Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБР ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ

АНДРЕАНА С. МАДГЕРОВА

В этой статье завершается классификация однородных алгебр функций типа C на двумерном торе T между алгебрами D_T^0 и D_T^2, где D_T^ν — алгебра всех функций на T с непрерывными производными до ν-того порядка включительно, $\nu=0, 1, \ldots; \infty$. Тор T рассматривается как фактор-многообразие R^2/Z^2 плоскости R^2 по целочисленной решетке Z^2.

В этой статье завершается классификация однородных алгебр функций типа C на двумерном торе T между алгебрами D_T^0 и D_T^2, где D_T^ν — алгебра всех функций на T с непрерывными производными до ν-того порядка включительно, $\nu=0, 1, \ldots; \infty$. Тор T рассматривается как фактор-многообразие R^2/Z^2 плоскости R^2 по целочисленной решетке Z^2.

Задача описания таких алгебр была поставлена Г. Е. Шиловым [1], замечая, что это описание „могло бы также служить основой для своеобразной классификации дифференциальных операторов второго порядка по их мультипликативным свойствам".

Здесь новыми являются однородные алгебры функций типа C на T между D_T^0 и D_T^2, которые не содержатся в D_T^1 и не содержат D_T^1, так как описание однородных алгебр R функций типа C на T с точностью до локального изоморфизма между ними в случае $D_T^1 \subset R \subset D_T^0$ дано Г. Е. Шиловым в [2], а в случае $D_T^2 \subset R \subset D_T^1$ — Б. С. Митягиным в [3]. Будем пользоваться терминологией и результатами статей [4] и [5] (основные напомнены в [6] и [7]).

Определение. *Оператор второго порядка*

$$A=\sum_{0\leqq i+k\leqq 2} a_{ik}\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}$$

будем называть параболическим, если $a_{20}a_{02}-a_{11}^2=0$ *и при* $a_{20}\neq 0$, a_{11}/a_{20} — *реальное, а при* $a_{02}\neq 0$, a_{11}/a_{02} — *реальное.*

Теорема 1. *Каждая однородная алгебра R функций типа C на двумерном торе T между алгебрами D_T^2 и D_T^0, которая не содержит и не содержится в D_T^1, имеет вид $D_T(\alpha)$ для некоторого однородного дифференциально-инвариантного пространства α с базисом $\mathscr{B}(\alpha)=\{A^{(p)}, \forall p\}$, где A — параболический оператор второго порядка; различным таким пространствам α соответствуют различные алгебры $D_T(\alpha)$, которые не содержатся в D_T^1; каждая такая алгебра локально изоморфна одной*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 3—11.

из алгебр $D_T(\alpha_\lambda)$, *где базис* α_λ *есть* $\mathscr{B}(\alpha_\lambda)=\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 1\}$, $\lambda=0, -i, 1+i\mu$; $\mu\in\mathbf{R}$.

Определение. *Однородное дифференциально-инвариантное пространство* α *есть линейное пространство* α *линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которое с каждым своим элементом* A *содержит и все его операторные производные* $A^{(p)}$.

Теорема 2 [5]. *Для каждой однородной алгебры* R *функций типа* C *на* n*-мерном* T, *между* D_T^∞ *и* D_T^0, *существует конечномерное однородное дифференциально-инвариантное пространство* α, *такое, что* R *является пополнением* D_T^∞ *по норме* p

$$pf=\sum_{A\in\mathscr{B}(\alpha)}\sup_{s\in T}|Af(s)|, \tag{1}$$

где $\mathscr{B}(\alpha)$ — *конечный базис* α. *Кроме того, каждому конечномерному дифференциально-инвариантному пространству* α *отвечает однородная алгебра функций* R *типа* C *на торе* T, $D_T^\infty\subset R\subset D_T^0$, *и которая является пополнением* D_T^∞ *по норме* (1). *Эту алгебру будем обозначать через* $D_T(\alpha)$. *При* N — *максимальный порядок операторов, входящих в* α, *имеем* $D_T^N\subset D_T(\alpha)$.

Определение. *Полным характеристическим полиномом* $\sigma(A)$ *линейного дифференциального оператора* $A=\Sigma_k a_k D^k$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, *называется полином* $\sigma(A)=\Sigma_k a_k(iX)^k$, $X=(X_1,\ldots,X_n)$.

