Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О РЕШЕТКАХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Описана решетка многообразий ассоциативных алгебр с единицей над полем характеристики нуль в случае, когда многообразия удовлетворяют нематричному тождеству четвертой степени.

В последние годы появилось множество работ, изучающих решетки многообразий линейных алгебр, см. обзор В. А. Артамонова [1]. Например, над полем нулевой характеристики из работ А. З. Ананьина и А. Р. Кемера [2] и А. Регева [3] можно получить довольно полную информацию о многообразиях ассоциативных алгебр, удовлетворяющих тождеству третьей степени, а И. К. Тонов [4] описал цепные и „атомные" многообразия ассоциативных алгебр с единицей.

В настоящей работе основным аппаратом является теория представлений симметрической группы. В этом отношении статья есть продолжение работы автора [5]. Изучаются многообразия ассоциативных алгебр с единицей над полем нулевой характеристики. Полностью описана решетка многообразий в случае, когда выполняется нематричное тождество четвертой степени (тождество называется нематричным, если оно не выполняется в алгебре матриц второго порядка). В частности, показана дистрибутивность этой решетки. Как следствие получен вышеуказанный результат И. К. Тонова. Самостоятельный интерес представляет и технический результат о явном разложении в сумму неприводимых модулей линейных пространств Γ_5 и Γ_6 полилинейных собственных многочленов степени 5 и 6 в свободной ассоциативной алгебре.

1. Обозначения и предварительные сведения. Будем рассматривать только ассоциативные алгебры с 1. Зафиксируем некоторые обозначения: K — поле характеристики 0, S_n — симметрическая группа, действующая на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, KS_n — групповая алгебра группы S_n, A_m и L_m — свободные ассоциативная и лиевая алгебры над K со свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_m$. Существует естественное вложение $L_m \subset A_m$, продолжающее соответствие $x_i \to x_i$, $[x_i, x_j] \to x_i x_j - x_j x_i$ $(i, j = 1, \dots, m)$.

Пусть P_n — линейное пространство полилинейных многочленов степени n от $x_1, x_2, \dots, x_n$ в A_n. Группа S_n действует в P_n по правилу $\sigma(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} \dots x_{\sigma(i_n)}$ и P_n превращается в левый S_n-модуль, изоморфный левому S_n-модулю KS_n. Все необходимые сведения из теории представлений симметрической группы и их применений для многообразий можно найти, например, в [7], [8], [2], [5]: с каждым неприводимым S_n-подмодулем M в P_n связана таблица Юнга D, отвечающая разбиению $n(k_1, \dots, k_r)$, $k_1 \geq \dots \geq k_r$,

$\Sigma k_i = n$. Пусть в таблице D столбцы имеют длину $l_1, \ldots, l_k$, соответственно. Модуль M порождается линеаризацией $e = \mathrm{lin}(f)$ многочлена

$$f = \Sigma \alpha_\tau f_\tau \tag{1}$$

$\alpha_\tau \in K$, $\tau \in S_n$, $f_\tau(x_1, \ldots, x_r) = \Sigma(-1)^{\sigma_1} \ldots (-1)^{\sigma_k} x_{t_1} \ldots x_{t_n}$, где $k = k_1$, $r = l_1$ $\sigma_1 \in S_{l_1}, \ldots, \sigma_k \in S_{l_k}$, $t_1 = \sigma_{i_1}(j_1), \ldots, t_n = \sigma_{i_n}(j_n)$ и $\sigma_1(1), \ldots, \sigma_1(l_1), \sigma_2(1), \ldots, \sigma_k(l_k)$ находятся, соответственно, на местах $\tau(1), \ldots, \tau(l_1), \tau(l_1+1), \ldots, \tau(n)$ в одночленах $x_{t_1} \ldots x_{t_n}$ ([5]). Многочлен (1) будем называть „симметризацией" e. При $r \leq m$ (1) порождает неприводимый $GL_m(K)$-модуль в однородной компоненте $A_m^{(n)}$ степени n алгебры A_m, а при $r > m$ (1) аннулируется в $A_m^{(n)}$. Очень часто будем использовать не полилинейные многочлены, а их симметризации и таким образом будем работать с представлениями не только симметрической, но и полной линейной группы.

Важное место в дальнейших рассуждениях займет S_n-модуль Γ_n собственных (или коммутаторных) многочленов в P_n. Порождающие одночлены в Γ_n являются произведениями коммутаторов [6]. Каждое многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1 над K определяется своими тождествами из $\Gamma_n (n = 2, 3, \ldots)$. Через $F_m(\mathfrak{M})$ и $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ будем обозначать свободную алгебру многообразия $\mathfrak{M}$ с образующими $x_1, \ldots x_m$ и ее однородную компоненту степени n, а через $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ образ Γ_n при естественном гомоморфизме $A_n \to F_n(\mathfrak{M})$. Собственные подмногообразия в $\mathfrak{M}$ определяются тождествами из $\Gamma_n(\mathfrak{M})$, $(n = 2, 3, \ldots)$. Будем использовать только левонормированные коммутаторы $[x, y] = x(ady) = xy - yx$, $[x, y, z] = [[x, y], z]$, кроме того, $x \circ y = xy + yx$, $s_n(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ — стандартное тождество, а $\mathrm{lin}(f)$ — линеаризация многочлена f (записанная первыми n переменными). Без ссылок будем использовать, что каждое тождество эквивалентно своим однородным компонентам.

Предложение 1.1. (Критерий неследования). *Пусть $g \in \Gamma_n(\mathfrak{M})$, $h \in \Gamma_{n+1}(\mathfrak{M})$ и g и h порождают неприводимые модули. Если симметризации (1) g и h зависят от p и q переменных, соответственно, и $q \geq p + 3$, то h не следует из g. Если для $i = 1, \ldots, n$ $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_{n+1}], x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$ в $\mathfrak{M}$ и $q \geq p + 2$, то h не следует из g.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что g является линеаризацией многочлена f из (1). Все следствия из g получаются из $g(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1}$, $x_{n+1}\, g(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{n+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, что эквивалентно $f(x_1, \ldots, x_p)x_{p+1}$, $x_{p+1} f(x_1, \ldots, x_p)$ и однородной части степени $n+1$ в $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + [x_{p+1}, x_{p+2}], x_{i+1}, \ldots, x_p)$, $f(x_1 \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{p+1} \circ x_{p+2}, x_{i+1}, \ldots, x_p)$, т. е. вместо одной из букв $x_1, \ldots, x_p$ мы можем подставить однажды $[x_{p+1}, x_{p+2}]$ или x_{p+1}^2. Поэтому следствия степени $n+1$ из f эквивалентны многочленам из $F_{p+2}^{(n+1)}(\mathfrak{M})$, а в случае, когда $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_{n+1}], x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ в $\mathfrak{M}$, из $F_{p+1}^{(n+1)}(\mathfrak{M})$. Поэтому h не следует из g.

