Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ШПЕХТОВОСТЬ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР, ОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ТРЕХ КОММУТАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

Рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над коммутативным нетеровым кольцом с единицей. Если 2 — обратимый элемент в кольце, то доказана шпехтовость многообразия, определенного произведением трех коммутаторов произвольной длины.

В настоящей статье через K будем обозначать произвольное коммутативное (ассоциативное) нетерово кольцо с единицей. Все рассматриваемые алгебры будут ассоциативными K-алгебрами. Понятия, которые мы используем, но не определяем, можно найти в [6].

Пусть $\mathscr{K}\langle X\rangle$ — свободная алгебра (без единицы) со свободными образующими x_1, $x_2, \ldots$. Если $\{f_i \mid i\in I\}$ — подмножество алгебры $\mathscr{K}\langle X\rangle$, то через $T(f_i \mid i\in I)$ будем обозначать T-идеал алгебры $\mathscr{K}\langle X\rangle$, порожденный (как T-идеал) множеством $\{f_i \mid i\in I\}$, а через $\mathrm{Var}(f_i \mid i\in I)$ — многообразие всех алгебр, удовлетворяющих тождествам $f_i=0$, $i\in I$. Если $\mathfrak{B}$ — некоторое многообразие, то через $T(\mathfrak{B})$ будем обозначать T-идеал этого многообразия. Свободные образующие алгебры $\mathscr{K}\langle X\rangle$ иногда будем обозначать через j_i, z_i или $x_j^{(i)}$. Коммутатором $[x_1, x_2]$ длины 2 называется полином $x_1x_2-x_2x_1$. Далее индуктивно определяем коммутатор длины $n: [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. Пусть $\mathfrak{N}_k=\mathrm{Var}(x_1 \ldots x_k)$, $\mathfrak{L}_n=\mathrm{Var}([x_1, \ldots, x_{n+1}])$, $\mathfrak{N}_n\mathfrak{L}_n=\mathrm{Var}([x_1^{(1)}, \ldots, x_{n+1}^{(1)}] \ldots [x_1^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}])$. В частности, $\mathfrak{N}_3\mathfrak{L}_n=\mathrm{Var}([x_1, \ldots, x_{n+1}][y_1, \ldots, y_{n+1}][z_1, \ldots, z_{n+1}])$, $\mathfrak{N}_t\mathfrak{L}_2=\mathrm{Var}([x_1, x_2, x_3] \ldots [x_{3t-2}, x_{3t-1}, x_{3t}])$. По определению $\mathfrak{N}_0\mathfrak{L}_n=\mathrm{Var}(\mathscr{K}\langle X\rangle)$ — нулевое многообразие.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть K — произвольное коммутативное (ассоциативное) нетерово кольцо с единицей, в котором 2 является обратимым элементом. Тогда для любого натурального $n\geq 3$ многообразие ассоциативных K-алгебр $\mathfrak{N}_3\mathfrak{L}_n$ является шпехтовым многообразием, т. е. тождество $[x_1, \ldots, x_{n+1}][y_1, \ldots, y_{n+1}][z_1, \ldots, z_{n+1}]=0$ является шпехтовым.*

Техника доказательств, которая здесь используется, впервые была применена Коэном [1] и получила развитие в работах [2]—[6]. Идеи настоящей статьи примыкают непосредственно к идеям работ [5] и [6].

Пусть $n\geq 3$, а $\mathfrak{M}_n^{(t)}=(\mathfrak{N}_3\mathfrak{L}_n)\bigcap(\mathfrak{N}_t\mathfrak{L}_2)$, $t\geq 0$. Многообразие $\mathfrak{M}_n^{(t)}$ определяется двумя тождествами, а именно:

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}][y_1, \ldots, y_{n+1}][z_1, \ldots, z_{n+1}]=0,$$

