Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТРИ-ТКАНИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

ГЕОРГИ З. ЗЛАТАНОВ, БИСТРА Б. ЦАРЕВА

В данной работе рассматриваются ортогональные три-ткани в трехмерном пространстве Вейля. Вводятся трансверсальные векторы векторных полей линий три-ткани, геодезические кривизны ее линий, геодезический вектор. Найдено необходимое и достаточное условие геодезичности ортогональной три-ткани.

1. Трансверсалы векторного поля в трехмерном пространстве Вейля. Путь W_3 — трехмерное пространство Вейля с невырожденным симметрическим основным тензором g_{is} и дополнительным вектором T_k.

Опускание и поднятие индексов в W_3 проделаем при помощи тензора g_{is} и его взаимного g^{is}.

Пусть в W_3 даны три взаимно ортогональные векторные поля x_i, y_i, z_i, удовлетворяющие условиям:

$$g_{is}x^ix^s=1,\quad g_{is}y^iy^s=1,\quad g_{is}z^iz^s=1,$$
$$g_{is}y^iz^s=0,\quad g_{is}z^ix^s=0,\quad g_{is}x^iy^s=0. \tag{1}$$

Согласно [1] и (1), следует, что x^i, y^i, z^i и x_i, y_i, z_i имеют вес

$$x^i\{-1\},\quad y^i\{-1\},\ z^i\{-1\},\quad x_i\{1\},\quad y_i\{1\},\quad z_i\{1\}. \tag{2}$$

В работе [2] получены деривационные формулы для векторных полей x_i, y_i, z_i. Используя продолженное ковариантное дифференцирование и учитывая (2), придаем следующий вид этим деривационным формулам:

$$\dot{\nabla}_k x_i = r_k y_i + q_k z_i,\quad \dot{\nabla}_k y_i = -r_k x_i + p_k z_i,\quad \dot{\nabla}_k z_i = -q_k x_i - p_k y_i. \tag{3}$$

При помощи (1) и (3) получаем следующее представление коэффициентов:

$$\begin{aligned} r_k &= g_{is}y^s\dot{\nabla}_k x^i = -g_{is}x^s\dot{\nabla}_k y^i,\\ q_k &= g_{is}z^s\dot{\nabla}_k x^i = -g_{is}x^s\dot{\nabla}_k z^i,\\ p_k &= g_{is}z^s\dot{\nabla}_k y^i = -g_{is}y^s\dot{\nabla}_k z^i. \end{aligned} \tag{4}$$

Из [1] (2) и (4) следует, что каждый из ковекторов r_k, q_k и p_k имеет вес $\{0\}$.

Следуя [3], говорим, что тройка векторных полей x_i, y_i, z_i определяет ортогональную три-ткань (x, y, z) в W_3.

Пусть x'_i, y'_i, z'_i — другая тройка взаимно ортогональных векторных полей в W_3, удовлетворяющих условиям, аналогичным (1). Деривационные формулы для x'_i, y'_i, z'_i будут вида (3); обозначим коэффициенты в них через r'_k, q'_k, p'_k.

Связь между направляющими векторами двух три-тканей (x, y, z) и (x', y', z') задаем посредством следующих двух групп формул:

$$\begin{aligned} x_i &= bx'_i + cy'_i + \sin\psi\sin\theta\, z'_i, \\ y_i &= ax'_i + dy'_i - \cos\psi\sin\theta z'_i, \\ z_i &= \sin\varphi\sin\theta\, x'_i + \cos\varphi\sin\theta\, y'_i + \cos\theta z'_i \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} x'_i &= bx_i + ay_i + \sin\varphi\sin\theta z_i \\ y'_i &= cx_i + dy_i + \cos\varphi\sin\theta z_i, \\ z'_i &= \sin\psi\sin\theta x_i - \cos\psi\sin\theta y_i + \cos\theta z_i, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta$, $b = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta$, $c = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta$, $d = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta$, а φ, ψ, θ — углы Ойлера.