В доказательстве теоремы 1 будем пользоватся следующими леммами и предложениями.

Лемма 1. *Пусть* $F, A, B_1,\ldots,B_m$ — *линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, для которых:*

1. *Полный характеристический полином* $\sigma(A)$ *оператора* A *порядка* N *имеет вид*

$$\sigma(A)=\sum_{|i^-|=N}a_{i^-}(X^-)^{i^-}+X_n^{N-k}\sum_{|i^-|<k}b_{i^-}(X^-)^{i^-}+P(X_1,X_2,\ldots,X_n) \tag{2}$$

при $i^-=(i,\ldots,i_{n-1})$; $X^-=(X_1,\ldots,X_{n-1})$, *где в полиноме* P, *степени меньше* N, *степень относительно* X_n *меньше* $N-k$, $k>0$.

2. *Порядок операторов* $F, B_1,\ldots,B_m$ *меньше* N.

3. *Порядок операторов* $B_1,\ldots,B_m$ *относительно* X_n *меньше* $N-k$.

4. *Порядок оператора* F *относительно* X_n *равен* $N-k_1$, $k\geq k_1>0$.

Тогда не существует такая конспанта $\varkappa$, *для которой выполнялось бы* $\|Fg\|\leq\varkappa\{\|Ag\|+\|B_1g\|+\cdots+\|B_mg\|\}$, $\forall g\in D$, *где* D — *пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, а* $\|f\|=\sup_s|f(s)|$.

И, следовательно, в частности

Лемма 1'. *Не существует такая константа* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы* $\|\frac{\partial}{\partial y}g\|\leq\varkappa\{\|(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial}{\partial y})g\|+\|\frac{\partial}{\partial x}g\|+\|g\|\}$, $\forall g\in D$.

Замечание. Целесообразно дать

Определение. *Линейный дифференциальный оператор* A *называется параболическим, если существует реальное линейное невырожденное преобразование* L *пространства* $\mathbf{R}^n$, *для которого полный характеристический полином* $\sigma(LA)$ *оператора* LA *имеет вид* (2).

Предложение 2. *Если* A — *параболический оператор с постоянными коэффициентами порядка* N *(*n *переменных* $n\geqq 2$*) и* α — *пространство* *с базисом* $\mathscr{B}(a)=\{A^{(p)}, \forall p\}$, *то на n-мерном торе T алгебра функций* $D_T(a)$ *не содержится в алгебре* D_T^{N-1}.

Лемма 3. *Пусть* $F, A, B_1, \ldots, B_m$ *— линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами из леммы* 1. *Пусть не существует такая константа* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы*

$$\|Fg\| \leqq \varkappa\{\|Ag\| + \|B_1 g\| + \cdots + \|B_m g\|\} \tag{3}$$

для $\forall g \in D$. *Тогда не существует и константа* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы* (3) *для* $\forall g \in D_\varrho$, *где* D_ϱ *есть пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в* $\{x: |x| \leqq \varrho\}$, $\varrho > 0$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $A_\gamma = \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial y}$ и a_γ — линейное пространство с базисом $\mathscr{B}(a_\gamma) = \{A_\gamma, \partial/\partial x, 1\}$.

Предложение 2'. *Алгебра функций на двумерном торе* $T - D_T(a_\gamma)$ *не содержится в алгебре* D_T^1.

Предложение 4. *Если* $\gamma \neq \delta$, *то* $D_T(a_\gamma) \neq D_T(a_\delta)$.

Предложение 5. *Алгебры* $D_T(a)$ *функций на двумерном торе, если базис* $\mathscr{B}(a)$ *пространства* a *равен* $\mathscr{B}(a)=\{A^{(p)}, \forall p\}$, *где* A *— параболический оператор с постоянными коэффициентами второго порядка, являются однородными алгебрами функций типа C на двумерном торе T, для которых*

1) $D_T^2 \subset D_T(a) \subset D_T^0$;

2) $D_T(a) \not\subset D_T^1$;

3) $D_T^1 \not\subset D_T(a)$;

4) *Для различных пространств* a *указанного вида алгебры* $D_T(a)$ *различные*.