$$[x_1, x_2, x_3]\dots[x_{3t-2}, x_{3t-1}, x_{3t}]=0.$$

Индукцией по n легко доказывается [4] включение $\mathfrak{N}_3\mathfrak{L}_n\subseteq\mathfrak{M}_n^{(3n-3)}$. Следовательно, для доказательства шпехтовости многообразия $\mathfrak{N}_3\mathfrak{L}_n$ достаточно доказать шпехтовость многообразия $\mathfrak{M}_n^{(t)}$ для любого $t=0, 1, 2, \dots$. Многообразие $\mathfrak{M}_n^{(0)}$ — нулевое, и поэтому оно шпехтово. Допустим, что мы уже доказали шпехтовость многообразия $\mathfrak{M}_n^{(t)}(t>0)$. Мы докажем, что тогда многообразие $\mathfrak{M}_n^{(t+1)}$ также шпехтово. Пусть $M_t=T(\mathfrak{M}_n^{(t)})$, $F=\mathscr{K}\langle X\rangle/M_{t+1}$, $M=M_t/M_{t+1}$. Свободные порождающие относительно свободной алгебры F мы будем обозначать тоже через $x_1, x_2, \dots$. Как хорошо известно [6], шпехтовость многообразия $\mathfrak{M}_n^{(t+1)}$ следует из следующего предложения.

Предложение 2. *Любой T-идеал алгебры F, содержащийся в M, конечно порожден.*

Пусть σ_{ij} — автоморфизм алгебры F, который определяется равенствами $x_i\sigma_{ij}=x_j$, $x_j\sigma_{ij}=x_i$, $x_k\sigma_{ij}=x_k$, $k\neq i, j$, $i\neq j$. Для любого i положим $\sigma_{ii}=\varepsilon=id_F$ — тождественный автоморфизм алгебры F. Выделим следующие подмножества алгебры F:

$$A=\{x_1^{k_1}\dots x_r^{k_r}\mid r\geq 0,\quad k_i\geq 0,\quad 1\leq i\leq r\},$$

$$B=\{[x_{i_1}, x_{i_2}]\dots[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}]\mid r\geq 0,\ i_1\leq i_2\leq\dots\leq i_{2r}\},$$

$$H_1=\{([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{j_1}, x_{j_2}])(\varepsilon+\sigma_{ij})\mid i=i_1, i_2,\ j=j_1, j_2;\ i_1<i_2, j_1<j_2;\ i\leq j\},$$

$$H_2=\{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]\mid 3\leq r\leq n+1\},\quad H=H_1\bigcup H_2.$$

Если a, b, h_1, h_2 — элементы соответственно из A, B, H_1, H_2, то положим $\widehat{a}=a$, $\widehat{b}=x_{i_1}\dots x_{i_{2r}}$, $\widehat{h_1}=x_{i_1}x_{i_2}x_{j_1}x_{j_2}x_ix_j$, $\widehat{h_2}=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_r}$. Мы часто будем использовать следующие тождества, которые выполняются в любой ассоциативной алгебре:

$$ab=ba+[a, b],$$

$$[ab, x]=a[b, x]+[a, x]b,$$

$$[a, x][b, y]=-[a, y][b, x]-a[b, x, y]-[a, x, y]b-[x, ab, y], \tag{1}$$

$$[x, y, z]=[x, z, y]+[x, [y, z]].$$

Лемма 3. *Идеал M порождается как K-модуль элементами следующих двух видов:*

(E_1) $a_1b_1h_1\dots h_ta_2b_2$, $a_i\in A$, $b_i\in B$ $(i=1, 2)$, $h_i\in H$ $(i=1, \dots, t)$,

(E_2) $a_2b_2h_1\dots h_k\dots h_{l-1}a_1b_1h_l\dots h_ta_3b_3$, $a_i\in A$, $b_i\in B$ $(i=1, 2, 3)$,

$h_i\in H$ $(i=1, \dots, t)$ *и элементы* h_k, $h_l\in H_2$ — *коммутаторы длины* $n+1$.

Доказательство. Имея в виду полилинейность определяющих тождеств многообразия $\mathfrak{M}_n^{(t)}$, мы можем записать любой элемент $f\in M$ как линейную комбинацию (с коэффициентами из K) полиномов вида

