal{S}$ имеется элемент U, рассмотренный в [7], то элементы $\alpha = (L, R)$, $\beta = T$ и $V = U$ удовлетворяют требованиям предложения 2.2. По определению элемент U удовлетворяет всем требованиям, исключая $(U, U) = (L, R)U$. Проверим, что это тождество тоже исполнено. Для любого x имеем $(L, R)x \leqq (U, U)x = (Ux, Ux) = (U, U)$, следовательно, $(L, R)U \leqq (U, U)$. Для любых x и y имеем $(x, I)y = (x, y) = (L, R)(x, y) \leqq (L, R)U$, следовательно, $\forall x (x, I)U \leqq (L, R)U$. Это показывает, что $\forall x (I, U)x \leqq (L, R)U$, следовательно, $(I, U)U \leqq (L, R)U$ и, значит, $(U, U) \leqq (L, R)U$. Заключаем, что $(U, U) = (L, R)U$.

Согласно [7], элемент U имеется в комбинаторных пространствах, рассмотренных в примерах 3 и 9 из [3], в тех, которые рассматриваются в предложении 2 из [4], в предложении 1 из [5] (если исполнено $\forall s \forall i \forall t (\langle s, i, t \rangle \in L \cup R \to i = 0)$) и в комбинаторных пространствах, рассмотренных в доказательстве предложения 2 из [6]. Очевидно в этих случаях $\boldsymbol{P}$-рекурсивность совпадает с квазирекурсивностью, рассматриваемой в [7].

Если $\mathcal{S}$ — комбинаторное пространство, рассмотренное в предложении 1 из [5], и V — точная мажоранта множества $\mathcal{C}$, то V удовлетворяет всем предположениям для элемента U, эвентуально за исключением условий $L \leqq V$ и $R \leqq V$. Возьмем $\alpha = (L, R) \cap (V, V)$ и $\beta = T$ (элемент α можно выбрать и иначе). Тогда, используя, что $\alpha \leqq (V, V)$ и $\forall x \forall y \alpha(x, y) = (x, y)$, заключаем, как и выше, что $(V, V) = \alpha V$. Следовательно, для α, β и V исполнены предположения предложения 2.2.

Во всех упомянутых выше примерах исполнено (3), а так как в них $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\boldsymbol{P} = \lambda\varphi . \varphi(I, V)$ и операция композиции счетно-непрерывна, то исполнено также и (4). Отметим, что в этих примерах $\boldsymbol{P} = \lambda\varphi . \sup_x \varphi(I, x)$.

Предложение 2.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — комбинаторное пространство однозначных частичных отображений, рассмотренное в примере 2 из* [3], $\alpha = (L, R)$, $\beta = T$, $\mathcal{F}_0 = \{\varphi : \exists \psi \psi = \sup_x \varphi(I, x)\}$ *и* $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_x \varphi(I, x)$ *для* φ *из* $\mathcal{F}_0$. *Тогда в $\mathcal{S}$ исполнены условия* (1)—(4).

Доказательство. $\mathcal{S}$ является подпространством рассмотренного в примере 3 из [3] комбинаторного пространства многозначных частичных отображений, в котором, как это отмечено выше, исполнены (3) и (4). Поскольку в последнем точная мажоранта любой возрастающей последовательности однозначных отображений тоже является однозначным отображением, то согласно предложению 1.7, в $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения 1.5.

В то же время в $\mathcal{S}$ не существует элемент V, удовлетворяющий предположениям предложения 2.2, так как любая пара разных элементов множества $\mathcal{C}$ не имеет мажоранты в $\mathcal{F}$. В частности, в $\mathcal{S}$ не имеется элемент U.

Аналогичное предложение имеет место для комбинаторного пространства, рассмотренного в примере 8 из [8], так как оно является подпространством комбинаторного пространства, рассмотренного в предложении 1 из [5].

Предложение 2.4. *Пусть $\mathcal{S}$ — комбинаторное пространство, рассмотренное в предложении* 1 *из* [4], *и* α, β, $\mathcal{F}_0$ *и* $\boldsymbol{P}$ *определены как в предыдущем предложении. Тогда в $\mathcal{S}$ исполнены условия* (1)—(4).

Доказательство. $\mathcal{S}$ является подпространством рассмотренного в предыдущем предложении пространства. Пусть дана возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ однозначных частичных отображений из M в M, для любого n множество $\mathrm{Dom}\,\varphi_n$ открыто, отображение φ_n непрерывно и пусть $\varphi=\sup_n \varphi_n$. Тогда $\mathrm{Dom}\,\varphi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathrm{Dom}\,\varphi_n$ и для любого подмножества A множества M имеем $\varphi^{-1}(A)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\varphi_n^{-1}(A)$. Поскольку объединение открытых множеств открыто, то множество $\mathrm{Dom}\,\varphi$ открыто и отображение φ непрерывно. Тогда согласно предложению 1.7, в $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения 1.5. Как и выше, в $\mathcal{S}$ не существует элемент V, удовлетворяющий предположениям предложения 2.2.