С помощью этих лемм и предложений доказательство теоремы 1 проводится так: из теоремы 2 вытекает, что каждая алгебра R, удовлетворяющая условиям теоремы 1, имеет вид $D_T(a)$ для некоторого однородного дифференциально-инвариантного пространства a, состоящегося из операторов порядка не выше 2. Так как R не содержит D_T^1, то в a имеются операторы второго порядка. Напомним еще:

Определение. *Линейный дифференциальный оператор P порядка* $d>0$ *с постоянными коэффициентами называется эллиптическим, если однородная часть порядка d характеристического полинома оператора P аннулируется только в нуле в* $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3 [8]. *Пусть P и Q — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; оператор P эллиптический и порядок оператора Q ниже, чем порядок оператора P. Тогда существует такая константа* $\varkappa$, *что* $\|Qg\| \leqq \varkappa(\|Pg\| + \|g\|)$, $\forall g \in D^\infty$.

Если хоть один из операторов второго порядка, принадлежащих пространству a, $A = \sum_{0 \leqq i+k \leqq 2} a_{ik} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial x^k}$, не является параболическим, то:

I. Если $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$, то так как пространство a дифференциально-инвариантное, то a содержит операторы $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$, т. е. $D_T(a) \subset D_T^1$.

II. Если $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ и при $a_{20} \neq 0$, $\operatorname{Im} a_{11}/a_{20} \neq 0$ или при $a_{02} \neq 0$, $\operatorname{Im} a_{11}/a_{02} \neq 0$, то оператор A эллиптический и в силу теоремы 3 существуют такие константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x} g\right\| \leqq \varkappa_1(\|Ag\|+\|g\|),\ \left\|\frac{\partial}{\partial y} g\right\| \leqq \varkappa_2(\|Ag\|+\|g\|),\ \forall g \in D.$$

А это достаточно, чтобы утверждать, что $D_T(\alpha) \subset D_T^1$. Но мы здесь не рассматриваем случай $D_T(\alpha) \subset D_T^1$. Итак, для изучаемых $D_T(\alpha)$ все операторы второго порядка пространства α параболические.

Пусть A_1 и A_2 суть два параболических операторов пространства α. Очевидно, что алгебра $D_T(\alpha)$ локально изоморфна некоторой алгебре $D_T(\alpha')$, где при этом оператор A_1 переходит в оператор $A_1' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}$. Так как $D_T(\alpha) \not\subset D_T^1$, то и $D_T(\alpha') \not\subset D_T^1$. Отсюда оператор A_2 переходит в оператор $C(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial x})$. Ввиду $D_T(\alpha') \not\subset D_T^1$, при этом $\lambda = \mu$. Следовательно, однородные части второго порядка операторов A_1 и A_2 пропорциональны, т. е. если $A_1 = \sum_{0 \leqq i+k \leqq 2} a_{ik} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}$, то можем считать $A_2 = \sum_{i+k=2} a_{ik} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} + b_{10} \frac{\partial}{\partial x} + b_{01} \frac{\partial}{\partial y} + b_{00}$. Но тогда опять из $D_T(\alpha) \not\subset D_T^1$, так как

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{10}-b_{10} & a_{01}-b_{01} \\ a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{pmatrix} = 1$$

можно получить, что $A_2 \in \beta$, где β есть пространство с базисом $\mathscr{B}(\beta) = \{A_1^{(p)}, \forall p\}$. Доказательство теоремы 1 окончено.

Будем пользоваться еще следующей теоремой.

Теорема 4 [8]. *Пусть $A, A_1, \ldots, A_m$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Для того чтобы существовала константа $\varkappa$, такая, что*

$$\|Ag\| \leqq \varkappa(\|A_1 g\| + \cdots + \|A_m g\|), \quad \forall g \in D, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали интегрируемые меры $\mu_1, \ldots, \mu_m$ такие, что для их Фурье-Стильтесовых трансформаций $M_1, \ldots, M_m$ соответственно выполнялось