$$g_1=c_1[d_1, d_2, d_3]c_2\dots c_t[d_{3t-2}, d_{3t-1}, d_{3t}]c_{t+1},$$

где c_i, d_j — мономы. При этом любой коммутатор $[d_1, d_2, d_3]$ является линейной комбинацией (используя второе и третье тождества из (1)) полиномов вида c_1hc_2, где c_1 и c_2 — мономы, а h — тройной коммутатор из H_2 или $h \in H_1$. Так мы получаем, что любой элемент из M — линейная комбинация полиномов вида $g_2 = c_1h_1c_2h_2 \ldots c_th_tc_{t+1}$, где c_i — мономы, а $h_j \in H$. Пусть $c_2 = x_{i_1} \ldots x_{i_r}$. Используя первое тождество из (1), мы получаем $G_2 = c_1x_{i_1}h_1x_{i_2} \ldots x_{i_r}h_2 \ldots h_tc_{t+1} + c_1[h_1, x_{i_1}]x_{i_2} \ldots x_{i_r}h_2 \ldots h_tc_{t+1}$. Аналогичным образом мы поступаем с остальными буквами из c_2. Так мы успели полином f_2 записать как линейную комбинацию полиномов вида $g_3 = c_1h_1h_2c_3h_3 \ldots c_th_tc_{t+1}$, где c_i — мономы, а $h_j \in H$. Потом мы начинаем перебрасывать буквы из c_3 налево и т. д. При этом может случиться, что в линейной комбинации получается полином вида $g_4 = c_1h_1h_2 \ldots h_kc_{k+1}h_{k+1} \ldots c_th_tc_{t+1}$, где h_k — коммутатор длины $n+1$. Тогда аналогичным образом начинаем перебрасывать буквы из $c_{k+1}, \ldots, c_t$ направо. Могут встретиться два случая.

Первый случай. В линейной комбинации появляется полином вида $g_5 = c_1h_1h_2 \ldots h_k \ldots h_{l-1}c_lh_lc_{l+1}h_{l+1} \ldots c_th_tc_{t+1}$, где уже h_k и h_l — коммутаторы длины $n+1$. Тогда мы можем перебросить все буквы из $c_{l+1}, \ldots, c_t$ на последнем месте справа, так как если появится третий коммутатор длины $n+1$, то этот полином равен нулю в алгебре F.

Второй случай. Мы успели перебросить все буквы из $c_{k+1}, \ldots, c_t$ на последнем месте справа.

Так мы получаем, что любой полином из M является линейной комбинацией полиномов двух видов: $g_6 = c_2h_1h_2 \ldots h_k \ldots h_{l-1}c_1h_lh_{l+1} \ldots h_tc_3$, $g_7 = c_1h_1 \ldots h_tc_2$, где c_i — мономы, а $h_j \in H$, при этом, в первом случае h_k и h_l — коммутаторы длины $n+1$. Наконец, замечая, что по модулю $T([x_1, x_2, x_3])$ любой моном является линейной комбинацией полиномов вида ab, $a \in A$, $b \in B$, мы получаем утверждение леммы.

Пусть p и q — натуральные числа, а σ — эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $x_i\sigma = x_i + [x_i, x_p, x_q]$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $T_2 = T([x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6])$.

Лемма 4. *Пусть $f = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}]$ — коммутатор длины не меньше, чем 3. Тогда*

$$f\sigma = f + [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x_p, x_q] + \Sigma\varepsilon_ig_i \pmod{T_2},$$

где $\varepsilon_i \in \mathscr{K}$, а g_i — коммутаторы вида $g_i = [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}, [x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}]]$, где $\{j_1, \ldots, j_r, j_{r+1}, j_{r+2}\} = \{i_1, \ldots, i_r, p, q\}$.

Доказательство. Так как мы работаем по модулю T_2, то

$$f\sigma = [x_{i_1} + [x_{i_1}, x_p, x_q], [x_{i_2} + [x_{i_2}, x_p, x_q], x_{i_3} + [x_{i_3}, x_p, x_q], x_{i_4}, \ldots, x_{i_r}]$$
$$= f + [x_{i_1}, x_p, x_q, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}] + [x_{i_1}, [x_{i_2}, x_p, x_q], x_{i_3}, \ldots, x_{i_r}]$$
$$+ [x_{i_1}, x_{i_2}, [x_{i_3}, x_p, x_q], x_{i_4}, \ldots, x_{i_r}] \pmod{T_2}.$$

Применяя последнее тождество из (1), мы легко получаем сравнение $f\sigma = f + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_p, x_q, x_{i_4}, \ldots, x_{i_r}] + \Sigma\varepsilon_ih_i$, где $\varepsilon_i \in \mathscr{K}$, а h_i — коммутаторы вида $h_i = [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, [x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}], x_{j_4}, \ldots, x_{j_r}]$. Снова из последнего тождества из (1) легко видно, что

$$h_i = g_i = [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}, [x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}]] \pmod{T_2},$$
$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_p, x_q, x_{i_4}, \ldots, x_{i_r}] = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x_p, x_q] + \Sigma\varepsilon_ig_i,$$

где g_i — полиномы указанного вида, Лемма доказана.