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Пусть $\mathcal{S}'$ — комбинаторное пространство, рассмотренное в примере 5 из [8], и α', β', $\mathcal{F}_0'$ и $\boldsymbol{P}'$ определены так, как в предложении 2.3 определены α, β, $\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}$. Тогда в $\mathcal{S}'$ имеет место заключение предложения 1.5.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathcal{S}'$ является подпространством комбинаторного пространства $\mathcal{S}$ типа пространства из предложения 2.3. Согласно предложению 2.3, в $\mathcal{S}$ исполнены (3) и (4). Если возьмем в $\mathcal{S}$ множество $\mathcal{B}=\{\lambda p.p+1,\ \lambda p.p\dot{-}1\}$, то все элементы множества $\mathcal{C}$ будут рекурсивными (следовательно, $\boldsymbol{P}$-рекурсивными относительно $\mathcal{B}$). Кроме того, $\boldsymbol{P}$-рекурсивные относительно $\mathcal{B}$ элементы множества $\mathcal{F}$ будут совпадать в точности с частично рекурсивными отображениями из M в M, следовательно, с элементами множества $\mathcal{F}'$. Действительно, это проверено в [8] для рекурсивности относительно U, что в данном случае совпадает с $\boldsymbol{P}$-рекурсивностью. Тогда согласно предложению 1.8, в $\mathcal{S}'$ имеет место заключение предложения 1.5.

При рассмотрении сходных комбинаторных пространств в примерах 6 и 10 из [8] можно обойтись и без применения предложения 1.8, так как в них имеется элемент U.

П р е д л о ж е н и е 2.6. *Пусть в комбинаторном пространстве $\mathcal{S}$ для некоторых $\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}$ исполнены* (1), (2), (3) *и* (4), *где в* (1) *тождество для итерации заменено на соответствующее тождество для Σ вида тождества, полученного в доказательстве предложения* 2.1. *Тогда для $\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}$ исполнено также* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi,\ \psi\in\mathcal{F}_0$, $\Gamma=\lambda\theta.(\psi(L,\ LR)\supset \mathrm{I},\ \theta(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2))$ и $\theta=\sup_n\theta_n$, где $\theta_n=\Gamma^n(O)$. Согласно (3), имеем $[(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)\times(L,\ aR^2),\ \psi(L,\ LR)]=\theta$.

Индукцией по n докажем, что $\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR)\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR))\leqq[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]$. Для $n=0$ это очевидно. Допустим, что утверждение исполнено для n. Тогда

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]&=(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ [\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]\boldsymbol{P}(\varphi))\geqq(\boldsymbol{P}(\psi)\supset I,\ \boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR))\boldsymbol{P}(\varphi))\\ &=(\boldsymbol{P}(\psi)\supset\boldsymbol{P}(\gamma),\ \boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR)(\varphi(L,\ LR),\ R^2)(L,\ aR)))\\ &=\boldsymbol{P}((\psi(L,\ LR)\supset\gamma(L,\ R^2),\ \gamma(L,\ R^2)\theta_n(\varphi(L,\ LR),\ aR^2)(L,\ aR^2))(L,\ aR))\\ &=\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_{n+1}(L,\ aR)).\end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma(L,\ R^2)\theta_{n+1}(L,\ aR)\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_{n+1}(L,\ aR))\leqq[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]$.

Используя (3) и (4), получаем $G_2(\varphi,\ \psi)=\gamma(L,\ R^2)\theta(L,\ aR)=\sup_n\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR)\in\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(G_2(\varphi,\ \psi))=\sup_n\boldsymbol{P}(\gamma(L,\ R^2)\theta_n(L,\ aR))\leqq[\boldsymbol{P}(\varphi),\ \boldsymbol{P}(\psi)]$.

Следовательно, $G_2(\varphi,\ \psi)\in\mathcal{F}_0$ и исполнено (5). Обратное неравенство для итерации получаем как в доказательстве предложения 2.1.

Этим предложение доказано.

Следствие 2.7. *Пусть в комбинаторном пространстве $\mathcal{S}$ исполнены предположения предложения* 2.1 *и* (3). *Тогда в $\mathcal{S}$ исполнены также* (4) *и* (5).

Доказательство. Достаточно проверить, что исполнено (4). Действительно, $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$, $\boldsymbol{P}=\lambda\varphi\,.\,\varphi(I\,.\,V)$ и операция композиции счетно непрерывна, следовательно, исполнено (4).

Предложение 2.8. *Пусть $\mathcal{S}$ — рассмотренное в предложении* 3 *из* [5] *комбинаторное пространство, но без ограничения* $\sum_{i,t}\varphi(s, i, t)\leq 1$ *(считаем возможным и $\varphi(s, i, t)=+\infty$). Тогда для $\alpha=\lambda\, sit\,.\,I(s,i,t)\Delta(s)$, $\beta=\lambda\, sit\,.\,T(s,i,t)\,I(s,i,t)$ и $V=\lambda\, sit\,.\,\delta_0^i$, где Δ является характеристической функцией множества $J(M\times M)$, исполнены предположения следствия* 2.7

Доказательство. Из сказанного в конце примера 13 из [8] видно, что в $\mathcal{S}$ исполнено (3).

Для $x=\lambda\, sit\,.\,\delta_0^i\delta_c^t$ из $\mathcal{C}$ имеем

$$Vx=\lambda\, sit\,.\,V(c,i,t)=\lambda\, sit\,.\,V(s,i,t)=V,$$

$$(V,\ V)=\lambda\, sit\,.\sum_{m,n,p,q}V(s,m,p)V(s,n,q)\delta^t_{J(p,q)}\delta_i^{m+n}$$

$$=\lambda\, sit\,.\sum_{p,q}\delta_0^i\,\delta^t_{J(p,q)}=\lambda\, sit\,.\,\Delta(t)\delta_0^i=\lambda\, sit\,.\sum_{r,m,n}\alpha(r,\ n,\ t)V(s,\ m,\ r)\delta_i^{m+n}=\alpha V,$$

$$\beta V=\lambda\, sit\,.\sum_{r,m,n}\beta(r,\ n,\ t)V(s,\ m,\ r)\delta_i^{m+n}=\lambda\ sit.\,\delta_0^iT(s,\ i,\ t)=T.$$

Этим проверка посылок следствия 2.7 окончена. Заметим, что в $\mathcal{S}$ не исполнены предположения предложения 2.2, откуда в частности вытекает, что в $\mathcal{S}$ не имеется элемент U (последнее было замечено Д. Скордевым). Действительно, допустим, что элемент V_1 удовлетворяет предположениям предложения 2.2. Тогда оба элемента V и V_1 являются точными мажорантами множества $\mathcal{C}$, следовательно, $V_1=V$. Тогда

$$TV_1(s,\ 0,\ c^+)=TV(s,\ 0,\ c^+)=\sum_{r,m,n}T(r,\ n,\ c^+)\,V(s,\ m,\ r)\delta_0^{m+n}=\sum_r 1=+\infty.$$

Мы пришли к противоречию, так как $TV_1\leq T$.