$$\sigma(A) = M_1 \sigma(A_1) + \cdots + M_m \sigma(A_m). \tag{5}$$

Если условие (4) выполнено и порядок операторов $A_1, \ldots, A_m$ не превосходит N, то: 1) порядок оператора A тоже не превосходит N и 2) если обозначим через $A^N, A_1^N, \ldots, A_m^N$ однородные части порядка N операторов $A, A_1, \ldots, A_m$ соответственно, то $A^N = d_1 A_1^N + \cdots + d_m A_m^N$, где d_i — масса меры μ_i в нуле, $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство леммы 1. Допустим противное. Тогда из теоремы 4 вытекает, что существуют такие интегрируемые меры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, что для их Фурье-Стильтесовых трансформаций $M_0, M_1, \ldots, M_m$ соответственно верно равенство

$$\sigma(F) = M_0 \sigma(A) + M_1 \sigma(B_1) + \cdots + M_m \sigma(B_m). \tag{6}$$

В (6) фиксируем $X^- = C^- = (c_1, \ldots, c_{n-1})$, делим на $X_n^{N-k} \neq 0$ и совершаем граничный переход $|X_n| \to \infty$. Имея в виду ограниченность Фурье-Стильтесовых трансформаций M_i, $i = 1, \ldots, m$, получаем, что при $\sum_{|i^-| < k_1} d_{i^-} (C^-)^{i^-} \neq 0$

имеем

$$(7)\qquad \lim_{|X_n|\to\infty} M_0(C^-, X_n) = \begin{cases} \pm\infty & \text{при } k > k_1 \\ \sum\limits_{|i^-|<k_1} d_{i^-}(C^-)^{i^-} \Big/ \sum\limits_{|i^-|<k} b_{i^-}(C^-)^{i^-} & \text{при } k = k_1 \end{cases},$$

где $X_n^{N-k_1} \sum\limits_{|i^-|<k_1} d_{i^-}(X^-)^{i^-}$ — член порядка $N-k_1$ относительно X_n в полиноме $\sigma(F)$. Но опять из теоремы 4 получаем $0 = \alpha A^N$, где A^N — однородная часть порядка N оператора A, а a — масса меры μ_0 в точке 0. Итак, $\alpha = 0$. Лемма в [9] утверждает, что функция $f \equiv \alpha$ (так как α — масса в нуле интегрируемой меры μ_0) может быть аппроксимирована равномерно последовательностью вида $\{\pi_e * M_0\}$, где π_e — вероятностная мера с конечным носителем. Отсюда получаем противоречие, так как $\alpha = 0$, а при $\sum\limits_{|i^-|<k_1} d_{i^-}(C^-)^{i^-}) \neq 0$ для M_0 верно (7). Доказательство леммы 1 окончено.

Доказательство леммы 3 можно быстро получить посредством некоторых результатов о проективных пределах (эти результаты можно найти, например, в [10]). Но чтобы не проводить новые определения и результаты, изложим непосредственное доказательство. Общий случай леммы 3 легко сводится к следующему случаю. Пусть

$$A^* = \sum_{|i^-|=N} a_{i^-}(D^-)^{i^-} + D_n^{N-k} \sum_{|i^-|=j_0} b_{i^-}(D^-)^{i^-};\ F^* = D_n^{N-k_1} \sum_{|i^-|=j_1} d_{i^-}(D^-)^{i^-}$$

при $0 < k_1 \leq k$, $j_0 \leq k-1$, $j_1 \leq k_1 - 1$, и где $D^- = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{n-1}) = {}_xD^-$, $D_n = {}_xD_n = \partial/\partial x_n$. Не существует такой константы $\varkappa$, чтобы выполнялось

$$(8)\qquad \|F^* f\| \leq \varkappa \|A^* f\|$$

для $\forall f \in D_\varrho$, $\varrho > 0$ (D_ϱ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\{x : |x| \leq \varrho\}$).

В сущности в этой статье пользуемся только этим случаем.