Замечание 1. 2. Пусть $g \in \Gamma_n(\mathfrak{M})$, $h \in \Gamma_{n+1}(\mathfrak{M})$, g, h порождают неприводимые модули и надо показать, что из g следует h. Тогда можно предполагать, что в $\Gamma_{n+1}(\mathfrak{M})$ аннулируются все модули, неизоморфные $KS_{n+1}h$, и работать только в тех модулях из $\Gamma_{n+1}(\mathfrak{M})$, которые изоморфны $KS_{n+1}h$.

2. Разложение Γ_5 и Γ_6 в сумму неприводимых модулей. В этом параграфе мы дадим описание неприводимых компонент модулей Γ_5 и Γ_6.

Заметим, что Γ_2 и Γ_3 неприводимы и порождаются $[x_1, x_2]$ и $[x_1, x_2, x_3]$, соответственно. Описание Γ_4 тоже известно.

Предложение 2. 1 (см., например, [4]). *Модуль Γ_4 разлагается в сумму неприводимых S_4-модулей, порожденных*

(2) $\quad \mathrm{lin}([x_2, x_1, x_1, x_1]), \quad \mathrm{lin}([x_1, x_2]^2), \quad [[x_1, x_2], [x_3, x_4]], \quad s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$

и отвечающих разбиениям (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1), *соответственно.*

Среди тождеств (2) только $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ матрично. Каждое многообразие, которое удовлетворяет нематричному тождеству четвертой степени, удовлетворяет одному из первых трех тождеств в (2). В следующих параграфах мы последовательно рассмотрим каждый из этих случаев.

Непосредственный подсчет в базисе Шпехта в Γ_n [6] показывает

Лемма 2.2. $\dim \Gamma_5 = 44$, $\dim \Gamma_6 = 265$.

В следующих предложениях все элементы $v_1, \ldots, v_9, w_1, \ldots, w_{28}$ записаны в виде (1), и поэтому их линеаризации порождают неприводимые модули.

Предложение 2.3 (см., например, [5]). *Модуль полилинейных лиевых многочленов $P_5(L)$ разлагается в сумму неприводимых S_5-подмодулей, порожденных линеаризациями многочленов v_i:*

$$v_1 = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1], \quad v_2 = [x_2, x_1, x_1, [x_2, x_1]],$$

$$v_3 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1, x_1, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]], \quad v_4 = \Sigma(-1)^\sigma[x_2, x_1, x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]],$$

$$v_5 = \Sigma(-1)^\sigma[x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]]$$

и отвечающих разбиениям (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) *соответственно.*

Предложение 2.4. *Дополнение Γ_5 до $P_5(L)$ разлагается в сумму неприводимых S_5-модулей, порожденных линеаризациями v_i:*

$$v_6 = [x_2, x_1][x_2, x_1, x_1], \quad v_7 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1][x_{\sigma(2)}, x_1, x_{\sigma(3)}],$$

$$v_8 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_2, x_1, x_{\sigma(3)}], \quad v_9 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_1],$$

отвечающих разбиениям (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) *соответственно.*

Доказательство. Заметим, что в базисе Шпехта [6] линеаризации многочленов v_i ненулевые в $\Gamma_5(\mathrm{mod}\, P_5(L))$ и $\mathrm{lin}(v_i)$ $(i=6, 7, 8, 9)$ порождают неизоморфные S_5-модули размерности 5, 6, 5, 4. Кроме того, $\Sigma \dim KS_5 \,\mathrm{lin}(v_i) = \dim \Gamma_5 - \dim P_5(L)$. Поэтому $\Gamma_5 = P_5(L) \oplus \Sigma KS_5 \,\mathrm{lin}(v_i)$.

Предложение 2.5. *Подмодуль $P_6(L)$ лиевых элементов в Γ_6 разлагается в прямую сумму $\Sigma KS_6 \,\mathrm{lin}(w_i)$ (рядом указаны соответствующие разбиения и размерности d_i S_6-модуля), где*

$$w_1 = x_2(ad x_1)^5, \quad (5, 1), \; d_1 = 5.$$

$$w_2 = [x_2, x_1, x_1, x_1, [x_2, x_1]], \; (4, 2), \; d_2 = 9,$$

$$w_3 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1, x_1, x_1, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]], \; (4, 1, 1), \; d_3 = 10,$$

$$w_4 = \Sigma(-1)^\sigma[x_2, x_1, x_1, x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]], \; (3, 2, 1), \; d_4 = 16,$$

$$w_5 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1, x_1, x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]], \; (3, 1, 1, 1), \; d_5 = 10,$$

$w_6 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1, [x_2, x_1], [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]], (3, 2, 1), d_6 = 16,$

$w_7 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, [x_2, x_1], [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]], (2, 2, 1, 1), d_7 = 9,$

$w_8 = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}], [x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}]], (2, 1, 1, 1, 1), d_8 = 5,$

$w_9 = \Sigma(-1)^\sigma[x_2, x_1, x_{\sigma(1)}, [x_2, x_1, x_{\sigma(2)}]], (3, 3), d_9 = 5,$

$w_{10} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_1, [x_{\sigma(3)}, x_1, x_1]], (4, 1, 1), d_{10} = 10,$

$w_{11} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_1, [x_2, x_1, x_{\sigma(3)}]], (3, 2, 1), d_{11} = 16,$

$w_{12} = \Sigma(-1)^\sigma(-1)^\tau[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(1)}, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\tau(2)}], (2, 2, 1, 1), d_{12} = 9.$

Доказательство. Многочлены w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 ненулевые, и их линеаризации порождают $P_6(L) \,(\mathrm{mod}\,(L^2)^3 + (L^3)^2)$ [5], w_6, w_7, w_8 — ненулевые в $(L^2)^3 (\mathrm{mod}\,(L^3)^2)$, потому что не аннулируются в абелевом сплетении $L_1 \,\mathrm{wr}\, N_\infty$ одномерной алгебры L_1 и свободной нильпотентной ступени 2 алгебры N_∞ [9], $w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}$ лежат в $(L^3)^2$. В каждом из трех множеств S_6-модули, порожденные $\mathrm{lin}\,(w_i)$, попарно неизоморфны. Поэтому сумма $\Sigma KS_6 \,\mathrm{lin}\,(w_i)$ — прямая. Подсчет размерностей показывает, что $P_6(L) = \Sigma KS_6 \,\mathrm{lin}\,(w_i)$.