Заметим также, что $\forall\varphi\boldsymbol{P}(\varphi)=\lambda\, sit\,.\sum_r\varphi(J(s,\ r),\ i,\ t)$.

Предложение 2.9. *Пусть $\mathcal{S}'$ — подпространство комбинаторного пространства $\mathcal{S}$ из предыдущего предложения, полугруппа $\mathcal{F}'$ которого состоит из всех элементов φ множества $\mathcal{F}$, для которых* $\sum_{i,t}\varphi(s,\ i,\ t)\leq 1$. *Пусть α и β определены как в предыдущем предложении, а $\mathcal{B}'_0$, $\mathcal{F}'_0$ и $\boldsymbol{P}'$ определены как в формулировке предложения* 1.1. *Тогда в $\mathcal{S}'$ исполнены условия* (1)—(4).

Доказательство. Поскольку $\alpha\leqq I$ и $\beta\leq T$, то $\alpha,\ \beta\in\mathcal{F}'$, следовательно, $\mathcal{B}'_0\subseteq\mathcal{F}'$.

Пусть дана возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ в $\mathcal{F}'$, $\varphi\in\mathcal{F}$ и $\varphi=\sup_n\varphi_n$. Согласно предложению 3 из [5], где рассмотрено комбинаторное пространство $\mathcal{S}'$, последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет точную мажоранту φ' в $\mathcal{F}'$. Тогда в $\mathcal{F}$ имеем $\varphi\leq\varphi'$, следовательно, $\varphi\in\mathcal{F}'$. Отсюда, согласно предложению 1.7, заключаем, что в $\mathcal{S}'$ исполнены предположения предложения 1.5.

Рассмотренный в $\mathscr{S}$ элемент V не принадлежит множеству $\mathfrak{F}'$, так как $\sum_{i,t} V(s, i, t)=\sum_t 1=+\infty$.

Предложение 2.10. *Пусть $\mathscr{S}$ — итеративное комбинаторное пространство, которое получается, если в примере* 14 *из* [8] *при определении множества $\mathfrak{D}$ заменим интервал* $[0, 1]$ *на* $[0, +\infty]$. *Пусть $J(M\times M)\in\mathfrak{A}$ и существует такой элемент c множества M, что $\{c\}\in\mathfrak{A}$. Тогда для $\alpha=\lambda pA\,.\,I(p, A)I(p, J(M\times M))$, $\beta=\lambda pA\,.\,T(p, A)I(p, \{c\})$ и $V=\lambda pA\,.\sum_q I(q, A)$ исполнены предположения следствия* 2.7.

Доказательство. Проверка условия (3) по существу повторяет проверку, сделанную при рассмотрении примера 14 из [8]. Удостоверимся, что α, β, $V\in\mathfrak{F}$. Для любого p из M $\lambda A\,.\,\alpha(p, A)\in\mathfrak{D}$, $\lambda A\,.\,\beta(p, A)\in\mathfrak{D}$ и $\lambda A\,.\,V(p, A)\in\mathfrak{D}$, так как $\lambda A\,.\,I(p, A)\in\mathfrak{D}$ и $\lambda A\,.\,T(p, A)\in\mathfrak{D}$. Если $A\in\mathfrak{A}$, то $A\cap J(M\times M)\in\mathfrak{A}$. Кроме того, $\{c\}\in\mathfrak{A}$, откуда заключаем, что $\{p: p\in M\&\alpha(p, A)>\xi\}\in\mathfrak{A}$, $\{p: p\in M\&\beta(p, A)>\xi\}\in\mathfrak{A}$ и $\{p: p\in M\&V(p, A)>\xi\}\in\mathfrak{A}$ для любого действительного числа ξ. Следовательно, α, β, $V\in\mathfrak{F}$.

Для $x=\lambda pA\,.\,I(d, A)$ из $\mathscr{C}$, согласно [8], имеем

$$Vx=\lambda pA\,.\,V(d, A)=\lambda pA\,.\,V(p, A)=V.$$

Из определения элемента V видно, что для любой измеримой относительно $\mathfrak{A}$ функции f (где $f: M\to[0, +\infty]$) исполнено $\int_M f(q)V(p, dq)=\sum_q f(q)$. Используя выражение для операции Π из [8], получаем

$$(V, V)=\lambda pA\,.\int_M V(p,\{q:\langle q, r\rangle\in J^{-1}(A)\})V(p, dr)$$

$$=\lambda pA\,.\sum_r V(p, \{q: J(q, r)\in A\})=\lambda pA\,.\sum_{q,r} I(J(q, r), A)=\lambda pA\,.\sum_q \alpha(q, A)$$

$$=\lambda pA\,.\int_M \alpha(q, A)V(p, dq)=\alpha V.$$

$$\beta V=\lambda pA\,.\int_M \beta(q, A)V(p, dq)=\lambda pA\,.\sum_q \beta(q, A)=\lambda pA\,.\,T(p, A)=T.$$

Этим предложение доказано.

