Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОЙ КОНСТАНТЕ, СВЯЗАННОЙ С (3, 4)-ГРАФАМИ РАМСЕЯ

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

Через $N((3, 4); r)$ обозначается наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует граф с n вершинами, который не содержит полный подграф с r вершинами такой, что при любой 2-раскраске его ребер есть либо одноцветный треугольник первого цвета, либо одноцветная 4-клика второго цвета. С Лин [4] доказал, что $N((3, 4); 9 \geqq 12$ и $N((3, 4); 8) \geqq 13$. В [8] доказано, что $N((3, 4); 9) \leqq 14$. В настоящей работе докажем неравенства $N((3, 4); 9) \geqq 13$ и $N((3, 4); 8) \geqq 14$.

1. Введение и формулировка результатов. Рассматриваются только конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. *Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа, если любое из них покрашено в красный или зеленый цвет.*

Определение 2. *Будем говорить, что вершины $v_1, \ldots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны.*

Определение 3. *Если в 2-раскраске ребер графа все ребра некоторой p-клики имеют одинаковый цвет, будем говорить, что это одноцветная p-клика в данной 2-раскраске.*

Теорема Рамсея [1], утверждает, что существует натуральное число $R(p, q)$ такое, что в любой 2-раскраске ребер полного графа с $R(p, q)$ вершинами существует либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика, однако полный граф с $R(p, q)-1$ вершинами обладает 2-раскраской ребер без одноцветной красной p-клики и без одноцветной зеленой q-клики. Известны только следующие из чисел $R(p, q)$, [2]: $R(3, 3)=6$, $R(3, 4)=R(4, 3)=9$, $R(3, 5)=R(5, 3)=14$, $R(3, 6)=R(6, 3)=18$, $R(3, 7)=R(7, 3)=23$, $R(4, 4)=18$.

Определение 4. *Будем говорить, что граф G является (p, q)-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его ребер есть либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика.*

Определение 5. *Если граф G содержит p-клику, но не содержит $(p+1)$-клику, будем говорить, что граф G имеет кликовое число p и писать $\mathrm{cl}(G)=p$.*

Из теоремы Рамсея следует, что если $\mathrm{cl}(G) \geqq R(p, q)$, то граф G является (p, q)-графом Рамсея.

Через $N((p, q); r)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует (p, q)-граф Рамсея G, который имеет n вершин и $\mathrm{cl}(G)<r$. Ясно, что число $N((p, q); r)$ не имеет смысла, если $r \leqq \max(p, q)$. Существование чисел $N((p, q); r)$, когда $r>R(p, q)$, следует из теоремы Рамсея. Ясно, что если $r>R(p, q)$, то $N((p, q); r)=R(p, q)$. В [3] доказано, что числа $N((p, q); r)$ существуют для любых натуральных $p \geqq 2$, $q \geqq 2$, $r>\max(p, q)$. В [5] доказано, что $N((3, 3); 6) \leqq 8$, а в [4], что $N((3, 3); 6) \geqq 8$. Следовательно, $N((3, 3); 6)=8$. В [6] доказано, что $N((3, 3);$

$5)\leqq 16$, а в [7] — $N((3, 3); 5)\geq 11$. Тем самым $11\leq N((3, 3); 5)\leqq 16$. Для числа $N((3, 3); 4)$ практически ничего не известно.

Цель настоящей статьи — улучшить неравенства $N((3, 4); 9)\geq 12$ и $N((3, 4); 8)\geq 13$, С. Лин [4]. Точнее докажем

Теорема. *Пусть G — граф с 12 вершинами и $\mathrm{cl}(G)<9$. Тогда граф G не является (3, 4)-графом Рамсея.*

Следствие. $N((3, 3); 9)\geq 13$.

В [8] доказано, что $N((3, 4); 9)\leqq 14$. Тем самым $N((3, 4); 9)=13$ или 14. В конце статьи докажем тоже, что $N((3, 4); 8)\geq 14$.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Если $v_1, \ldots, v_k$ — вершины графа G, то через $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством вершин $v_1, \ldots, v_k$, т. е. $V(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle)=\{v_1, \ldots, v_k\}$ и $E(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Определение 6. *Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_k$ графа G независимо, если подграф $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ не содержит ребер.*

Определение 7. *Максимальное число вершин графа G, составляющих независимое множество, назовем числом независимости графа G и обозначим $\alpha(G)$.*

Определение 8. *Будем говорить, что задано r-хроматическое разложение графа G, если множество его вершин можно разбить на r независимых, непересекающихся подмножеств. Эти независимые подмножества будем называть хроматическими классами этого разложения.*

Определение 9. *Наименьшее натуральное число r такое, что граф G облададт r-хроматическим разложением, называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$.*

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Следуя А. Зыкову [12], под соединением G_1+G_2 графов G_1 и G_2 будем подразумевать граф G, для которого $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ и $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $v_1\in V(G_1)$, $v_2\in V(G_2)$.