Предложение 2.6. *Дополнение Γ_6 до $P_6(L)$ разлагается в прямую сумму* $\Sigma KS_6 \,\mathrm{lin}\,(w_i)$, $(13 \leq i \leq 28)$, *где*

$w_{13} = [x_2, x_1]^3, (3, 3), d_{13} = 5,$

$w_{14} = [x_1, x_2]\, s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), (2, 2, 1, 1), d_{14} = 9,$

$w_{15} = s_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), (1, 1, 1, 1, 1, 1), d_{15} = 1,$

$w_{16} = [x_2, x_1]\, [x_2, x_1, x_1, x_1], (4, 2), d_{16} = 9,$

$w_{17} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_{\sigma(3)}, x_1, x_1, x_1], (4, 1, 1), d_{17} = 10,$

$w_{18} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_2, x_1, x_1, x_{\sigma(3)}], (3, 2, 1), d_{18} = 16,$

$w_{19} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_{\sigma(3)}, x_1, x_1, x_{\sigma(4)}], (3, 1, 1, 1), d_{19} = 10,$

$w_{20} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_1]\, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, [x_2\, x_1]], (3, 2, 1), d_{20} = 16,$

$w_{21} = \Sigma(-1)^\sigma(-1)^\tau[x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}]\, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}]]\ (2, 2, 2), d_{21} = 5,$

$w_{22} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_{\sigma(3)}, x_1, [x_{\sigma(4)}, x_1]], (3, 1, 1, 1), d_{22} = 10,$

$w_{23} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_2, x_1]], (2, 2, 1, 1), d_{23} = 9,$

$w_{24} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_{\sigma(5)}, x_1]], (2, 1, 1, 1, 1), d_{24} = 5,$

$w_{25} = [x_2, x_1, x_1]^2, (4, 2), d_{25} = 9,$

$w_{26} = \Sigma(-1)^\sigma[x_2, x_1, x_{\sigma(1)}]\, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_1], (3, 2, 1), d_{26} = 16,$

$w_{27} = \Sigma(-1)^\sigma(-1)^\tau[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(1)}]\, [x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(3)}], (2, 2, 2), d_{27} = 5,$

$w_{28} = \Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_1]\, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_1], (3, 1, 1, 1), d_{28} = 10.$

Доказательство. В алгебре Ли L_6 рассмотрим следующий базис элементов степени 1, 2, 3, 4: x_i, $[x_i, x_j]$, $[x_i, x_j, x_k]$, $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]$, $[x_{j_1}, x_{j_2}, [x_{j_3}, x_{j_4}]]$ $(i > j \leq k,\ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_4,\ j_1 > j_2,\ j_3 > j_4,\ j_2 \geq j_4$ и если $j_2 = j_4$, то $j_1 > j_3)$. Упорядочим элементы каждого типа произвольным образом (например, лексикографически), кроме того, будем предполагать, что $x_i < [x_i, x_j] < [x_i, x_j, x_k] < [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] < [x_{j_1}, x_{j_2}, [x_{j_3}, x_{j_4}]]$. Свободная ассоциативная алгебра A_6 является универсальной обертывающей L_6 и поэтому имеет базис

$l_1^{a_1} \ldots l_n^{a_n}$, где $l_1 < \cdots < l_n$. Однородная компонента $A_6^{(6)}$ представляется в сумму базисных элементов

$$x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} \Pi[x_i, x_j]^{\beta_{ij}} \Pi[x_i, x_j, x_k]^{\gamma_{ijk}} [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]^{\delta} [x_{j_1}, x_{j_2}, [x_{j_3}, x_{j_4}]]^{\varepsilon} v^{\lambda} w^{\mu},$$

где v, w — лиевы элементы степени 5 и 6, соответственно, и $\Sigma a_i + 2\Sigma\beta_i + 3\Sigma\gamma_{ijk} + 4\delta + 4\varepsilon + 5\lambda + 6\mu = 6$. Модуль Γ_6 получается линеаризацией той части B_6 пространства $A_6^{(6)}$, которая записывается в произведение только коммутаторов (т. е. $a_i = 0$). Очевидно $B_6 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus L_6^{(6)}$, где C_1 — с базисом $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ $[x_{i_3}, x_{i_4}]$ $[x_{i_5}, x_{i_6}]$ $(i_1 > i_2,\ i_3 > i_4,\ i_5 > i_6, (i_1, i_2) \leq (i_3, i_4) \leq (i_5, i_6))$, C_2 —, с базисом $[x_{i_1}, x_{i_2}] [x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$ $(i_1 > i_2,\ i_3 > i_4 \leq i_5 \leq i_6)$, C_3 — с базисом $[x_{i_1}, x_{i_2}]$, $[x_{i_3}, x_{i_4}, [x_{i_5}, x_{i_6}]]$ $(i_1 > i_2,\ i_3 > i_4,\ i_5 > i_6,\ (i_3, i_4) > (i_5, i_6))$, C_4 — с базисом $[x_{i_1}, x_{i_2}$ $x_{i_3}] [x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$ $(i_1 > i_2 \leq i_3,\ i_4 > i_5 \leq i_6,\ (i_1, i_2, i_3) \leq (i_4, i_5, i_6))$. Заметим, что $L_6^{(6)}$, $L_6^{(6)} \oplus C_1 \oplus C_3$, $C_2 \oplus C_3$, C_3, $L_6^{(6)} \oplus C_4 - GL_6(K)$ — инвариантны. Кроме того, w_{13}, w_{14}, w_{15} — из $C_1 + C_3 + L_6^{(6)}$ и ненулевые по модулю $C_2 + C_3 + C_4 + L_6^{(6)}$; w_{16}, w_{17}, w_{18}, w_{19} — из $C_2 + C_3$ и ненулевые по модулю $C_3 + C_4 + L_6^{(6)}$; w_{20}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24} — из C_3 и ненулевые по модулю $C_4 + L_6^{(6)}$; w_{25}, w_{26}, w_{27}, w_{28} — из $C_4 + L_6^{(6)}$ и тоже ненулевые по модулю $L_6^{(6)}$. Линеаризации указанных элементов w_j из C_i для каждого i $(i = 1, 1, 3, 4)$ порождают попарно неизоморфные S_6-подмодули. Поэтому сумма $\Sigma KS_6 \operatorname{lin}(w_i) + P_6(L)$ $(13 \leq i \leq 28)$ прямая. Подсчет размерностей показывает, что она совпадает с Γ_6.