Отметим, что $\forall\varphi\boldsymbol{P}(\varphi)=\lambda pA\,.\sum_q \varphi(J(p, q), A)$ и в $\mathscr{S}$ не существует элемент V, удовлетворяющий предположениям предложения 2.2.

Пусть $\mathscr{S}'$ — комбинаторное пространство, рассмотренное в примере 14 из [8], $J(M\times M)\in\mathfrak{A}$ и существует такой элемент c из M, что $\{c\}\in\mathfrak{A}$. Тогда $\mathscr{S}'$ является подпространством рассмотренного в предложении 2.10 комбинаторного пространства $\mathscr{S}$, причем полугруппа $\mathfrak{F}'$ этого подпространства состоит из всех элементов φ множества $\mathfrak{F}$, для которых $\forall p\varphi(p, M)\leq 1$. Поскольку $\alpha\leq I$ и $\beta\leq T$ в $\mathfrak{F}$, то α, $\beta\in\mathfrak{F}'$. Определим в $\mathscr{S}'$ множества $\mathscr{B}_0'$ и $\mathfrak{F}_0'$ и операцию P' как в формулировке предложения 1.1. Тогда в $\mathscr{S}'$ будут исполнены предположения предложения 1.5. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предположения 2.9.

Предложение 2.11. *Пусть $\mathscr{S}$ — итеративное комбинаторное пространство, которое получается, если в примере* 15 *из* [8] *сделаем следующие изменения. Всюду опустим неравенство $|\varphi(p, f)|\leq\sup|f|$ и заменим множества E^+ и E на E_1, где E_1 — множество всех полунепрерывных снизу отображений топологического пространства M в* $[0, +\infty]$. *Предположим дополнительно, что множество $J(M\times M)$ открыто и что* *в M существует некоторая изолированная точка c. Тогда для $\alpha = \lambda pf . I(p, f) \Delta(p)$, $\beta = \lambda pf . T(p, f) \Delta_1(p)$ и $V = \lambda pf . \sum_q f(q)$, где Δ и Δ_1 — характеристические функции множеств $J(M \times M)$ и $\{c\}$, исполнены предположения следствия 2.7.*

Доказательство. Проверка условия (3) аналогична проверке, сделанной в [8] для примера 15.

Пусть $f \in E_1$. Тогда неотрицательные функции $\lambda p . I(p, f)$, $\lambda p . T(p, f)$, Δ и Δ_1 полунепрерывны снизу, следовательно, функции $\lambda p . \alpha(p, f)$, $\lambda p . \beta(p, f)$ и $\lambda p . V(p, f)$ полунепрерывны снизу.

Легко можно проверить, что если A — направленное вверх подмножество множества E_1, то $\sup A \in E_1$ и $V(p, \sup A) = \sup\{V(p, f) : f \in A\}$. Аналогичные утверждения для α и β очевидны.

Ясно, наконец, что для фиксированного p из M $\lambda f . \alpha(p, f)$, $\lambda f . \beta(p, f)$ и $\lambda f . V(p, f)$ являются линейными функционалами. Следовательно, α, β и V принадлежат полугруппе комбинаторного пространства $\mathcal{S}$.

Для $x = \lambda pf . f(d)$ из $\mathcal{C}$ согласно [8] имеем

$$Vx = \lambda pf . V(d, f) = \lambda pf . V(p, f) = V,$$

$$(V, V) = \lambda pf . V(p, \lambda q . V(p, \lambda r . f(J(q, r))))$$

$$= \lambda pf . \sum_q V(p, \lambda r . f(J(q, r))) = \lambda pf . \sum_{q,r} f(I(q, r)) = \lambda pf . V(p, \lambda q . \alpha(q, f)) = \alpha V,$$

$$\beta V = \lambda pf . V(p, \lambda q . \beta(q, f)) = \lambda pf . \sum_q \beta(q, f) = \lambda pf . T(p, f) = T.$$

Этим проверка предположений следствия 2.7 окончена.

Здесь операция $\boldsymbol{P}$ выражается явно посредством равенства $\boldsymbol{P}(\varphi) = \lambda pf . \sum_q \varphi(J(p, q), f)$. Заметим также, что если топологическое пространство M получено при помощи данной в [4] конструкции, то множество $J(M \times M)$ будет заведомо открытым в M.

В комбинаторном пространстве из предложения 2.11 возьмем подпространство $\mathcal{S}'$, полугруппа $\mathcal{F}'$ которого состоит из всех элементов φ, для которых $\varphi(p, \lambda q . 1) \leq 1$ (следовательно, $\lambda p . \varphi(p, f) \in E^+$ для любой функции f из E^+, так как E^+ — множество всех ограниченных функций из E_1). Определим в $\mathcal{S}'$ множества $\mathcal{B}'_0$, $\mathcal{F}'_0$ и операцию $\boldsymbol{P}'$ как в формулировке предложения 1.1. Тогда в $\mathcal{S}'$ исполнены предположения предложения 1.5.

Во-первых, $\mathcal{S}'$ действительно является итеративным комбинаторным пространством, так как структура $\mathcal{S}'$ изоморфна комбинаторному пространству $\mathcal{S}''$, которое рассмотрено в предложении 3 из [4]. Изоморфизмом будет отображение, сопоставляющее каждому элементу полугруппы $\mathcal{F}''$ тот элемент из $\mathcal{F}'$, который совпадает с ним на множестве $M \times E^+$ (в [4] множество E^+ обозначено через Φ). При доказательстве этого используем, что любая функция f из E_1 является точной мажорантой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ из E^+, где $f_n = \lambda p . \min(f(p), n)$.