Допустим, что для $\forall \varrho > 0$ существует константа $\varkappa = \varkappa(\varrho)$, удовлетворяющая (8) для $\forall f \in D_\varrho$. Через $\varkappa_\varrho$ обозначим $\varkappa_\varrho = \min\{\varkappa : \|F^* f\| \leq \varkappa \|A^* f\|, \forall f \in D_\varrho\}$. Тогда для $\varkappa_\varrho - \varepsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, существует функция $f_\varrho \in D_\varrho$, такая, что

$$(9)\qquad (\varkappa_\varrho - \varepsilon)\|A^* f_\varrho\| < \|F^* f_\varrho\|.$$

Рассмотрим функции $g_\varrho(u_1, \ldots, u_n)$, определенные из $g_\varrho(a x_1, \ldots, a x_{n-1}, a^* x_n) = f_\varrho(x_1, \ldots, x_n)$, где a, a^* — положительные константы. При $a \leq \varrho_0/\varrho$ и $a^* \leq \varrho_0/\varrho$ имеем $g_\varrho \in D_{\varrho_0}$. В этом случае неравенство (9) преобразуется в

$$(10)\qquad (\varkappa_\varrho - \varepsilon)\|a^N \sum_{|i^-|=N} a_{i^-}({}_uD^-)^{i^-} g_\varrho + a^{j_0} a^{*N-k} {}_uD_n^{N-k} \sum_{|i^-|=j_0} b_{i^-}({}_uD^-)^{i^-} g_\varrho\|$$

$$-\varkappa_{\varrho_0} a_*^{N-k_1} a^{j_1} \|{}_uA^* g_\varrho\| < 0.$$

При $a^* = a^{(N-j_0)/(N-k)}$, если опять $a \leq \varrho_0/\varrho$ и $a^* \leq \varrho_0/\varrho$, то (10) преобразуется в $a^N \|A^* g_\varrho\| [\varkappa_\varrho - \varepsilon - a^{s_0} \varkappa_{\varrho_0}] < 0$, т. е. получаем

$$(11)\qquad (\varkappa_\varrho - \varepsilon) - a^{s_0}\varkappa_{\varrho_0} < 0, \text{ где } s_0 = (N-j_0)(N-k_1)/(N-k) - N + j_1.$$

В силу леммы 1 оператор A^* не мажорирует F^* на D, т. е. не существует константы $\varkappa$, удовлетворяющей неравенству (8) для $\forall f \in D$. Отсюда $\varkappa_\varrho \xrightarrow[\varrho\to\infty]{} \infty$.

Если $s_0 \geqq 0$, то при $a=\varrho_0/\varrho$ и $\varrho_0<\varrho$ неравенство (11) для достаточно больших ϱ противоречит условию $\varkappa_\varrho \to \infty$.

В случае $s_0<0$ при $a=\varrho_*/\varrho$, где $\varrho_*=\varrho_0^{(N-k)/(N-j_0)}$, если $\varrho>1$, $\varrho_0>1$, опять имеем $a \leqq \varrho_0/\varrho$ и $a^*=a^{(N-j_0)/(N-k)} \leqq \varrho_0/\varrho$. Поэтому неравенство (11) позволяет оценить рост $\varkappa_\varrho$ при $\varrho \to \infty$, а именно $\varkappa_{\varrho_0} \geqq \varkappa_\varrho a^{-s_0}$, и если фиксируем ϱ, получаем $\varkappa_{\varrho_0} \geqq O(\varrho_0^{-s_0(N-k)/(N-j_0)}$ при $\varrho_0 \to \infty$, где $(-s_0)(N-k)/(N-j_0)>0$.

Функции f_ϱ, удовлетворяющие неравенство (9), можем выбрать так, что $\|A^*g_\varrho\|=K$ — константа. Фиксируем $\varrho_0>0$. Преобразуем (10) в виде

$$(\varkappa_\varrho-\varepsilon)\frac{a^{j_0-j_1}}{a_*^{k-k_1}}\left\|\frac{a^{N-j_0}}{a_*^{N-k}}\sum_{|i^-|=N} a_{i^-}(D^-)^{i^-}g_\varrho + D_n^{N-k_1}\sum_{|i^-|=j_0} b_{i^-}(D^-)^{i^-}g_\varrho\right\|$$

$$-\varkappa_{\varrho_0}\|A^*g_\varrho\|<0.$$

И так как единственные ограничения на a и a^* суть неравенства $a \leqq \varrho_0/\varrho$, $a^* \leqq \varrho_0/\varrho$, опять получаем противоречие (например, если выберем $\varrho_0=1$, $a=1/\varrho^\alpha$, $a^*=1/\varrho^\beta$, где константы $\alpha \geqq 1$, $\beta \geqq 1$ удовлетворяют условиям $-s_0(N-k)/(N-j_0)+\beta(k-k_1)-\alpha(j_0-j_1) \geqq 0$, $\beta(N-k)-\alpha(N-j_0) \geqq 0$ и при этом хоть одно из неравенств строгое).