3. Многообразия, удовлетворяющие тождеству $[x_1, x_2, [x_3, x_4]]$. В этом параграфе будем рассматривать многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1, определенное тождеством

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4]] = 0. \tag{3}$$

Стороение $\Gamma_m(\mathfrak{M})$, но на другом языке, довольно подробно описано М. Б. Гавриловым [10].

Лемма 3.1. *В многообразии* $\mathfrak{M}$

$$[x_1, x_2] [x_3, x_4] = [x_3, x_4] [x_1, x_2], \tag{4}$$

$$[x_4, x_1] [x_2, x_3, x_4] = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Равенство (4) сразу следует из (3). Кроме того, в $\mathfrak{M}$ $0 = [x_4^2, x_1, [x_2, x_3]] = [x_4, x_1, [x_2, x_3]] \circ x_4 + [x_4, x_1] \circ [x_4, [x_2, x_3]] = -2[x_4, x_1] [x_2, x_3, x_4]$.

Лемма 3.2. *В многообразии* $\mathfrak{M}$ $[x_1, x_2] [x_3, x_4, x_5] = 0$.

Доказательство. Из (3) очевидно следуют многочлены v_2, v_3, v_4, v_5 из 2.3. Мы докажем лемму, если установим, что v_6, v_7, v_8, v_9 следуют из (3) по модулю лиевых элементов в $F_5^{(5)}(\mathfrak{M})$. Из (5) следует, что $[x_2, x_1] [x_3, x_1, x_1] = 0$ в $\mathfrak{M}$, т. е. $v_6 = v_7 = 0$ в $F_5(\mathfrak{M})$. Будем использовать линеаризацию (5) $[x_1, x_2] [x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_5] [x_3, x_4, x_2] = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v_8 &= 2([x_1, x_2] [x_2, x_1, x_3] + [x_2, x_3] [x_2, x_1, x_1] + [x_3, x_1] [x_2, x_1, x_2]) \\ &= 2([x_1, x_2] [x_2, x_1, x_3] - [x_2, x_1] [x_2, x_1, x_3] - [x_2, x_1] [x_2, x_1, x_3]) \\ &= 6[x_1, x_2] [x_2, x_1, x_3] = 6[x_1, x_2] ([x_2, x_3, x_1] - [x_1, x_3, x_2]) = 0, \end{aligned}$$

$$v_9 = \Sigma(-1)^{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_1] = -\Sigma(-1)^{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_1] [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}] = 0,$$

потому что $\Sigma(-1)^{\sigma} [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}] = 0$.

Следствие 3.3. *В* $\mathfrak{M}$ $[x_1, x_2]\,[x_1, x_3]\,[x_4, x_5]=0$.

Доказательство. По 3.1 и 3.2 в $\mathfrak{M}$

$$0=[x_4, x_5]\,[x_1^2, x_2, x_3]$$

$$=[x_4, x_5]x_1[x_1, x_2, x_3]+[x_4, x_5]\,[x_1, x_2, x_3]x_1+[x_4, x_5]\,([x_1, x_2]\circ[x_1, x_3])$$

$$=2[x_4, x_5]\,[x_1, x_2, x_3]\,x_1+[x_4, x_5]\,[x_1, x_2, x_3, x_1]+2[x_1, x_2]\,[x_1, x_3]\,[x_4, x_5]$$

$$=2[x_1, x_2]\,[x_1, x_3]\,[x_4, x_5].$$

Предложение 3.4. *Пусть* $e_n=\operatorname{lin}(x_2(\operatorname{ad} x_1)^{n-1})$, $c_4=\operatorname{lin}([x_1, x_2]^2)$. *Тогда при* $n>2$ $\Gamma_{2n-1}(\mathfrak{M})=KS_{2n-1}\,e_{2n-1}$, $\Gamma_{2n}(\mathfrak{M})=KS_{2n}e_{2n}+Ks_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, *при* $n=1$, 2 $\Gamma_2(\mathfrak{M})=Ke_2=Ks_2(x_1, x_2)$, $\Gamma_3(\mathfrak{M})=KS_3e_3$, $\Gamma_4(\mathfrak{M})=KS_4e_4+KS_4c_4+Ks_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Доказательство. Случаи $n=1, 2$ следуют из 2. 1. Пусть $n>2$. Разложим Γ_{2n-1} и Γ_{2n} в сумму неприводимых подмодулей и рассмотрим соответ-

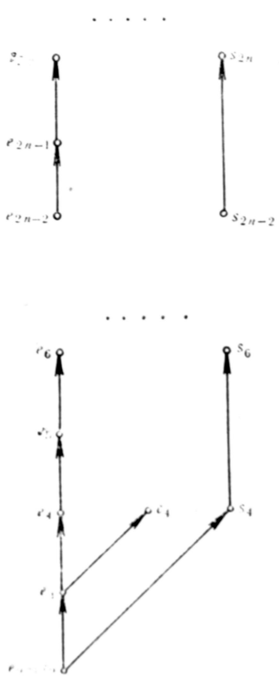

Рис. 1. $[x_1, x_2, [x_3, x_4]]=0$

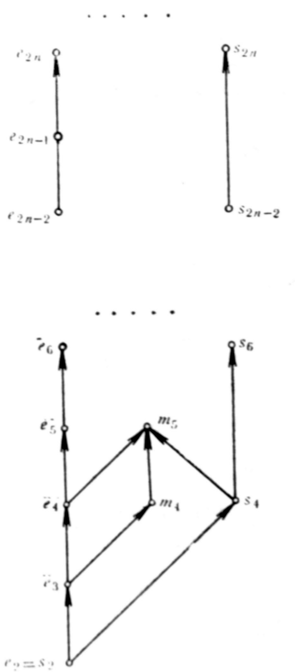

Рис. 2. $[x_1, x_2]^2=0$

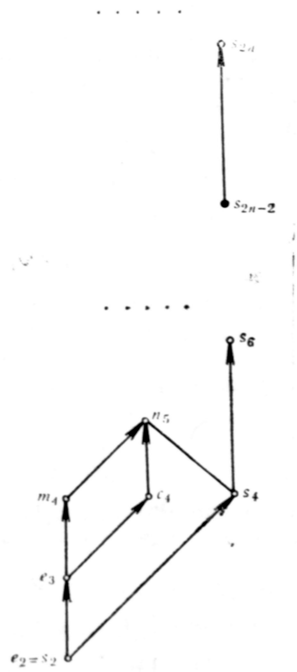

Рис. 3. $[x_2, x_1, x_1, x_1]=0$

ствующие им симметризации f из (1). Запишем f в сумму произведений коммутаторов $\Sigma\alpha[x_{i_1}, \ldots\ ]\ldots[\ \ldots, x_{i_k}]$. Ввиду 3.1, 3.2 и 3.3 в $\mathfrak{M}$ аннулируются все слагаемые f, кроме $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$, $i_1>i_2\leq\ldots\leq i_k$ и $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\ldots[x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}]$. В первом случае мы попадаем в метабелеву алгебру Ли, и там единственный ненулевой $GL_k(K)$-модуль порождается $x_2(\operatorname{ad} x_1)^{k-1}$, а во втором случае мы получаем только $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$. Очевидно, что из (3) не следуют $x_2(\mathrm{ad}\, x_1)^{k-1}$ и $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$. (Стандартное тождество не следует из $[x_1, x_2\ x_3]$, [2], а поэтому и из (3).)