Проверим, что $\alpha, \beta \in \mathcal{F}'$. Для любого p из M $\alpha(p, \lambda q . 1) \leq I(p, \lambda q . 1) = 1$ и $\beta(p, \lambda q . 1) \leq T(p, \lambda q . 1) = 1$, следовательно, $\alpha, \beta \in \mathcal{F}'$.

Пусть дана возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ из $\mathcal{F}'$ и $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Из предложения 3 из [4] видно, что существует точная мажоранта φ' последовательности $\{\varphi_n\}$ в $\mathcal{F}'$. Тогда $\varphi \leq \varphi'$, следовательно, $\varphi(p, \lambda q . 1) \leq \varphi'(p, \lambda q . 1) \leq 1$, следовательно, $\varphi \in \mathcal{F}'$.

Применив предложение 1.7, приходим к заключению, что в $\mathcal{S}'$ исполнены предположения предложения 1.5. Этот результат вследствие изоморфности $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{S}''$ естественным образом переносится на $\mathcal{S}''$.

Пусть $\mathcal{S}'''$ — комбинаторное пространство, рассмотренное в примере 15 из [8]. Как это отметил Д. Скордев, комбинаторные пространства $\mathcal{S}''$ и $\mathcal{S}'''$ изоморфны. Изоморфизмом будет отображение, сопоставляющее каждому элементу φ из $\mathcal{F}''$ отображение $\bar{\varphi}$ из $M \times E$ в R, определенное следующим образом. Если функция f из E представлена в виде разницы функций f_1 и f_2 из E^+, то пусть $\bar{\varphi}(p, f) = \varphi(p, f_1) - \varphi(p, f_2)$. Это определение корректно, так как при фиксированном p φ является линейным функционалом на множестве E^+. При этом для φ из $\mathcal{F}''$ исполнено $|\bar{\varphi}(p, f)| \leqq \sup |f|$ для любого p из M и любой функции f из E. Наоборот, любой элемент полугруппы $\mathcal{F}'''$ представим в виде $\bar{\varphi}$, где элемент φ из $\mathcal{F}''$ совпадает с ним на множестве $M \times E^+$. Вследствие изоморфности $\mathcal{S}''$ и $\mathcal{S}'''$ заключаем, что в $\mathcal{S}'''$ исполнены предположения предложения 1.5.

Докажем, что в рассмотренном в предложении 2.11 комбинаторном пространстве $\mathcal{S}$ не существует элемент, который удовлетворял бы предположениям предложения 2.2, откуда будет вытекать, что такого элемента нет также в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ и $\mathcal{S}'''$.

Допустим, что элемент V_1 из $\mathcal{F}$ удовлетворяет предположениям предложения 2.2. Тогда $v = \lambda f . V_1(a, f)$ будет линейным функционалом над E_1. Рассмотрим функции $f_1 = \lambda p . (1 + \Delta_1(p))$ и $f_2 = \lambda p . (1 - \Delta_1(p))$. Поскольку Δ_1 является характеристической функцией множества $\{c\}$, где c — изолированная точка топологического пространства M, то функции f_1 и f_2 полунепрерывны снизу, следовательно, $f_1, f_2 \in E_1$.

Из $\forall x\, x \leqq V_1$ вытекает $v(f_1) \geqq \sup f_1$ и $v(f_2) \geqq \sup f_2$, следовательно, $v(f_1 + f_2) = v(f_1) + v(f_2) \geqq 2 + 1 = 3$.

С другой стороны, $TV_1 = T$, следовательно, $1 = T(a, \lambda p . 1) = TV_1(a, \lambda p . 1) = V_1(a, \lambda q . T(q, \lambda p . 1)) = v(\lambda q . 1)$. Поскольку $f_1 + f_2 = \lambda p . 2$, то $v(f_1 + f_2) = 2v(\lambda p . 1) = 2$. Мы пришли к противоречию, следовательно, не существует элемент V_1, обладающий такими свойствами.

Предложение 2.12. *Пусть $\mathcal{S}$ — рассмотренное в примере 23 из [8] комбинаторное пространство. Пусть $\alpha = (L, R)$, $\beta = T$, $\mathcal{F}_0 = \{\varphi : \forall p \forall q \forall r (J(p, q), J(p, r) \in \mathrm{Dom}\, \varphi \to \varphi(J(p, q)) = \varphi(J(p, r))) \& \forall A \in \boldsymbol{K} (\forall p \in A\, \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\, \varphi \to \exists q J(A, q) \subseteq \mathrm{Dom}\, \varphi)\}$, где через $\boldsymbol{K}$ обозначена совокупность всех непустых связных компактных подмножеств топологического пространства M, пусть $\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{P}(\varphi) = \{p : \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\, \varphi\}$ для φ из $\mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi)(p) = \cup \{\varphi(J(p, q)) : J(p, q) \in \mathrm{Dom}\, \varphi\}$ для φ из $\mathcal{F}_0$ и p из $\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{P}(\varphi)$. Тогда в $\mathcal{S}$ исполнены условия* (1)—(4).

Доказательство. Через A, B, C, эвентуально с индексами, будем обозначать подмножества множества M. Сперва проверим, что если $\varphi \in \mathcal{F}_0$, то $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}$. Если $p \in \mathrm{Dom}\, \boldsymbol{P}(\varphi)$, то существует такое q, что $J(p, q) \in \mathrm{Dom}\, \varphi$. Из определения множества $\mathcal{F}_0$ вытекает $\boldsymbol{P}(\varphi)(p) = \varphi(J(p, q))$, следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi)(p) \in \boldsymbol{K}$. Пусть B открыто и $A = \{p : p \in \mathrm{Dom}\, \boldsymbol{P}(\varphi) \& \boldsymbol{P}(\varphi)(p) \subseteq B\}$. Для любого x из $\mathcal{C}$ множество $A_x = \{p : p \in \mathrm{Dom}\, \varphi(I, x) \& \varphi(I, x)(p) \subseteq B\}$ открыто. Поскольку $A = \{p : \exists x (p \in \mathrm{Dom}\, \varphi(I, x) \& \varphi(I, x)(p) \subseteq B)\} = \cup \{A_x : x \in \mathcal{C}\}$, то A открыто. Следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}$ и операция $\boldsymbol{P}$ определена корректно.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_0$ и $\chi = G_0(\varphi, \psi)$. Проверим, что $\chi \in \mathcal{F}_0$.