Мы теперь вполне упорядочим множество E всех элементов вида (E_1) и (E_2). Пусть сначала $c_1 = x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$ и $c_2 = x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$ — мономы. Обозначим степень c_i через $\deg c_i$. Будем считать, что c_1 меньше c_2 (и обозначать $c_1 < c_2$), если $\deg c_1 < \deg c_2$ или $\deg c_1 = \deg c_2$ и $s_j < t_j$ для некоторого $j \leq r$, но $s_i = t_i$ для любого $i < j$. Пусть a_1 и a_2 — элементы из $A(B)$. Будем считать, что элемент a_1 меньше элемента a_2 (и обозначим также $a_1 < a_2$), если $\widehat{a}_1 < \widehat{a}_2$. Пусть $h_1, h_2 \in H_i$ $(i = 1, 2)$. Будем считать $h_1 < h_2$, если $\deg h_1 > \deg h_2$ или $\deg h_1 = \deg h_2$, но $\widehat{h}_1 < \widehat{h}_2$. (Так как длины коммутаторов из H_2 ограничены сверху, то это не только линейная, но и полная упорядоченность в множестве H_2.) Любой элемент из H_1 мы считаем больше любого элемента из H_2. Так мы вполне упорядочили множества A, B, H.

Определение 5. а. *Пусть* $m = a_1 b_1 h_1 \ldots h_t a_2 b_2$ *и* $n = a_1' b_1' g_1 \ldots g_t a_2' b_2'$ *— два элемента вида* (E_1) $(a_i, a_i' \in A$ $(i = 1, 2)$, $b_j, b_j' \in B$ $(j = 1, 2)$, $h_s, g_s \in H$ $(s = 1, \ldots, t))$. *Мы считаем, что элемент* m *меньше элемента* n (*и обозначаем* $m < n$), *если упорядоченная последовательность* $(h_1, \ldots, h_t, a_1, b_1, a_2, b_2)$ *из* $t+4$ *элементов меньше упорядоченной последовательности* $(g_1, \ldots, g_t, a_1', b_1', a_2', b_2')$ *лексикографически, т. е.* $h_1 < g_1$ *или* $h_1 = g_1$, *но* $h_2 < g_2$ *и т. д.*

б. *Пусть* $m = a_2 b_2 h_1 \ldots h_k \ldots a_1 b_1 h_l \ldots h_t a_3 b_3$ *и* $n = a_2' b_2' g_1 \ldots g_{k_1} \ldots a_1' b_1' g_{l_1} \ldots g_t a_3' b_3'$ *— два элемента вида* (E_2). *Мы считаем, что* $m < n$, *если упорядоченная последовательность* $(a_1, b_1, h_1, \ldots, h_t, a_2, b_2, a_3, b_3)$ *из* $t+6$ *элементов меньше упорядоченной последовательности* $(a_1', b_1', g_1, \ldots, g_t, a_2', b_2', a_3', b_3')$ *лексикографически.*

Мы считаем еще, что любой элемент вида (E_1) *больше любого элемента вида* (E_2).

Легко проверяется, что таким образом мы вполне упорядочили множество E.

Пусть $a_1 = x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$ и $a_2 = x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$ — элементы из A. Мы будем обозначать $a_1 \subseteq a_2$, если $s_i \leq t_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Если $b_1, b_2 \in B$ и $\widehat{b_1} \subseteq \widehat{b_2}$, мы тоже будем обозначать $b_1 \subseteq b_2$.

Пусть J_0 — множество всех неотрицательных целых чисел. Через Φ будем обозначать множество всех инъективных отображений множества J_0 в себя, которые сохраняют естественную упорядоченность чисел и отображают 0 в 0. Любое отображение $\varphi \in \Phi$ индуцирует эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $x_i \varphi^* = x_{i\varphi}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теперь мы рассмотрим другой порядок в множестве E. Пусть $m, n \in E$. Мы будем обозначать $m \leq_\Phi n$, если m и n-элементы одного и того же вида ((E_1) или (E_2)) и, кроме того,

а. Если $m = a_1 b_1 h_1 \ldots h_t a_2 b_2$, $n = a_1' b_1' g_1 \ldots g_t a_2' b_2'$ — элементы вида (E_1), то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $h_i \varphi^* = g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, $a_j \varphi^* \subseteq a_j'$, $b_j \varphi^* \subseteq b_j'$ $(j = 1, 2)$.