Определение 10. *Будем говорить, что (p, q)-граф Рамсея является критическим (p, q)-графом Рамсея, если любой собственный его подграф не является (p, q)-графом Рамсея.*

Нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1 [4]. *Пусть G — граф и $\chi(G)<R(p, q)$. Тогда граф G не является (p, q)-графом Рамсея. В частности, для (3, 4)-графа Рамсея G имеем $\chi(G)\geq 9$.*

Для удобства сформулируем в виде леммы следующее очевидное предложение.

Лемма 2. *Пусть некоторое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G имеет одноэлементные хроматические классы $\{v_1\}, \ldots, \{v_k\}$. Тогда в любом другом хроматическом классе этого разложения есть вершина, которая смежна всем вершинам $v_1, \ldots v_k$.*

Пусть v — вершина графа G. Через $A(v)$ обозначим множество всех вершин графа G, которые смежны вершине v.

Лемма 3. *Пусть v_1 и v_2 — две несмежные вершины графа G, для которых $A(v_2)\subseteq A(v_1)$. Тогда граф G не является критическим (p, q)-графом Рамсея.*

Лемма 4. *Пусть* $V(G)=V_1\cup V_2\cap\ldots\cup V_9$ *является 9-хроматическим разложением графа G такое, что подграф* $\langle V_6\cup V_7\cup V_8\cup V_9\rangle$ *не содержит 4-клик. Тогда граф G не является (3, 4)-графом Рамсея.*

Определение 11. *Пусть v_1 и v_2 — две несмежные вершины графа G, а $v_3,\ldots,v_n$ — остальные его вершины. Через $G(v_1\equiv v_2)$ обозначим граф G_1, для которого* $V(G_1)=\{v_0, v_3,\ldots,v_n\}$ *и* $E(G_1)=E(\langle v_3,\ldots,v_n\rangle)\cup E$, *где E′ состоит из всех $[v_0, v_i]$, для которых $[v_1, v_i]\in E(G)$ или $[v_2, v_i\in E(G)$, $i=3,\ldots,n$. Очевидно* $\mathrm{cl}\,(G(v_1\equiv v_2))\leqq \mathrm{cl}\,(G)+1$.

Лемма 5. *Пусть v_1 и v_2 — две несмежные вершины (p, q)-графа Рамсея G. Тогда граф $G(v_1\equiv v_2)$ тоже является (p, q)-графом Рамсея.*

2. Доказательства лемм 2, 3, 4 и 5. Доказательство леммы 2. Пусть

$$\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup\ldots\cup\{v_k\}\cup C_{k+1}\cup\ldots\cup C_m$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G. Допустим, что в некотором хроматическом классе C_i, $k+1\leqq i\leqq m$, нет вершины, смежной всем вершинам $v_1,\ldots,v_k$. Группируя любую из вершин класса C_i с несмежной ей вершине из множества $\{v_1,\ldots,v_k\}$, получим, что граф G обладает $(\chi(G)-1)$-хроматическим разложением, что невозможно.

Доказательство леммы 3. Допустим, что граф G является критическим (p, q)-графом Рамсея. Тогда его подграф $\langle V(G)-v_2\rangle$ не является (p, q)-графом Рамсея. Рассмотрим произвольную 2-раскраску ребер этого подграфа без красных p-клик и зеленых q-клик. Эту 2-раскраску продолжим до 2-раскраски ребер графа G, в которой ребро $[v_2, v_i]$ имеет такой же цвет, что и ребро $[v_1, v_i]$ в рассматриваемой 2-раскраске ребер подграфа $\langle V(G)-v_2\rangle$. Очевидно, эта 2-раскраска не содержит тоже красных p-клик и зеленых q-клик. Это является противоречием.

Доказательство леммы. 4. В [9] указана конкретная 2-раскраска ребер графа G без красных треугольников и зеленых 4-клик. Однако проверка того, что эта 2-раскраска обладает указанными свойствами, весьма скучна. Обсуждая это обстоятельство вместе с Н. Хаджиивановым, мы заметили, что построенную в [9] 2-раскраску ребер графа G можно получить следующим образом.