Эту лемму 3 можно формулировать и как утверждение о вложении некоторых пространств функций.

Доказательство предложения 2'. Допустим, что $\gamma \neq 0$ и $D_T(a_\gamma) \subset D_T^1$. Тогда из теоремы о замкнутом графике следует, что существует такая константа $\varkappa$, что $\left\|\frac{\partial}{\partial y} g\right\| \leqq \varkappa\left[\|A_\gamma g\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x} g\right\|+\|g\|\right]$, $\forall g \in D_T(a_\gamma)$.

Так как $D_T(a_\gamma) \supset D_T^\infty$, то это противоречит леммам 1' и 3.

В случае $\gamma=0$ утверждение предложения 2' очевидно. Доказательство окончено.

Доказательство предложения 4. Допустим, что $D_T(a_\gamma)=D_T(a_\delta)$. Тогда из теоремы о замкнутом графике следует, что $\|A_\delta g\| \leqq \varkappa\{\|A_\gamma g\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x} g\right\| +\|g\|\}$ для некоторой константы $\varkappa$. Если $\gamma \neq \delta$, то имеем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y} g\right\|=\left\|\frac{1}{\gamma-\delta}(A_\gamma-A_\delta)g\right\| \leqq \left[\frac{\varkappa}{|\gamma-\delta|}+1\right]\left(\|A_\gamma g\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x} g\right\|+\|g\|\right),$$

$\forall g \in D_T^\infty$. Отсюда получаем, что $D_T(a_\gamma) \subset D_T^1$. Противоречие доказывает, что $D_T(a_\gamma)=D_T(a_\delta)$ только при $\gamma=\delta$.

Доказательство предложения 5. Очевидна верность утверждения в пунктах 1 и 3. Пункт 2: $D_T(a) \not\subset D_T^1$, так как $D_T(a)$ очевидно локально изоморфна некоторой алгебре вида $D_T(a_\gamma)$, а алгебра не содержится в D_T^1 в силу предложения 2'.

Пункт 4. Если алгебры $D_T(\alpha)$ и $D_T(\beta)$ совпадают, $D_T(\alpha)=D_T(\beta)$, где $\mathscr{B}(\alpha)=\{A^{(p)}, \forall p\}$, $\mathscr{B}(\beta)=\{B^{(p)}, \forall p\}$, а A и B — параболические операторы с постоянными коэффициентами второго порядка, то из теоремы о замкнутом графике и из теоремы 4 следует, что однородные части второго порядка операторов A и B пропорциональны.

Но тогда с одним и тем же преобразованием алгебры $D_T(\alpha)$ и $D_T(\beta)$ локально приводятся в вид $D_T(a_\gamma)$ и $D_T(a_\delta)$ соответственно. Так как допустили, что $D_T(\alpha)=D_T(\beta)$, то и $D_T(a_\gamma)=D_T(a_\delta)$. Но в силу предложения 4 следует, что тогда $\gamma=\delta$.

Отсюда получаем, что $\alpha=\beta$. (Конечно не всегда $A=cB$.) Доказательство окончено.

Целесообразно дать следующее определение сильной обобщенной производной.

Пусть A — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Функцию g: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ будем называть A-сильной обобщенной производной функции f, если существует такая последовательность $\{\varphi_l\}$ бесконечно дифференцируемых функций, что последовательности $\{A^{(p)}\varphi_l\}$ $\forall p$ сходятся равномерно на каждом компакте $F\subset\mathbb{R}^n$, $(\varphi_l)\to f$ и $(A\varphi_l)\to g$. Функцию g будем обозначать через Af.