б. Если $m = a_2 b_2 h_1 \ldots h_k \ldots a_1 b_1 h_l \ldots h_t a_3 b_3$ и $n = a_2' b_2' g_1 \ldots g_{k_1} \ldots a_1' b_1' g_{l_1} \ldots g_t a_3' b_3'$ — элементы вида (E_2), то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $h_i \varphi^* = g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, $a_j \varphi^* \subseteq a_j'$, $b_j \varphi^* \subseteq b_j'$ $(j = 1, 2, 3)$ и, кроме того, $\deg (a_1 b_1) \equiv \deg (a_1' b_1') \pmod 8$.

Лемма 6. *Частично упорядоченное множество* $(E, \leq_\Phi)$ *является частично хорошо упорядоченным.*

Напомним, что частично упорядоченное множество $(X, \leqq)$ называется частично хорошо упорядоченным, если для каждого непустого подмножества S множества X существует конечное подмножество $S_0 \subseteqq S$ такое, что для любого элемента $s \in S$ существует элемент $s_0 \in S_0$, для которого выполняется неравенство $s_0 \leqq s$.

Доказательство леммы является следствием леммы 2.4 и предложения 2.7 работы [3].

Для любого элемента $f \in M$ зафиксируем некоторую запись $f = \Sigma \lambda_i m_i$, где $\lambda_i \neq 0$, $\lambda_i \in \mathscr{K}$, $m_i \in E$ и $m_1 > m_2 > \ldots$. Мы будем называть m_1 старшим членом полинома f (в этой записи) и обозначать через $wt(f)$; λ_1 будем называть старшим коэффициентом и обозначать через $l(f)$.

Следующая лемма доказана в работе [6] (Лемма 4.1).

Лемма 7. *Пусть* $f \in M$, $wt(f) = abg$, *где* $g = h_1 \ldots h_t a' b'$, $l(f) = \lambda$, $a = x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$, $\widehat{b} = x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$. *Тогда*

а) $l(x_p f) = \lambda$ *и* $wt(x_p f) = a^* bg$, *где* $a^* = x_1^{s_1} \ldots x_p^{s_p+1} \ldots x_r^{s_r}$;

б) $l([x_p, x_q] f) = \pm\lambda$ *и* $wt([x_p, x_q] f) = ab^* g$, *где* $b^* = x_1^{t_1} \ldots x_p^{t_p+1} \ldots x_q^{t_q+1} \ldots x_r^{t_r}$.

Аналогичные утверждения справедливы и для умножения справа на x_p или на $[x_p, x_q]$.

Следующая лемма доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 8. *Пусть* $s, t \in E$, $\varphi \in \Phi$ *и* $s < t$. *Тогда* $s\varphi^* < t\varphi^*$.

Как следствие мы получаем, что если $f \in M$, то $wt(f\varphi^*) = wt(f)\varphi^*$.

Лемма 9. *Пусть* $f \in M$, $l(f) = \lambda$, $wt(f) = s = a'b'h_1 \ldots h_k \ldots abh_l \ldots h_t a'' b''$ — *элемент вида* (E_2), $a = x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$. *Тогда* $l(f\sigma) = \lambda$ *и* $wt(f\sigma) = t = a'b'h_1 \ldots h_k \ldots a^* b h_l \ldots h_t a'' b''$, *где* $a^* = x_1^{s_1} \ldots x_p^{s_p+2} \ldots x_q^{s_q+2} \ldots x_r^{s_r}$.