Пусть $J(p, q)$, $J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\chi$. Тогда существуют непустые B, C, B_1 и C_1, такие, что $J(p, B) \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$, $J(\psi(J(p, B)), C) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, $J(p, B_1) \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$, $J(\psi(J(p, B_1), C_1) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, $\chi(J(p, q)) = \varphi(J(\psi(J(p, B)), C))$ и $\chi(J(p, r)) = \varphi(J(\psi(J(p, B_1)), C_1))$. Однако из определения множества $\mathcal{F}_0$ вытекает, что $\varphi(J(\psi(J(p, B)), C)) = \varphi(J(\psi(J(p, B_1)), C_1))$, следовательно, $\chi(J(p, q)) = \chi(J(p, r))$.

Пусть $A \in \boldsymbol{K}$ и $\forall p \in A \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\chi$. Тогда для любого p из A существуют такие непустые B и C, что $J(p, B) \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$ и $J(\psi(J(p, B)), C) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, следовательно, $\forall p \in A \exists s \exists t (J(p, s) \in \mathrm{Dom}\,\psi \& J(\psi(J(p, s)), t) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi)$. Принимая во внимание, что $\psi \in \mathcal{F}_0$, заключаем, что для некоторого s_0 исполнено $\forall p \in A \exists t (J(p, s_0) \in \mathrm{Dom}\,\psi \& J(\psi(J(p, s_0)), t) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi)$. Пусть $A_1 = \psi(J(A, s_0))$. Тогда $\forall r \in A_1 \exists t J(r, t) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$. Поскольку $A \in \boldsymbol{K}$, то из [8] видно, что $A_1 \in \boldsymbol{K}$. Тогда существует такое t_0, что $J(A_1, t_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, следовательно, $J(A, s_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$ и $J(\psi(J(A, s_0)), t_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$. Для $q_0 = J(s_0, t_0)$ будет исполнено $J(A, q_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\chi$.

Следовательно, $\chi \in \mathcal{F}_0$.

Докажем теперь, что $\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi) = \boldsymbol{P}(G_0(\varphi, \psi))$ для φ и ψ из $\mathcal{F}_0$. Имея в виду, что $\psi(s) \in \boldsymbol{K}$ для s из $\mathrm{Dom}\,\psi$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi) &= \{p : \exists q (J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\psi \& \psi(J(p, q)) \subseteq \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi))\}\\ &= \{p : \exists q (J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\psi \& \exists r J(\psi(J(p, q)), r) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi)\}\\ &= \{p : \exists t J(p, t) \in \mathrm{Dom}\,\chi\} = \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\chi).\end{aligned}$$

Ясно, что для p из $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\chi)$ исполнено $\boldsymbol{P}(\chi)(p) = \boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi)(p)$. Следовательно, $\boldsymbol{P}(\varphi)\boldsymbol{P}(\psi) = \boldsymbol{P}(G_0(\varphi, \psi))$.

Несколько проще проверяется, что если $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_0$, то $G_1(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}_0$ и $(\boldsymbol{P}(\varphi), \boldsymbol{P}(\psi)) = \boldsymbol{P}(G_1(\varphi, \psi))$.

Легко проверяется также, что если $\chi, \varphi, \psi \in \mathcal{F}_0$, то $(\chi(L, LR) \supset \varphi(L, R^2), \psi(L, R^3))(L, \alpha R) \in \mathcal{F}_0$ и $(\boldsymbol{P}(\chi) \supset \boldsymbol{P}(\varphi), \boldsymbol{P}(\psi)) = \boldsymbol{P}((\chi(L, LR) \supset \varphi(L, R^2), \psi(L, R^3))(L, \alpha R))$.

Очевидно для любого φ из $\mathcal{F}$ исполнено $G_3(\varphi) = \varphi L(L, TR) \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(G_3(\varphi)) = \varphi$.

Пусть $\varphi \in \boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}_0)$. Обозначим $G_4(\varphi) = \varphi((L, LR), R^2)(L, \alpha R)$ через χ. Если $J(p, q)$, $J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\chi$, то существуют непустые B, C, B_1 и C_1, такие, что $J(J(p, B), C) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, $J(J(p, B_1), C_1) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, $\chi(J(p, q)) = \varphi(J(J(p, B), C))$ и $\chi(J(p, r)) = \varphi(J(J(p, B_1), C_1))$. Однако $\varphi(J(J(p, B), C)) = \boldsymbol{P}(\varphi)(J(p, B)) = \boldsymbol{P}(\varphi)(J(p, B_1)) = \varphi(J(J(p, B_1), C_1))$, так как $\varphi \in \mathcal{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}_0$, следовательно, $\chi(J(p, q)) = \chi(J(p, r))$. Пусть $A \in \boldsymbol{K}$ и $\forall p A \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\chi$. Тогда для любого p из A существуют такие непустые B и C, что $J(J(p, B), C) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$, следовательно, $\forall p \in A \exists s \exists t\, J(J(p, s), t) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$, следовательно, $\forall p \in A \exists s\, J(p, s) \in \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi)$. Поскольку $\boldsymbol{P}(\varphi) \in \mathcal{F}_0$, то для некоторого s_0 исполнено $J(A, s_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi)$, следовательно, $\forall p \in A \exists t\, J(J(p, s_0), t) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$. Для $A_1 = J(A, s_0)$ имеем $\forall r \in A_1 \exists t\, J(r, t) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$. Отображение J непрерывно, следовательно, $A_1 \in \boldsymbol{K}$. Тогда существует такое t_0, что $J(A_1, t_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$. Для $q_0 = J(s_0, t_0)$ будет исполнено $J(A, q_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$. Следовательно, $\chi \in \mathcal{F}_0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi)) &= \{p : \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi)\}\\ &= \{p : \exists q \exists t\, J(J(p, q), t) \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}\\ &= \{p : \exists r\, J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\chi\} = \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\chi).\end{aligned}$$