Рассмотрим 2-раскраску ребер графа K_9, при которой имеется единственная зеленая 4-клика и нет красных треугольников. Существование таких 2-раскрасок доказано в [10] и [11]. В [10] и [11] показано тоже, что существует 15120 таких 2-раскрасок ребер графа G и что все они изоморфны между собой. Пусть $V(K_9)=\{z_1, z_2,\ldots,z_9\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $[z_6, z_7, z_8, z_9]$ — единственная зеленая 4-клика рассматриваемой 2-раскраски ребер K_9 (кроме того, нет красных треугольников). Пусть $[v_1, v_2]\in E(G)$ и $v_1\in V_i$, $v_2\in V_j$. Тогда ребро $[v_1, v_2]$ покрасим в такой же цвет, как и ребро $[z_i, z_j]$ графа K_9. Проверка, что полученная 2-раскраска ребер графа G обладает желанными свойствами, теперь очевидна. Эта 2-раскраска не содержит красных треугольников, так как рассматриваемая 2-раскраска ребер графа K_9 тоже не содержит красных треугольников. Она не содержит и зеленых 4-клик, так как единственной зеленой 4-кликой графа K_9 является $[z_6, z_7, z_8, z_9]$, а $\langle V_6, V_7, V_8, V_9\rangle$ не содержит 4-клик.

Этим лемма 4 доказана.

Замечание. Очевидно вторая часть леммы 1 является простым следствием леммы 4.

Доказательство леммы 5. Допустим, что граф $G(v_1 \equiv v_2)$ не является (p, q)-графом Рамсея. Рассмотрим произвольную 2-раскраску его ребер без красных p-клик и зеленых q-клик. Построим 2-раскраску ребер графа G следующим образом:

1. Все ребра подграфа $\langle v_3, \ldots, v_n \rangle$ покрасим так же, как и в рассматриваемой 2-раскраске ребер графа $G(v_1 \equiv v_2)$.

2. Если ребро $[v_1, v_i]$ является ребром графа G, то оно имеет такой же цвет, что и ребро $[v_0, v_i]$ графа $G(v_1, \equiv v_2)$, $i \geqq 3$.

3. если $[v_2, v_i]$ является ребром графа G, то оно имеет такой же цвет, что и ребро $[v_0, v_i]$ графа $G(v_1 \equiv v_2)$, $i \geqq 3$.

Очевидно полученная 2-раскраска ребер графа G не содержит красных p-клик и зеленых q-клик. Это противоречит тому, что граф G является (p, q)-графом Рамсея. Лемма 5 доказана.

3. Доказательство теоремы. Допустим противное, т. е. что существует (3, 4)-граф Рамсея с 12 вершинами и кликовым числом, меньшим 9. Ясно, что такой граф содержит в качестве подграфа критический (3, 4)-граф Рамсея. Пусть G является одним из этих критических подграфов. Из $N((3, 4); 9) \geqq 12$, [4], следует, что G имеет 12 вершин, так как $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$. Согласно лемме 1, $\chi(G) \geqq 9$. Покажем, что $\chi(G) = 9$. Допустим противное, т. е. $\chi(G) \geqq 10$. Тогда любое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G содержит хотя бы 8 одноэлементных хроматических классов. Из леммы 2 следует, что $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$. Это противоречит предположению, что $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$. Итак, $\chi(G) = 9$.

Рассмотрим два случая: $\alpha(G) \geqq 3$ и $\alpha(G) = 2$.

Случай 1. $\alpha(G) \geqq 3$. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{12}\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $\langle v_{10}, v_{11}, v_{12} \rangle$ является независимым множеством вершин графа G. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$ следует, что среди вершин $v_1, \ldots, v_9$ есть две несмежные. Без ограничения общности можно предположить, что v_8 и v_9 — несмежные вершины. Тогда

$$\{v_1\} \cup \{v_2\} \cup \ldots \cup \{v_7\} \cup \{v_8, v_9\} \cup \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \tag{1}$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 2, можно предположить, что вершины v_8 и v_{10} смежны всем вершинам $v_1, \ldots, v_7$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$ следует $[v_8, v_{10}] \notin E(G)$. Заметим, что $[v_9, v_{10}] \in E(G)$ (иначе $A(v_{10}) \subseteq A(v_8)$, что противоречит лемме 3). Заметим тоже, что вершина v_{11} несмежна некоторой вершине множества $\{v_1, \ldots, v_7\}$ (иначе из $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$ следует, что $\langle v_8, v_{10}, v_{11} \rangle$ является независимым множеством, что влечет за собой $A(v_{11}) \subseteq A(v_{10})$, см. лемму 3). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_{11}, v_7] \notin E(G)$. Заметим, что $[v_9, v_7] \notin E(G)$ (иначе $A(v_{11}) \leq A(v_7)$, что противоречит лемме 3).