В работе [5] доказано

Предложение 6. *Пусть последовательность (f_l) удовлетворяет условиям: 1) каждая функция f_l определена и имеет непрерывные частные производные до N-того порядка включительно на некотором открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$.*

2. Для линейного дифференциального оператора A с постоянными коэффициентами порядка N выполнено $(A^{(p)}f_l)\xrightarrow{\text{равн. на } C} 0$ для $\forall p>0$; $(Af_l)\xrightarrow{\text{равн. на } G} F$. Тогда $F=0$ на G.

Отсюда, если существует обобщенная сильная производная Af, то она однозначно определена, т. е. не зависит от выбора последовательности (φ_l).

Например, очевидно, что если $A=\partial^k/\partial x^k$, то если существует обобщенная сильная производная Af, то существует и производная $Af=\partial^k/\partial x^k f$ в обычном смысле, и обе производные равны, $k=(k_1,\ldots,k_n)$.

Утверждение предложения $2'$ эквивалентно существованию непрерывной функции f, у которой есть обобщенная сильная производная $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial y})f$, но f не имеет непрерывной производной по y.

Как частный случай леммы 1 и леммы 3 получается теорема, эквивалентная предложению $2'$:

Теорема 5. *Пусть $\varrho>0$. Не существует константы $\varkappa$, для которой выполнялось бы*

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial y}\right\|\leq\varkappa\left\{\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)g\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x}g\right\|+\|g\|\right\},\ \forall g\in D_\varrho,$$

где D_ϱ есть множество всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\{(x,y)\colon|(x,y)|\leq\varrho\}$, $\|f\|=\sup\limits_{(x,y)}|f(x,y)|$.

Эта теорема имеет и самостоятельный интерес. Поэтому приведем непосредственное конструктивное доказательство. Идея искать это второе доказательство посредством свертки с фундаментальным решением принадлежит В. П. Паламодову, за что автор приносит ему благодарность.

Доказательство. Пусть $E(x,y)$ — фундаментальное решение оператора $A_\lambda=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}$, т. е. $A_\lambda E(x,y)=\delta(x,y)$, где

$$E(x,y)=\begin{cases}\varkappa_1\dfrac{\theta(y)}{\sqrt{y}}\,e^{\lambda x^2/4y} & \text{при}\quad \operatorname{Re}\lambda=0\\[2ex] \varkappa_2\dfrac{\theta(-y\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda)}{\sqrt{y}}\,e^{\lambda x^2/4y} & \text{при}\quad \operatorname{Re}\lambda\neq0\end{cases},$$

$\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — константы, $\theta(y)$ — функция Хевисайда.

Пусть функция $\psi_0 \in D$ с носителем в $(-2-\varepsilon, -1+\varepsilon)\times(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ неотрицательная, равная 1 в $(-2, -1)\times(a, b)$, где при $\operatorname{Re}\lambda>0$ имеем $(a, b) = (1, 4)$, а при $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$ имеем $(a, b)=(-4, -1)$; $\varepsilon=1/2$. Рассмотрим $\psi_N(x, y) = \Sigma_{k=0}^N \psi_0(2^k x, 2^{2k}y)$. Образуем $E*\psi_N$, $E'_x*\psi_N$, $E'_y*\psi_N$. Имеем

$$E'_y*\psi_N = -C(\lambda)\iint\limits_{G_\lambda} e^{\lambda x^2/4y}\left(1+\frac{\lambda x^2}{2y}\right)\frac{1}{2y^{3/2}}\psi_N(u-x, v-y)\,dxdy$$

$$= -C(\lambda)\iint\limits_{G'_\lambda} e^{\lambda\eta}(1+2\lambda\eta)\frac{1}{|x|\sqrt{\eta}}\psi_N\left(u-x, v-\frac{x^2}{4\eta}\right)dxd\eta,$$

где $\eta=x^2/4y$, а константа $C(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda=0$ равна $\varkappa_1$, а при $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$ равна $\varkappa_2$; и где $G_\lambda=\{(x, y): x\in \mathsf{R}$, при $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$, $y>0$, а при $\operatorname{Re}\lambda>0$, $y<0\}$.

Пусть $(a_k, b_k)\times(\alpha_k, \beta_k)$ содержит носитель функции $\psi_k(x, y)=\psi_0(2^k x, 2^{2k}y)$, тогда если: 1) $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$ и при $v-\alpha_k$, $v-\beta_k>0$ и 2) если $\operatorname{Re}\lambda>0$ и при $v-\alpha_k<0$, $v-\beta_k<0$, имеем и в обоих случаях $u-b_k\leq x\leq u-a_k$; $x^2/4(v-\alpha_k) \leq\eta\leq x^2/4(v-\beta_k)$.