Ясно, что для p из $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\chi)$ исполнено $\boldsymbol{P}(\chi)(p) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi))(p)$. Следовательно, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\varphi)) = \boldsymbol{P}(G_4(\varphi))$ для φ из $\boldsymbol{P}^{-1}(\mathcal{F}_0)$.

Согласно [8] в $\mathcal{S}$ исполнено (3). Докажем, что в $\mathcal{S}$ исполнено также (4).

Очевидно $O \in \mathfrak{F}_0$. Пусть дана возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$ в $\mathfrak{F}_0$ и $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Тогда $\mathrm{Dom}\,\varphi = \cup_n \mathrm{Dom}\,\varphi_n$ и если $p \in \mathrm{Dom}\,\varphi$, то существует такое n_0, что $p \in \mathrm{Dom}\,\varphi_n$ для $n > n_0$ и $\varphi(p) = \cap_{n>n_0} \varphi_n(p)$.

Пусть $J(p, q)$, $J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$. Напомним, что $\varphi \leqq \psi \longleftrightarrow \mathrm{Dom}\,\varphi \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi \,\&\, \forall p\,(p \in \mathrm{Dom}\,\varphi \rightarrow \psi(p) \subseteq \varphi(p))$. Тогда существует такое n_0, что $J(p, q)$, $J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\varphi_n$ для $n > n_0$ и $\varphi(J(p, q)) = \cap_{n>n_0} \varphi_n(J(p, q)) = \cap_{n>n_0} \varphi_n(J(p, r)) = \varphi(J(p, r))$, так как $\forall n\, \varphi_n \in \mathfrak{F}_0$.

Пусть $A \in \boldsymbol{K}$ и $\forall p \in A \exists q\, J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\varphi$. Тогда $\forall p \in A \exists q \exists n\, J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\varphi_n$, следовательно, $\forall p \in A \exists n\, p \in \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_n)$, т. е. $A \subseteq \cup_n \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_n)$. Множества $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_n)$ открыты и если $m < n$, то $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_m) \subseteq \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_n)$, так как $\mathrm{Dom}\,\varphi_m \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi_n$. Поскольку $A \in \boldsymbol{K}$, то $\exists n\, A \subseteq \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi_n)$, следовательно, $\exists n \exists q_0 J(A, q_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi_n$, следовательно, $\exists q_0\, J(A, q_0) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$.

Следовательно, $\varphi \in \mathfrak{F}_0$. Легко проверяется, что $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_n \boldsymbol{P}(\varphi_n)$, следовательно, в $\mathcal{S}$ исполнено (4).

Согласно предложению 2.6, заключаем, что в $\mathcal{S}$ исполнено (1). Следовательно, в $\mathcal{S}$ исполнены (1), (2), (3) и (4).

Этим предложение доказано.

Заметим, что здесь операцию $\boldsymbol{P}$ можно выразить посредством равенства $\forall x \boldsymbol{P}(\varphi)x = \sup_y \varphi(x, y)$ или, что эквивалентно, $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_y \varphi(I, y)$.

Комбинаторное пространство, рассмотренное в примере 22 из [8], получается из рассмотренного в примере 23 из [8] путем замены частичного порядка $\leqq$ на $\leqq'$, где $\varphi \leqq' \psi \longleftrightarrow \mathrm{Dom}\,\varphi \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi \,\&\, \forall p (p \in \mathrm{Dom}\,\varphi \rightarrow \psi(p) = \varphi(p))$, причем ясно, что $\varphi = \psi \longleftrightarrow \varphi =' \psi$. Имеет место предложение, аналогичное предложению 2.12.

Предложение 2.13. *Пусть $\mathcal{S}$ — рассмотренное в примере 22 из [8] комбинаторное пространство. Пусть $\alpha = (L, R)$, $\beta = T$, $\mathfrak{F}_0 = \{\varphi : \forall p \forall q \forall r (J(p, q),\ J(p, r) \in \mathrm{Dom}\,\varphi \rightarrow \varphi(J(p, q)) = \varphi(J(p, r))) \,\&\, \forall A \in \boldsymbol{K}(\forall p \in A \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\varphi \rightarrow \exists q J(A, q) \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi)\}$, где через $\boldsymbol{K}$ обозначена совокупность всех непустых связных компактных подмножеств топологического пространства M, пусть $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi) = \{p : \exists q J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}$ для φ из $\mathfrak{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi)(p) = \cup\{\varphi(J(p, q)) : J(p, q) \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}$ для φ из $\mathfrak{F}_0$ и p из $\mathrm{Dom}\,\boldsymbol{P}(\varphi)$. Тогда в $\mathcal{S}$ исполнены условия (1)—(4).*

Доказательство. Условия (1) и (2) исполнены в $\mathcal{S}$, так как они исполнены в комбинаторном пространстве, рассмотренном в предыдущем предложении. Согласно [8], в $\mathcal{S}$ исполнено (3). Проверим, что в $\mathcal{S}$ исполнено также (4).