Используя (5), (6), деривационные формулы (3) и аналогичные им формулы для полей x'_i, y'_i, z'_i, находим следующую связь между коэффициентами r_k, q_k, p_k и r'_k, q'_k, p'_k:

$$\begin{aligned} r'_k &= \varphi_k + (\psi_k + r_k)\cos\theta + (p_k\sin\psi + q_k\cos\psi)\sin\theta, \\ q'_k &= \theta_k\sin\varphi - (\psi_k + r_k)\cos\varphi\sin\theta + (p_k\sin\psi \\ &\quad + q_k\cos\psi)\cos\varphi\cos\theta + (p_k\cos\psi - q_k\sin\psi)\sin\varphi, \\ p'_k &= \theta_k\cos\varphi + (\psi_k + r_k)\sin\varphi\sin\theta - (p_k\sin\varphi \\ &\quad + q_k\cos\psi)\sin\varphi\cos\theta + (p_k\cos\psi - q_k\sin\psi)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

В частных случаях, когда совпадают векторные поля а) x_i и x'_i, в) y_i и y'_i, с) z_i и z'_i, формулы (7) принимают, соответственно, вид

$$r'_k = r_k\cos\theta + q_k\sin\theta, \quad q'_k = -r_k\sin\theta + q_k\cos\theta, \; p'_k = p_k + \theta_k; \tag{8_a}$$

$$r'_k = r_k\cos\theta - p_k\sin\theta, \; q'_k = q_k + \theta_k, \; p'_k = p_k\cos\theta + r_k\sin; \tag{8_b}$$

$$r'_k = r_k + \varphi_k, \quad q'_k = p_k\sin\varphi + q_k\cos\varphi, \quad p'_k = p_k\cos\varphi - q_k\sin\varphi. \tag{8_c}$$

Если $u_i = u_i(t)$, трансверсальные линии поля x_i, т. е. линии, по которым направление x_i переносится параллельно, согласно [4] и [5] удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_k x_i du^k = \lambda x_i. \tag{9}$$

Так как $\nabla_k x_i = r_k y_i + q_k z_i + T_k x_i$, то (9) будет выполнено при условии $r_k du^k y_i + q_k du^k z_i = 0$. Отсюда следует

Теорема 1. *Трансверсальный вектор поля x_i ортогонален площадке r_k, q_k.*

Аналогично доказывается и утверждение:

Трансверсальный вектор поля y_i (z_i) ортогонален площадке r_k, p_k (p_k, q_k).

Рассмотренные частные случаи а), в), с) и соответствующие им формулы (8а), (8в), (8с) показывают, что трансверсальные векторы каждого из полей x_i, y_i, z_i определяются однозначно через ковекторы r_k, q_k, p_k независимо от ортогональной тройки, в которую оно включено.

2. Геодезический вектор ортогональной три-ткани в трехмерном пространстве Вейля. Рассмотрим тензор

$$\varepsilon_{ijk} = 3!\ x_{[i}y_j z_{k]}, \tag{10}$$

введенный в [2].

При помощи результатов из п. 1 находим, что тензор (10) обладает свойствами:

1. $\dot{V}_s \varepsilon_{ijk} = 0$.

2. $\varepsilon_{ijk}x^i y^j = z_k$, $\varepsilon_{ijk}y^i z^j = x_k$, $\varepsilon_{ijk}z^i x^j = y_k$.

3, Вес ε_{ijk} $\{3\}$.

Посредством проверки устанавливаем, что вектор ${}_xt_k = \varepsilon_{ijk}r^i q^j$ ортогонален площадке r_k, q_k. Следовательно, ${}_xt_k$ и трансверсальный вектор поля x_i колинеарные. Это позволяет нам назвать вектор ${}_xt_k$ трансверсальным вектором поля x_i.

Аналогично векторы ${}_yt_k = \varepsilon_{ijk}r^i p^j$, ${}_zt_k = \varepsilon_{ijk}q^i p^j$ называем трансверсальными векторами, соответственно полей y_i и z_i.