Легко проверяется, что $\Gamma_n(\mathfrak{M})$, $n=2, 3, \ldots$, связаны следующим образом (стрелка указывает, что один многочлен следует из другого) (рис. 1). Это можно сформулировать как

Теорема 3.5. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1 над полем характеристики 0, определенное тождеством* (3), *имеет следующие подмногообразия $\mathfrak{M}$, которые определяются тождествами*

$$\varepsilon_1 x_2(\mathrm{ad}\, x_1)^{m-1} + \varepsilon_2 s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) + \varepsilon_3 [x_1, x_2]^2 = 0.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0, 1$; m, n определены только для $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 1$. Если $\varepsilon_1 = 1$, $m=2$, то $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, $n=1$; если $\varepsilon_2 = 1$, $n=1$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $m=2$; если $\varepsilon_1 = 1$, $m=3$, то $\varepsilon_3 = 1$. Если $\mathfrak{W}_j$ определяются наборами $(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3j}, m_j, n_j)$, то $\cap \mathfrak{W}_j$ и $\cup \mathfrak{W}_j$ определяются $(\max \varepsilon_{1j}, \max \varepsilon_{2j}, \max \varepsilon_{3j}, \min m_j, \min n_j)$, $(\min \varepsilon_{1j}$ $\min \varepsilon_{2j}, \min \varepsilon_{3j}, \max m_j, \max n_j)$, соответственно.

Следствие 3.6. *Решетка подмногообразий в $\mathfrak{M}$ дистрибутивна.*

Многообразия, удовлетворяющие тождеству $[x_1, x_2]^2$. В этом параграфе будем рассматривать многообразие $\mathfrak{M}$, определенное тождеством

$$[x_1, x_2]^2 = 0. \tag{6}$$

Лемма 4.1. *Из* (6) *следуют*

$$[x_1, x_2, x_3] \circ [x_4, x_5] = 0, \tag{7}$$

$$v_6 = v_7 = v_8 = 0;\ v_9 \neq 0 \text{ в } \mathfrak{M}\ (v_i \text{ — из } 2.4).$$

Доказательство. Подмодуль S_5-модуля Γ_5, порожденный $[x_1, x_2, x_3] \circ [x_4, x_5]$ представляется (2.3, 2.4) в сумму 4 неизоморфных неприводимых подмодулей, отвечающих разбиениям (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) Подставляя в (6) $x_1 + [x_3, x_4]$ вместо x_1 и линеаризуя, мы получаем

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_2] = 0, \tag{8}$$

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_5] \circ [x_3, x_4, x_2] = 0. \tag{8'}$$

Из (8) следует $[x_2, x_1] \circ [x_3, x_1, x_1] = 0$, т. е. $v_2 + 2v_6 = v_3 - 2v_7 = 0$. Применив несколько раз (8′) и тождество Якоби, мы получаем

$$v_4 + 2v_8 = 6[x_1, x_2] \circ [x_2, x_1, x_3] = 0,$$

$$0 = \Sigma(-1)^\sigma([x_{\sigma(1)}, x_5] \circ [x_{\sigma(3)}, \Sigma_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}] + [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \circ [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_5])$$
$$= \Sigma(-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \circ [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_5],$$

т. е. (7) следует из (6). Будем работать по модулю (7).

$$[x_1, x_2] \circ [u^2, x_2] = [x_1, x_2] \circ ([u, x_2, u] + 2u[u, x_2])$$
$$= 2([x_1\ x_2]\, u\, [u, x_2] + u[u, x_2]\, [x_1, x_2]) = 2u[x_1, x_2] \circ [u, x_2] + 2[x_1, x_2, u]\, [u, x_2],$$

т. е. $[x_2, u]\, [x_1, x_2, u] = 0$ в $\mathfrak{M}$. После линеаризации по x_2 и по u мы получаем $[x_1, x_2]\, [x_3, x_4, x_2] + [x_4, x_2]\, [x_3, x_1, x_2] = 0$, $[x_1, x_2]\, [x_3, x_1, x_4] + [x_1, x_4]\, [x_3, x_1, x_2] = 0$, и, применяя несколько раз эти тождества и тождество Якоби, мы получаем $v_6 = v_7 = 0$, $v_8 = 2([x_1, x_2]\, [x_2, x_1, x_3] + [x_2, x_3]\, [x_2, x_1, x_1]$

$+[x_3, x_1][x_2, x_1, x_2])=6[x_1, x_2][x_2, x_1, x_3]=0$. Из критерия 1.1 видно, что v_9 не следует из (6).

Следующее утверждение представляет некоторый интерес и для многообразий алгебр Ли.

Предложение 4.2. *Для многообразий алгебр Ли над полем характеристики* 0 *из* v_2, v_3, v_4 *следуют* $[x_1, x_2, x_3, x_4, [x_5, x_6]]$, $[x_1, x_2, x_3, [x_4, x_5, x_6]]$.