Рассмотрим следующие два подслучая:

1.а. Вершина v_{12} тоже несмежна вершине v_7. В этом подслучае подграф $\langle \{v_7\} \cup \{v_8, v_9\} \cup \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \rangle$ не содержит треугольников. Следовательно, для 9-хроматического разложения (1) графа G имеем, что подграф $\langle \{v_6\} \cup \{v_7\} \cup \{v_8, v_9\} \cup \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \rangle$ не содержит 4-клик. Согласно лемме 4, граф G не является (3, 4)-графом Рамсея, что является противоречием.

1. б. Вершина v_{12} смежна вершине v_7. В этом подслучае вершина v_{12} несмежна некоторой вершине множества $\{v_1, \ldots, v_6\}$ (в противном случае

$\langle v_8, v_{10}, v_{12}\rangle$ является независимым множеством, что влечет за собой $A(v_{12})\subset A(v_{10})$, см. лемму 3). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_6, v_{12}]\notin E(G)$. Заметим, что из леммы 3 следует $[v_6, v_9]\notin E(G)$ (иначе $A(v_{12})\subset A(v_6)$). Из $[v_6, v_{12}]$ и $\notin E(G)$, $[v_7, v_{11}]\notin E(G)$, $[v_6, v_9]\notin E(G)$ и $[v_7, v_6]\notin E(G)$ следует, что подграф $\langle\{v_6\}\cup\{v_7\}\cup\{v_8, v_9\}\cup\{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}\rangle$ не содержит 4-клик. Это противоречит лемме 4 (см. 9-хроматическое разложение (1)).

В случае 1 теорема доказана.

Случай 2. $\alpha(G)=2$. Рассмотрим некоторое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G. Из $\alpha(G)=2$ и $\chi(G)=9$ следует, что с точностью до номерации вершин это $\chi(G)$-хроматическое разложение имеет вид

$$\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup\ldots\cup\{v_6\}\cup\{v_7, v_8\}\cup\{v_9, v_{10}\}\cup\{v_{11}, v_{12}\}. \tag{2}$$

Согласно лемме 2, можно предположить, что вершины v_7, v_9 и v_{11} смежны всем вершинам $v_1, v_2, \ldots, v_6$. Из $\mathrm{cl}\,(G)\leqq 8$ следует $\mathrm{cl}(\langle v_7, v_9, v_{11}\rangle)\leqq 2$. Следовательно, можно предположить, что $[v_7, v_9]\notin E(G)$. Заметим, что либо v_8, либо v_{10} несмежна некоторой вершине множества $v_1, \ldots, v_6$. В самом деле, допустим, что это не так. Если вершина v_{12} несмежна некоторой вершине v_i, $1\leqq i\leqq 6$, тогда $A(v_{12})\subset A(v_i)$, что противоречит лемме 3. Если вершина v_{12} смежна всем вершинам $v_1, v_2, \ldots, v_6$, то из $\mathrm{cl}\,(G)\leqq 8$ следует $\mathrm{cl}\,(\langle v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\rangle)\subset 2$. Кроме того, в рассматриваемом случае $\alpha(G)=2$ и, следовательно, верно неравенство $\alpha(\langle v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\rangle)\leqq 2$. Последние два неравенства противоречат равенству $R(3, 3)=6$. Итак, будем предполагать, что одна из вершин v_8, v_{10} несмежна некоторой вершине из $v_1, \ldots, v_6$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_6, v_{10}]\notin E(G)$.