Пусть дана последовательность $\{\varphi_n\}$ в $\mathfrak{F}_0$, $\forall n\, \varphi_n \leqq' \varphi_{n+1}$ и $\varphi = \sup_n' \varphi_n$ (символом $\sup'$ обозначаем точную мажоранту относительно частичного порядка $\leqq'$). Согласно [8], имеем $\forall n\, \varphi_n \leqq \varphi_{n+1}$ и $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Из предыдущего предложения вытекает, что $\varphi \in \mathfrak{F}_0$ и $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_n \boldsymbol{P}(\varphi_n)$. Так как очевидно $\forall n\, \boldsymbol{P}(\varphi_n) \leqq' \boldsymbol{P}(\varphi_{n+1})$, то $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_n' \boldsymbol{P}(\varphi_n)$. Этим предложение доказано.

Здесь операция $\boldsymbol{P}$ совпадает с соответствующей операцией из предыдущего предложения, и ее можно выразить также посредством равенства $\forall x\, \boldsymbol{P}(\varphi)x = \sup_y' \varphi(x, y)$ или, что эквивалентно, $\boldsymbol{P}(\varphi) = \sup_y' \varphi(I, y)$.

Заметим, что если множество M комбинаторного пространства, рассмотренного в примере 22 (примере 23) из [8], снабжено дискретной топологией, то соответствующее комбинаторное пространство будет совпадать с комбинаторным пространством из предложения 2.3. При этом операция $\boldsymbol{P}$, введенная в предложении 2.12 (предложении 2.13), будет совпадать с введенной в предложении 2.3 операцией $\boldsymbol{P}$.

В комбинаторных пространствах, рассмотренных в последних двух предложениях, любая пара разных элементов множества $\mathscr{C}$ не обладает мажорантой, следовательно, в этих пространствах не имеется элемент, удовлетворяющий предположениям предложения 2.2.

В наиболее общем интуитивном плане, согласно [8], мы рассматриваем элементы комбинаторного пространства как описания работы некоторых устройств. Тогда элемент V в тех из изложенных примеров, где он имеется, отвечает описанию устройства, выполняющего в некотором смысле одновременно работу всех устройств, описываемых элементами из $\mathscr{C}$. Можно, однако, представить себе устройство, одновременно выполняющее работу некоторых (не всех) устройств, описываемых элементами из $\mathscr{C}$. Иногда оказывается возможным описать работу этого устройства при помощи элемента V, удовлетворяющего предположениям предложения 2.1. В отличие от рассмотренных выше примеров, где операция $\boldsymbol{P}$ являлась аналогом операции проектирования при помощи квантора существования, то введенная при помощи такого элемента V операция $\boldsymbol{P}$ будет соответствовать операции проектирования с несколько более ограниченной областью изменения подкванторной переменной. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пусть $\mathscr{S}$ — рассмотренное в предложении 2.8 комбинаторное пространство, M_1 — некоторое бесконечное подмножество множества M и $c \in M_1$. Поскольку отображение J инъективно, то существует такое отображение f множества M в себя, что сужение f на M_1 является биективным отображением множества M_1 в $J(M_1 \times M_1)$. Тогда для $\alpha = \lambda\, sit\,.\, I(f(s), i, t)$, $\beta = \lambda\, sit\,.\, T(s, i, t) I(s, i, c)$ и $V = \lambda\, sit\,.\, \delta_0^i \Delta(t)$, где Δ — характеристическая функция множества M_1, исполнены предположения следствия 2.7. Действительно, для $x = \lambda\, sit\,.\, \delta_0^i \delta_d^t$ из $\mathscr{C}$ имеем

$$Vx = \lambda\, sit\,.\, V(d, i, t) = \lambda\, sit\,.\, V(s, i, t) = V.$$

$$(V, V) = \lambda\, sit\,.\, \sum_{p,q \in M_1} \delta_0^i \delta^t_{J(p,q)} = \lambda\, sit\,.\, \sum_{r \in M_1} \delta^t_{f(r)} \delta_0^i = \alpha V.$$

$$\beta V = \lambda\, sit\,.\, \sum_{r \in M_1} \delta^t_{c^+} \delta^r_c \delta_0^i = T.$$

В $\mathscr{S}$ исполнено (3), следовательно, в $\mathscr{S}$ исполнены предположения следствия 2.7. Очевидно в $\mathscr{S}$ существует бесконечное число разных троек элементов, обладающих свойствами элементов α, β и V.

При некоторых ограничениях подобные операции $\boldsymbol{P}$, отвечающие более ограниченному проектированию, можно ввести также в остальных рассмотренных выше примерах.

Автор весьма признателен Д. Скордеву за помощь, оказанную им при написании настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. N. Moschovakis. Abstract first order computability. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138, 1969, 427—464.
2. R. A. Platek. Foundations of Recursion Theory. Stanford Univ., Dissert., 1966.

3. D. Skordev. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. phys.*, **24**, 1976, 23—31.
4. Д. Г. Скордев. Некоторые топологические примеры итеративных комбинаторных пространств. *Доклады БАН*, **28**, 1975, 1575—1578.
5. Д. Г. Скордев. Некоторые комбинаторные пространства, связанные со сложностью переработки данных. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 7—10.
6. Д. Г. Скордев. О частичном упорядочении множества $\mathcal{C}$ в комбинаторных пространствах. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 151—154.
7. Д. Г. Скордев. Понятие поисковой вычислимости с точки зрения теории комбинаторных пространств. *Сердика*, **2**, 1976, 343—349.
8. Д. Г. Скордев. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. София, 1980.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 10. 04. 1979;
В переработанном виде 3. 10. 1979