Доказательство. В силу леммы 8 достаточно доказать только, что $l((\lambda s)\sigma) = \lambda$ и $wt(s\sigma) = t$. Имея в виду определения линейного порядка в множестве E (Опр. 5) и лемму 4, мы видим, что для нахождения старшего члена $s\sigma$ достаточно рассмотреть выражение

$$a = a'b'h_1 \ldots (h_k + h_k' + \Sigma \lambda_i g_i) \ldots ab(h_l + h_l' + \Sigma \mu_j f_j) \ldots h_t a'' b'',$$

где $h_k = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}]$, $h_k' = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}, x_p, x_q]$, g_i — элементы вида $[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n+1}}, [x_{j_{n+2}}, x_{j_{n+3}}]]$, $h_l = [x_{m_1}, \ldots x_{m_{n+1}}]$, $h_l' = [x_{m_1}, \ldots, x_{m_{n+1}}, x_p, x_q]$, а f_j — элементы вида $[x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n+1}}, [x_{k_{n+2}}, x_{k_{n+3}}]]$. Здесь h_k', h_l', g_i и f_j — коммутаторы длины $n+3$. Используя определение длинного коммутатора, мы записываем h_k' и h_l' как линейную комбинацию коммутаторов длины $n+1$, умноженных слева или справа на буквы x_p и x_q, а элементы вида f_i или g_j — как линейную комбинацию коммутаторов, умноженных слева или справа на коммутатор длины два. Теперь, как и в доказательстве леммы 3, мы записываем a как линейную комбинацию элементов вида (E_2). При этом ясно, что появится только один раз элемент t. Имея в виду определения линейного порядка в множестве (E_2) (Опр. 5, б), сначала, сравнивая степени элементов a_1 и a_1'), мы заключаем, что $wt(s\sigma) = t$, $l((\lambda s)\sigma) = l(\lambda(s\sigma)) = \lambda$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть* f *и* g — *полиномы из* M *и* $s = wt(f) \leq_\Phi wt(g) = t$, $l(f) = \lambda$. *Тогда существует полином* $h \in T(f)$, *для которого* $wt(h) = t$, $l(h) = \lambda$.

Доказательство. Так как выполняется неравенство $s \leq_{\Phi} t$, то s и t — элементы одного и того же вида. Пусть сначала s и t — элементы вида (E_1) и $s = a_1 b_1 h_1 \ldots h_t a_2 b_2$, $t = a'_1 b'_1 g_1 \ldots g_t a'_2 b'_2$. Из того, что выполняется неравенство $s \leq_{\Phi} t$, следует, что существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $h_i \varphi^* = g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, $a_j \varphi^* \subseteq a'_j$, $b_j \varphi^* \subseteq b'_j$ $(j = 1, 2)$. В силу леммы 7 мы можем считать $a_j \varphi^* = a'_j$, $b_j \varphi^* = b'_j$ $(j = 1, 2)$, и в этом случае все доказано, так как $wt(f\varphi^*) = s\varphi^*$.

Пусть теперь s и t — элементы вида (E_2) и $s = a_2 b_2 h_1 \ldots h_k \ldots a_1 b_1 h_l \ldots h_t a_3 b_3$, $t = a'_2 b'_2 g_1 \ldots g_{k_1} \ldots a'_1 b'_1 g_{l_1} \ldots g_t a'_3 b'_3$. В силу определения порядка $\leq_{\varphi}$ существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $h_i \varphi^* = g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, $a_j \varphi^* \subseteq a'_j$, $b_j \varphi^* \subseteq b'_j$ $(j = 1, 2, 3)$. (В частности, из этого следует, что $k = k_1$, $l = l_1$.) Используя снова лемму 7, мы можем считать, что $a_j \varphi^* = a'_j$, $b_j \varphi^* = b'_j$ для $j = 2, 3$. Теперь мы можем вести индукцию по числу $m(s, t) = \deg(a'_1 b'_1) - \deg(a_1 b_1) = \deg(a'_1 b'_1) - \deg(a_1 \varphi^* b_1 \varphi^*)$. Если $m(s, t) = 0$, то все доказано. Пусть $m(s, t) > 0$. Тогда мы знаем, что $m(s, t) \geq 8$. Пусть x_p и x_q не участвуют в записи полинома $f\varphi^*$ и $p < q$. Применяя лемму 9, мы заключаем, что в идеале $T(f)$ содержится полином h_1 со старшим коэффициентом λ и старшим членом

$$s_1 = a'_2 b'_2 g_1 \ldots g_k \ldots (a_1 \varphi^*) x_p^2 x_q^2 (b_1 \varphi^*) g_l \ldots g_t a'_3 b'_3.$$