Покажем, что вершина v_8 смежна всем вершинам $v_1, \ldots, v_5$. Допустим, что это не так и пусть, например, $[v_1, v_8]\notin E(G)$. Тогда

$$\{v_1, v_8\}\cup\{v_2\}\cup\{v_3\}\cup\{v_4\}\cup\{v_5\}\cup\{v_6, v_{10}\}\cup\{v_{11}, v_{12}\}\cup\{v_7, v_9\}$$

является 8-хроматическим разложением графа G, что противоречит равенству $\chi(G)=9$. Следовательно, $[v_1, v_8]\in E(G)$. Аналогично доказывается, что $[v_2, v_8]$, $[v_3, v_8]$, $[v_4, v_8]$, $[v_5, v_8]\in E(G)$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 2. а. $[v_6, v_8]\notin E(G)$. В этом случае очевидно подграф $\langle\{v_6\}\cup\{v_7, v_8\}\cup\{v_9, v_{10}\}\rangle$ не содержит треугольников. Следовательно, подграф $\langle\{v_6\}\cup\{v_7, v_8\}\cup\{v_9, v_{10}\}\cup\{v_{11}, v_{12}\}\rangle$ не содержит 4-клик. Это противоречит лемме 4 (см. разложение (2)).

Подслучай 2 б. $[v_6, v_8]\in E(G)$. В этом подслучае имеем $[v_6, v_{12}]\notin E(G)$ (иначе $A(v_{10})\subset A(v_6)$, что противоречит лемме 3). Если $[v_9, v_{11}]\notin E(G)$, попадаем в условия подслучая 2 а. (разменены только места хроматических классов $\{v_7, v_8\}$ и $\{v_{11}, v_{12}\}$). Поэтому будем предполагать, что $[v_9, v_{11}]\in E(G)$. Заметим, что $[v_8, v_9]\in E(G)$ (иначе $\alpha(G)\geqq 3$). Из $[v_9, v_{11}]\in E(G)$ и $[v_8, v_9]\in E(G)$ следует $[v_8, v_{11}]\notin E(G)$ (иначе $\mathrm{cl}\,(G)\geqq 9$). Из сделанных рассуждений следует, что $\langle\{v_6\}\cup\{v_7, v_8\}\cup\{v_9, v_{10}\}\cup\{v_{11}, v_{12}\}\rangle$ не содержит 4-клик. Это противоречит лемме 4 (см. разложение (2)).

Теорема доказана полностью.

4. Нижняя оценка для числа $N((3, 4); 8)$.

Предложение. *Пусть p, q и r — натуральные числа, для которых $p\geqq 3$, $q\geqq 3$ и $\max(p, q)<r-1\leqq R(p, q)$. Тогда $N((p, q); r)\leqq N((p, q); r-1)-1$.*

Доказательство. Пусть G-(p, q) — граф Рамсея с $N((p, q); r-1)$ вершинами и $\mathrm{cl}(G)<r-1$. Так как $r-1\leqq R(p, q)$ и $N((p, q); r-1)\geqq R(p, q)$, граф G содержит хотя бы две несмежных вершин v_1 и v_2. Положим $G_1 = G(v_1\equiv v_2)$. Согласно лемме 5, G_1 является (p, q)-графом Рамсея. Очевидно $\mathrm{cl}(G_1)<r$ и $|V(G_1)|=N((p, q); r-1)$. Следовательно, $N((p, q); r)\leqq N((p, q); r-1)-1$.

Следствие. $N((3, 4); 8)\geqq 14$.

Замечание. В [13] автором доказано, что $N((3, 3); 5)\leqq 15$.

Автор благодарен Н. Хаджииванову, критические замечания которого помогли написать эту работу в теперешнем, лучшем варианте.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.* **30**, 1930, 264—286.
2. J. Graver, J. Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey theorem. *J. Combin. Theory*, **3**, 1968, 1—51.
3. J. Folkman. Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Math.*, **18**, 1970, 19—24.
4. S. Lin. On Ramsey Numbers and K_r-coloring of Graphs. *J. Combin. Theory*, Ser. B, **12**, 1972, 82—92.
5. Graham. On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles and containging no complete hexagon. *J. Combin. Theory*, **4**, 1968, 300.
6. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О числе Грахама—Спенсера. *Доклады БАН*, **32**, 1979, 155—158.
7. Н. Д. Ненов. Новая оценка снизу для числа Грахама—Спенсера $N(3, 5)$. *Сердика*, **6**, 1980, 373—383.
8. Н. Д. Ненов. О (3, 4)-графах Рамсея. *Годишник СУ*, в печати.
9. Н. Д. Ненов. Графи на Ремзи и някои константи, свързани с тях. Дисертация, Софийски университет, 1980 г.
10. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глисона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 631—633.
11. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Годишник СУ*, в печати.
12. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сборник*, **24**, 1949, 163—188.
13. Н. Д. Ненов. Пример 15-вершинного (3,3)-графа Рамсея с клнковым числом 4. *Доклады БАН*, **34**, 1981.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 873

Поступила 10. 3. 1980 ;
В переработанном виде 15. 6. 1980