Трансверсальные векторы имеют вес

$$ {}_xt_k\{-1\}, \quad {}_yt_k\{-1\}, \quad {}_zt_k\{-1\}. \tag{11}$$

Верна следующая

Т е о р е м а 2. *Линии* (x) *ортогональной три-ткани геодезические тогда и только тогда, когда*

$$ {}_xt_k y^k = 0, \quad {}_xt_k z^k = 0. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть линии (x) геодезические, т. е. трансверсали поля x_i. Но тогда векторы x_i и ${}_xt_i$ колинеарные, откуда следует, что ${}_xt_i$ ортогонален площадке y_i, z_i. Следовательно, выполнены условия (12).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть условия (12) выполнены, т. е. трансверсальный вектор ${}_xt_k$ поля x_k ортогонален площадке y_k, z_k. Но тогда векторы x_k и ${}_xt_k$ колинеарны, из чего следует, что линии (x) геодезические.

Аналогично доказываются и утверждения:

Необходимым и достаточным условием геодезичности линий (y), *соответственно* (z), *ортогональной три-ткани* (x, y, z) *является выполнение условий* ${}_yt_s x^s = 0$, ${}_yt_s z^s = 0$, *соответственно* ${}_zt_s x^s = 0$, ${}_zt_s y^s = 0$.

Введем величины ${}_{12}\varepsilon = {}_xt_s y^s$, ${}_{21}\varepsilon = {}_yt_s x^s$, ${}_{31}\varepsilon = {}_zt_s x^s$, ${}_{13}\varepsilon = {}_xt_s z^s$, ${}_{23}\varepsilon = {}_yt_s z^s$, ${}_{32}\varepsilon = {}_zt_s y^s$ и ${}_x\varepsilon = ({}_{12}\varepsilon^2 + {}_{13}\varepsilon^2)^{1/4}$, ${}_y\varepsilon = ({}_{21}\varepsilon^2 + {}_{23}\varepsilon^2)^{1/4}$, ${}_z\varepsilon = ({}_{31}\varepsilon^2 + {}_{32}\varepsilon^2)^{1/4}$.

Из-за (2) и (11) для их веса получаем

$$ {}_{ij}\varepsilon\{-2\}, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ 2,\ 3; \quad {}_x\varepsilon\{-1\}, \quad {}_y\varepsilon\{-1\}, \quad {}_z\varepsilon\{-1\}. \tag{13}$$

Величины ${}_x\varepsilon$, ${}_y\varepsilon$, ${}_z\varepsilon$ назовем геодезическими кривизнами соответственно линий (x), (y), (z) ортогональной три-ткани (x, y, z).

Тогда теорему 2 можно выразить следующим образом.

Линии (x) *ортогональной три-ткани* $(x\ y, z)$ *геодезические тогда и только тогда, когда* ${}_x z=0$.

Вектор $a_i={}_x z x_i+{}_y z y_i+{}_z z z_i$ назовем геодезическим вектором ортогональной три-ткани (x, y, z), принадлежащей W_3.

Из (2) и (13) следует, что a_i имеет вес $\{0\}$ и не изменяется при перенормировании.

Ортогональную три-ткань (x, y, z) назовем геодезической, если три фамилии ее линий геодезические, т. е. когда ${}_x z={}_y z={}_z z=0$.

Тогда верна следующая

Теорема 3. *Ортогональная три-ткань* (x, y, z) *будет геодезической, если ее геодезический вектор* $a_i=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Златанов. Сети в двумерном пространстве Вейля. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 619-622
2. Г. Марков. Към теорията на векторного поле в тримерно пространство на Вайл. *Научни трудове. ВПИ Пловдив, Математика*, **4**, кн. 3, 1966, 11-14.
2. А. Хачатрян, В. Шуликовски. Три-ткани в пространстве Римана. *Изв. высш. учебн. заведений. Математика*, № 7, 1977, 94-99.
4. А. Норден. Пространства аффинной связности. Москва, 1976.
5. В. Шуликовски. Классическая дифференциальная геометрия, Москва, 1963.

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Поступила 14. 2. 1980