Пусть x_{p_1}, x_{p_2}, x_{q_1}, x_{q_2} не участвуют в записи полинома h_1 и $p_1 < p_2 < q_1 < q_2$. Рассмотрим эндоморфизмы τ и ϱ алгебры F, определенные равенствами $x_p \tau = x_{p_1} + x_{p_2}$, $x_i \tau = x_i$, $i \neq p$; $x_q \varrho = x_{q_1} + x_{q_2}$, $x_i \varrho = x_i$, $i \neq q$. Применяя к полиному h_1 последовательно эндоморфизмы τ и ϱ, мы заключаем, что в идеале $T(f)$ содержится полином h_2 со старшим коэффициентом 4λ и старшим членом

$$s_2 = a'_2 b'_2 g_1 \ldots g_k \ldots (a_1 \varphi^*) x_{p_1} x_{p_2} x_{q_1} x_{q_2} (b_1 \varphi^*) g_l \ldots g_t a'_3 b'_3.$$

Пусть сначала $\deg(b_1 \varphi^*) = \deg b'_1$. Тогда $\deg a'_1 - \deg(a_1 \varphi^*) \geq 8$. В этом случае существуют буквы $x_{a_1}, \ldots, x_{a_8}$ так, что если $a_1 \varphi^* = x_1^{i_1} \ldots x_{a_1}^{i_{a_1}} \ldots x_{a_8}^{i_{a_8}} \ldots x_r^{i_r}$, $a'_1 = x_1^{j_1} \ldots x_{a_1}^{j_{a_1}} \ldots x_{a_8}^{j_{a_8}} \ldots x_r^{j_r}$, то $i_{a_1} < j_{a_1}, \ldots, i_{a_8} < j_{a_8}$. Делаем подстановку $x_{p_1} = x_{a_1} x_{a_2}$, $x_{p_2} = x_{a_3} x_{a_4}$, $x_{q_1} = x_{a_5} x_{a_6}$, $x_{q_2} = x_{a_7} x_{a_8}$. Тогда для старшего члена s_3 получившегося полинома h_3 мы имеем $m(s_3, t) < m(s, t)$, и индукционный шаг сделан.

Пусть теперь $\deg(b'_1) - \deg(b_1 \varphi^*) = 2$. Тогда $\deg(a'_1) - \deg(a_1 \varphi^*) \geq 6$ и существуют буквы $x_{a_1}, \ldots, x_{a_6}$, x_b, x_c такие, что $\widehat{b_1 \varphi^*} = x_1^{k_1} \ldots x_b^{k_b} \ldots, x_c^{k_c} \ldots x_r^{k_r}$,

$$\widehat{b'_1} = x_1^{k_1} \ldots x_b^{k_b + 1} \ldots x_c^{k_c + 1} \ldots x_r^{k_r},\ a_1 \varphi^* = x_1^{i_1} \ldots x_{a_1}^{i_{a_1}} \ldots x_{a_6}^{i_{a_6}} \ldots x_r^{i_r},$$

$$a'_1 = x_1^{j_1} \ldots x_{a_1}^{j_{a_1}} \ldots x_{a_6}^{i_{a_6}} \ldots x_r^{j_r};\quad i_{a_1} < j_{a_1}, \ldots, i_{a_6} < j_{a_6}.$$

В этом случае делаем подстановку $x_{p_1} = x_{a_1} x_{a_2}$, $x_{p_2} = x_{a_3} x_{a_4}$, $x_{q_1} = x_{a_5} x_{a_6}$, $x_{q_2} = [x_b, x_c]$. Снова получаем полином h_4, для старшего члена s_4 которого выполняется неравенство $m(s_4, t) < m(s, t)$.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Теперь доказательство предложения 2 заканчивается уже стандартным путем, см. напр. [6. Пр. 4.5]. Теорема 1 доказана.

Автор выражает свою благодарность Г. К. Генову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Cohen. On the laws of a metabelian variety. *J. Algebra*, **5**, 1967, 267—273.
2. R. M. Bryant, M. R. Vaughan-Lie. Soluble varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math. Oxford*, **23**, 1972, 107—112.
3. Г. К. Генов. Некоторые шпехтовые многообразия ассоциативных алгебр. *Плиска*, **2**, 1981, 30-40.
4. А. П. Попов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, **2**, 1981, 41-53.
5. П. Ж. Чирипов, П. Н. Сидеров. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, **2**, 1981. 103-115.
6. А. П. Попов. Някои шпехтови многообразия от пръстени. Математика и математическо образование. *Математика и математическо образование*, **8**. София, 1979, 460-471.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 4. 1980