Доказательство. Пусть $v_2=v_3=v_4=0$. Тогда из v_2 следует $[x_1, x_2, x_3, x_4, [x_5, x_6]]=0$ по модулю $(L^2)^3+(L^3)^2$, [5]. Рассмотрим следствия из v_2, v_3, v_4 по модулю $(L^3)^2$. Тождества $v_2=v_3=v_4=0$ означают, что все коммутаторы $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, [x_{i_4}, x_{i_5}]]$, в записи которых участвуют только три буквы, равны нулю. Поэтому $[x_2, x_1, x_3, [x_3, x_1]]=0$. При замене $x_3 \rightarrow x_3+[x_4, x_5]$ получаем

$$[x_2, x_1, [x_4, x_5], [x_3, x_1]]=0. \tag{9}$$

Линеаризуем по x_1:

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4], [x_5, x_6]]+[x_6, x_2, [x_3, x_4], [x_5, x_1]]=0. \tag{9'}$$

Следовательно, $[x_3, x_1, [x_2, x_1], [x_2, x_1]]=0$, т. е. $w_6=0$. В записи w_7 всегда $x_{\sigma(3)}$ или $x_{\sigma(4)}$ совпадает с x_1 или x_2. Поэтому из (9) следует $w_7=0$. Многочлен w_8 получается суммированием (9′) по S_5. Мы показали, что из $v_2=v_3=v_4=0$ следует $[x_1, x_2, x_3, x_4, [x_5, x_6]]=0$ по модулю $(L^3)^2$. Из $[x_2, x_1, x_2, [x_3, x_1]]=[x_2, x_1, x_1, [x_3, x_1]]=[x_1, x_3, x_2, [x_1, x_2]]=0$ следует

$$[x_2, x_1, x_2, [u_1, u_2, x_1]]=[x_2, x_1, x_1, [u_1, u_2, x_1]]=0, \tag{10}$$

$$[u_1, u_2, x_3, x_2, [x_1, x_2]]+[x_1, x_3, x_2, [u_1, u_2, x_2]]=0. \tag{11}$$

Из (10) следует $w_9=w_{10}=0$,

$$\frac{1}{2}w_{11}=[x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_3]]+[x_2, x_3, x_1, [x_2, x_1, x_1]]$$

$$+[x_3, x_1, x_1, [x_2, x_1, x_2]]=[x_1, x_2, x_1, [x_2, x_3, x_1]+[x_3, x_1, x_2]]=0.$$

Линеаризуем (11) по x_2 и получаем

$$[u_1, u_2, x_3, u_3, [x_1, x_2]]+[u_1, u_2, x_3, x_2, [x_1, u_3]]+[x_1, x_3, x_2, [u_1, u_2, u_3]]$$
$$+[x_1, x_3, u_3, [u_1, u_2, x_2]]=0,$$

$$\Sigma(-1)^\sigma\{[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_1, x_2]]+[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_2, [x_1, x_{\sigma(4)}]]$$
$$+[x_1, x_{\sigma(3)}, x_2, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}]]+[x_1, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_2]]$$
$$=\Sigma(-1)^\sigma[x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_2]] \text{ и } w_{12}=0,$$

т. е. из $v_2=v_3=v_4=0$ следует $[x_1, x_2, x_3, [x_4, x_5, x_6]]=0$. Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Пусть* $e_n=\operatorname{lin}(x_2(\operatorname{ad} x_1)^{n-1})$, $m_n=\Sigma(-1)^\sigma[x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}]$. *Тогда* $\Gamma_4(\mathfrak{M})=KS_4e_4+KS_4m_4+Ks_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\Gamma_5(\mathfrak{M})=KS_5e_5+KS_5m_5$. *При* $n>2$ $\Gamma_{2n}(\mathfrak{M})=KS_{2n}e_{2n}+K_{s2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $\Gamma_{2n+1}(\mathfrak{M})=KS_{2n+1}e_{2n+1}$.

Доказательство. Для $\Gamma_4(\mathfrak{M})$ и $\Gamma_5(\mathfrak{M})$ предложение уже доказано (4.1). Вычислим $\Gamma_6(\mathfrak{M})$. В силу 1.2, 4.1, 4.2 достаточно работать по модулю $L_6^{(6)}+L_6^{(2)}\circ L_6^{(4)}+L_6^{(3)}\circ L_6^{(3)}$. Из (7) следует

$0=[x_1, x_2]\circ[u^2, x_3, x_4]=[x_1, x_2]\circ(2[u, x_3, x_4]u+[u, x_3, x_4, u]+[u, x_3]\circ[u, x_4])$, т. е.

$$(12)\qquad [x_1, x_2]\,[u, x_3]\,[u, x_4]=0.$$

Следовательно, $w_{13}=w_{14}=0$, и мы получили разложение для $\Gamma_6(\mathfrak{M})$. Пусть $n>6$. Мы будем работать соответствующими симметризациями f. Рассмотрим слагаемое $[x_{i_1},\dots]\dots[\dots,x_{i_n}]$ в записи $f=\Sigma\alpha[x_{i_1},\dots]\dots[\dots,x_{i_n}]$. Возможны два случая:

а. Среди множителей встречается длинный (хотя бы тройной) коммутатор. Тогда, ввиду (7), в $F_n^{(n)}(\mathfrak{M})$ это произведение записывается как лиев элемент: $[x_1, x_2]\,[x_3, x_4, x_5]=\frac{1}{2}\{[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]]+[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4, x_5]\}$, и по 4.2 он нулевой или энгелев.

б. Число n четно и в произведении $[x_{i_1}, x_{i_2}]\dots[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]$ дважды встречается x_1 (если все $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ различны, мы получаем $s_n(x_1,\dots,x_n)$). Тогда $f=0$ ввиду (12).

Теорема 4.4. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1 над полем характеристики нуль, определенное тождеством* (6), *имеет следующие подмногообразия, которые определяются тождествами*

$$\varepsilon_1 x_2(\mathrm{ad}\,x_1)^{m-1}+\varepsilon_2 s_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})+\varepsilon_3\Sigma(-1)^\sigma[x_k, x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k-1)}],$$

где $\varepsilon_i=0, 1$, $m\geq 2$, $n\geq 1$, $k=4, 5$ *и условия на* m, n, k *и решетка подмногообразий в* $\mathfrak{M}$ *определяются из рис.* 2 (*аналогично теореме* 3.5).

Доказательство. В силу 4.3 достаточно показать, что из e_4, m_4 и s_4 следует m_5. Для e_4 и m_4 это так (см., например, [5]). В $\mathfrak{M}$ $[u^2, x_1]\circ[x_2, x_3]=2\{u[u, x_1]\circ[x_2, x_3]+[u, x_1, u]\circ[x_2, x_3]+2[x_2, x_3, u]\,[u, x_1]\}$. Пусть $s_4=0$, $s_4(x_1, x_2, x_3, u^2)=2\{us_4(x_1, x_2, x_3, u)-\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, u]\,[u, x_{\sigma(3)}]\}$, т. е. $\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, u]\,[u, x_{\sigma(3)}]=0$. Линеаризуем по u и суммируем по $\sigma\in S_4$: $\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_5]\,[x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]=0$ и, ввиду (7), мы получаем m_5.