Поэтому при $u=0$, $v=0$ получаем после смены $\xi=2^k x$: 1) при $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$E'_y*\psi_N = -(N+1)\varkappa_2\int\limits_{1-\varepsilon}^{2+\varepsilon}\int\limits_{-\xi^2/2}^{-\xi^2/18}\frac{e^{\lambda\eta}(1+2\lambda\eta)}{|\xi|\sqrt{\eta}}\psi_0\left(-\xi, \frac{-\xi^2}{4\eta}\right)d\xi d\eta;$$

2) при $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$

$$E'_y*\psi_N = -C(\lambda)(N+1)\int\limits_{1-\varepsilon}^{2+\varepsilon}\int\limits_{\xi^2/12}^{+\xi^2/2}\frac{e^{\lambda\eta}}{|\xi|\sqrt{\eta}}(1+2\lambda\eta)\psi_0\left(-\xi, \frac{-\xi^2}{4\eta}\right)d\xi d\eta.$$

Очевидно, что при $N\to\infty$ имеем $|(E'_y*\psi_N)(0, 0)\to\infty$. Так как

$$E*\psi_N = C_1(\lambda)\iint e^{\lambda\tau^2}\psi_N(u-2y\tau, v-y)\,d\tau dy$$

и

$$E'_x*\psi_N = C_2(\lambda)\iint\limits_{G'_\lambda}\frac{e^{\lambda\eta}}{\sqrt{\eta}}\psi_N\left(u-x, v-\frac{x^2}{4\eta}\right)dxd\eta,$$

то $\|E*\psi_N\|_K$ и $\|E'_x*\psi_N\|_K$ ограничены на каждом компакте K.

Пусть $h(x, y)\in D_\varrho$ и $h(0, 0)\neq 0$. Образуем $g_N=h(E*\psi_N)$. Тогда $\left\|\frac{\partial}{\partial y}g_N\right\| = \|(h'_y)(E*\psi_N)+h(E'_y*\psi_N)\|\xrightarrow[N\to\infty]{}\infty$. С другой стороны, поскольку

$$\|A_\lambda g_N\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x}g_N\right\|+\|g_N\| = \|(A_\lambda h)(E*\psi_N)+h\psi_N+2h'_x(E'_x*\psi_N)\|$$

$$+\|h'_x(E*\psi_N)+h(E'_x*\psi_N)\|+\|h(E*\psi_N)\|,$$

то $\|A_\lambda g_N\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x}g_N\right\|+\|g_N\|$ остается ограничено при $N\to\infty$. С этим и второе доказательство теоремы 5 окончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов. О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец. *Успехи мат. наук*, 12, 1957, вып. 1, 216-249.

2. Г. Е. Шилов. Об однородных кольцах функций на торе. *Доклады АН СССР*, **82**, 1952 681-684.
3. Б. С. Митягин. О некоторых свойствах функций двух переменных. *Вестник МГУ*, вып. **5**, 1959, 137-152.
4. Г. Е. Шилов. Однородные кольца функций. *Успехи мат. наук*, **6**, вып. 1, 1951, 91-137.
5. А. С. Мадгерова. Об однородных алгебрах функций на торе и их примарных идеалах. *Материалы третьей научной конференции болгарских аспирантов, обучающихся в СССР*. Москва, 1978, 532-541.
6. А. С. Мадгерова. Изоморфизмы однородных алгебр функций на торе. *Сердика*, **7**, 1981, 195-206.
7. А. С. Мадгерова. Об изоморфизмах некоторых алгебр функций на n-мерном торе. *Доклады БАН*, **33** 1980, 747-750.
8. K. de Leeuw, H. Mirkil. A priori estimates for differential operator in L_∞ norm. *Ill. J. Math.*, **8**, 1964, 112-124.
9. F. W. Eberlein. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 1949, 217-240.
10. В. П. Паламодов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 1. 8. 1979;
В переработанном виде 29. 6. 1981