Следствие 4.5. *Решетка подмногообразий в $\mathfrak{M}$ дистрибутивна*

Следствие 4.6. (И. К. Тонов [4]). *Многообразие $\mathfrak{R}$ ассоциативных алгебр с 1 над полем характеристики 0 атомно тогда и только тогда, когда $\Gamma_4(\mathfrak{R})$ неприводимый S_4-модуль.* (*Многообразие $\mathfrak{R}$ называется атомным, если $\Gamma_n(\mathfrak{R})$ — неприводимые S_n-модули.*)

Доказательство. По 2.1 Γ_4 является суммой четырех неприводимых компонент. Пусть $\Gamma_4(\mathfrak{R})$ — неприводим. Тогда в $\mathfrak{R}$ $[x_1, x_2, [x_3, x_4]]=0$ или $[x_1, x_2]^2=0$. Любые два из оставшихся трех тождеств в $\mathfrak{R}$ превращают $\Gamma_n(\mathfrak{R})$ $(n=5, 6,\dots)$ в неприводимый (или нулевой) модуль (см. рис. 1 и 2).

Следствие 4.7. *Каждое многообразие ассоциативных алгебр* (*без* 1) *над полем характеристики* 0, *которое удовлетворяет тождеству* (6), *конечно базируемо.*

Доказательство. Мы показали, не используя наличия 1, что из (6) следует $[x_1, x_2, x_3]\,[x_4, x_5, x_6]=0$, и, поэтому по [11], оно шпехтово.

5. Многообразия, удовлетворяющие тождеству $[x_2, x_1, x_1, x_1]$. В этом параграфе будем рассматривать многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1, определенное тождеством

$$(13)\qquad [x_2, x_1, x_1, x_1]=0.$$

Из (13) следует $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]=0$ (см., например, [5]), и в дальнейшем в $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ $(n>4)$ будем работать по модулю лиевых элементов.

Лемма 5.1. *В* $\mathfrak{M}$ $v_6=v_7=v_8=0$, $v_9\neq 0$.

Доказательство. Из (13) следует $[x_2, u^2, x_1, x_1]+[x_2, x_1, u^2, x_1]+[x_2, x_1, x_1, u^2]=u\circ([x_2, u, x_1, x_1]+[x_2, x_1, u, x_1]+[x_2, x_1, x_1, u])+2[u, x_1]\circ[x_2, u, x_1]+[x_2, u]\circ[u, x_1, x_1]+[u, x_1]\circ[x_2, x_1, u]$, т. е.

$$2[u, x_1]\,[x_2, u, x_1]+[x_2, u]\,[u, x_1, x_1]+[u, x_1]\,[x_2, x_1, u]=0. \tag{14}$$

Заменим $u\to x_1+x_3$ и получим $3[x_3, x_1]\,[x_2, x_1, x_1]+[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, x_1]=0$. Аналогично $3[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, x_1]+[x_3, x_1]\,[x_2, x_1, x_1]=0$, и поэтому $[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, x_1]=0$, т. е. $v_6=v_7=0$. В $[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, x_1]$ заменяем $x_1\to x_1+x_2$ и получаем $[x_2, x_1]\,[x_3, x_2, x_1]+[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, x_2]=0$.

Тогда (14) превращается в

$$[x_2, x_1]\,[x_3, x_2, x_1]+[x_3, x_2]\,[x_2, x_1, x_1]=0. \tag{15}$$

Переставим x_1 и x_2:

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_1, x_2]+[x_3, x_1]\,[x_1, x_2, x_2]=0, \tag{15'}$$

После вычитания (15) и (15′) получаем

$$[x_2, x_3]\,[x_1, x_2, x_1]-[x_3, x_1]\,[x_1, x_2, x_2]=0. \tag{16}$$

В (16) заменим $x_2\to x_2+x_3$, $x_3\to x_2$:

$$[x_3, x_2]\,[x_1, x_2, x_1]-[x_2, x_1]\,[x_1, x_3, x_2]-[x_2, x_1]\,[x_1, x_2, x_3]=0.$$

После сложения с (15′) мы получим $[x_1, x_2]\,[x_1, x_2, x_3]=0$, что вместе с (16) дает $v_8=0$. Из 1.1 сразу следует, что $v_9\neq 0$ в $\mathfrak{M}$.

Лемма 5.2. $\Gamma_6(\mathfrak{M})=Ks_6(x_1, \ldots, x_6)$.

Доказательство. Будем использовать, что из $v_6=v_7=v_8=0$ следуют все $[x_{i_1}, x_{i_2}]\,[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]$, где $\{i_1, \ldots, i_5\}\subset\{1, 2, 3\}$. Кроме того, из $[x_1, x_2, x_3, u^2, x_4]=0$ получаем

$$[u, x_1]\,[x_2, x_3, x_4, u]=0, \tag{17}$$

а. По модулю $L_6^{(2)}L_6^{(4)}+L_6^{(3)}\,L_6^{(3)}$ $w_{13}=w_{14}=0$:

$$[x_3, x_1]\,[x_3, x_1, x_2]=0,\ 0=[u^2, x_1]\,[x_3, x_1, x_2]+[x_3, x_1]\,[u^2, x_1, x_2]$$

$$=2[x_3, x_1]\,[u, x_1]\,[u, x_2],\ \text{линеаризуем по } u:$$

$$[x_1, x_2]\,[x_1, x_3]\,[x_4, x_5]+[x_1, x_2]\,[x_1, x_4]\,[x_3, x_5]=0.$$

$$w_{14}=2[x_1, x_2]\,([x_1, x_2]\,[x_3, x_4]+[x_2, x_3]\,[x_1, x_4]+[x_3, x_1]\,[x_2, x_4])$$

$$=2[x_1, x_2]^2[x_3, x_4]=-2[x_1, x_2]\,[x_1, x_3]\,[x_2, x_4]=0,\ [x_1, x_2]^3=0.$$

б. Из (13) следует, что $w_{16}=w_{17}=0$. В w_{18} и w_{19}, применяя линеаризацию (17), мы заменим в $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\,[x_4, x_1, x_1, x_{\sigma(3)}]$ $x_{\sigma(3)}$ с x_1 (если $\sigma(3)\neq 1$) и снова получим 0.

в. По (17) $w_{20}=2[x_2, x_1]\,[x_3, x_1, [x_2, x_1]]=2[x_2, x_1]\,([x_3, x_1, x_2, x_1]-[x_3, x_1, x_1, x_2])=0$. Из $[x_3, x_2]\,[x_2, x_1, x_1]=0$ мы получаем, используя линеаризацию (17):

$$0=[x_3, x_2]\,([x_2, [x_4, x_5], x_1]+[x_2, x_1, [x_4, x_5]])$$

$$=[x_3, x_2]\,(-[x_4, x_5, x_1, x_2]+2[x_2, x_1, [x_4, x_5]],\ \text{т. е.}$$

$$(18)\qquad [x_1, x_2][x_2, x_3, [x_4, x_5]]=0$$

и $w_{21}=w_{22}=w_{23}=0$. Линеаризуем (18) по x_2. Тогда

$$w_{24}=2\Sigma(-1)^\sigma[x_1, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_{\sigma(5)}, x_1]]$$
$$+2\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}][x_1, x_{\sigma(4)}, [x_{\sigma(5)}, x_1]]$$
$$=-2\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(2)}, x_1][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, [x_{\sigma(5)}, x_1]]=0.$$

г. Будем работать по модулю $L_6^{(2)}L_6^{(4)}$. $0=[x_1, x_2, u^2, x_3, x_4]=[[x_1, x_2, u]\circ u, x_3, x_4]=2[x_1, x_2, u][u, x_3, x_4]$. Поэтому $w_{25}=w_{26}=w_{28}=0$. Из $[x_2, x_1, x_1][x_2, x_3]=[x_2, x_1, x_3][x_3, x_2]=0$ следует $[x_2, x_1, x_1][u_1, u_2, x_3]=[x_2, x_1, x_3][u_1, u_2, x_3]=0$, т. е. $w_{27}=0$. Лемма доказана.

Предложение 5.3. *Пусть* $e_n=\operatorname{lin}(x_2(\operatorname{ad}x_1)^{n-1})$, $m_4=[x_1, x_2, [x_3, x_4]]$, $c_4=\operatorname{lin}([x_1, x_2]^2)$, $n_5=\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_5]$. *Тогда* $\Gamma_4(\mathfrak{M})=KS_4m+KS_4c_4+Ks_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\Gamma_5(\mathfrak{M})=KS_5n_5$. *При* $n>2$ $\Gamma_{2n}(\mathfrak{M})=Ks_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $\Gamma_{2n+1}(\mathfrak{M})=0$.

Доказательство. В силу 5.1 и 5.2 остается доказать предложение для $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ при $n>6$. Из 5.2 следует, что

$$(19)\quad [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6]=[x_1, x_2, x_3, x_4][x_5, x_6]=[x_1, x_2][x_1, x_3][x_4, x_5]=0$$

Будем рассматривать симметризации f элементов из $\Gamma_n(\mathfrak{M})$. Поэтому остается рассмотреть только случай n — нечетное. Используя (19) и тождество Якоби, представляем f в сумму

$$\Sigma\alpha[x_{i_1}, x_1, x_{i_3}][x_1, x_{i_5}]\cdots[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]+\Sigma\beta[x_{i_1}, x_1, x_1][x_{i_4}, x_{i_5}]\cdots[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}].$$

Из (19) следует

$$0=([u^2, x_2][x_1, x_3]+[x_1, x_2][u^2, x_3])[x_4, x_5]$$
$$=\{([u, x_2]\circ u)[x_1, x_3]+[x_1, x_2]([u, x_3]\circ u)\}[x_4, x_5]$$
$$=\{(2u[u, x_2]+[u, x_2, u])[x_1, x_3]+2(u[x_1, x_2]$$
$$+[[x_1, x_2], u])[u, x_3]+[x_1, x_2][u, x_3, u]\}[x_4, x_5]$$
$$=([x_1, x_2][u, x_3, u]+[x_1, x_3][u, x_2, u])[x_4, x_5]$$
$$=-[x_1, u]([u, x_3, x_2]+[u, x_2, x_3])[x_4, x_5]$$
$$=-[x_1, u](2[u, x_2, x_3]+[[x_2, x_3], u])[x_4, x_5],$$

т. е.

$$[x_2, x_1][x_1, x_3, x_4][x_5, x_6]=0.$$

Кроме того, из (19)

$$[x_2, x_1, x_1][x_3, x_4][x_5, x_6]=-[x_2, x_1, x_3][x_1, x_4][x_5, x_6]=0.$$

Поэтому $f=0$ в $\mathfrak{M}$. Предложение доказано.

Теорема 5.4. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с 1 над полем характеристики 0, определенное тождеством (13), имеем следующие подмногообразия, которые определяются тождествами*

$$\varepsilon_1(x_2(\operatorname{ad}x_1)^{m-1})+\varepsilon_2[x_1, x_2, [x_3, x_4]]+\varepsilon_3[x_1, x_2]^2$$
$$+\varepsilon_4\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_1]+\varepsilon_5 s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}),$$

где $\varepsilon_i = 0, 1$, $m = 2, 3$, $n = 1, 2, \ldots$, *а условия на* ε_i, m, n *и решетка подмногообразий в* $\mathfrak{M}$ *определяются из рис.* 3.

Доказательство. Достаточно показать, что из $[x_1, x_2, [x_3, x_4]]$, $[x_1, x_2]^2$, $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ следует $\Sigma(-1)^\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_1]$. По модулю $L_5^{(5)}$ для первых двух тождеств это уже известно (пункты 3, 4), а для s_4 получается из $[s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1]$.

Следствие 5. 5. *Решетка подмногообразий в* $\mathfrak{M}$ *дистрибутивна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Артамонов. Решетки многообразий линейных алгебр, *Успехи мат. наук*, **33**, 1978, 135-167.
2. А. З. Ананьин, А. Р. Кемер. Многообразия ассоциативных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны. *Сиб. мат. ж.*, **17**, 1976, 723-730.
3. A. Regev. *T*-ideals of degree 3 are finitely generated. *Bull. London Math. Soc.*, **10**, 1978, 261-266.
4. И. К. Тонов. Цепные многообразия ассоциативных алгебр с единицей. *Сердика*, **7**, 1981, 250-257.
5. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.* **115**, 1981, 98-115.
6. W. Specht. Gesetze in Ringen. I. *Math. Z.*, **52**, 1950, 557-589.
7. Ч. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва, 1969, § 28.
8. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. Москва, 1947, гл. IV.
9. А. Л. Шмелькин. Сплетения алгебр Ли и их применение в теории групп. *Труды Моск. мат. общ-ва*, **29**, 1973, 247-260.
10. М. Б. Гаврилов. О некоторых *T*-идеалах в свободной ассоциативной алгебре. *Алгебра и логика*, **8**, 1968, 172-175.
11. А. П. Попов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, 2, 1981, 41-53.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 27. 3. 1980