Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КОНЕЧНАЯ БАЗИРУЕМОСТЬ ТОЖДЕСТВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ДИАНА В. ЛЕВЧЕНКО

Доказывается конечная базируемость тождеств с инволюцией матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль.

1. Введение. В работе [4] отмечается несомненный интерес, который проявляется в последнее время к изучению тождеств с инволюцией, и изучаются стандартные полиномы с инволюцией типа транспонирования для матричных алгебр.

В настоящей работе показано, что тождества с инволюцией алгебры матриц второго порядка над полем $\mathfrak{K}$ характеристики нуль вытекают из конечного их числа. (Конечная базируемость обычных полиномиальных тождеств этой алгебры установлена в работе [3].)

Пусть $\mathfrak{K}[x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots] = \mathfrak{K}[X, Y]$ — абсолютно свободная ассоциативная алгебра над полем $\mathfrak{K}$ характеристики нуль с бесконечным числом свободных образующих $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$. В $\mathfrak{K}[X, Y]$ определим инволюцию $*$ посредством равенств $x_i^* = y_i$, $y_i^* = x_i$, $1 \leq i < \infty$. Будем писать x_i^* вместо y_i и назовем $\mathfrak{K}[X, X^*]$ свободной алгеброй с инволюцией.

Если R и R' — алгебры над $\mathfrak{K}$ с инволюциями соответственно $*$ и T, то гомоморфизм Φ алгебры R в алгебру R' является гомоморфизмом алгебр с инволюциями, если $\Phi(r^*) = (\Phi(r))^T$ для любого r из R.

Пусть R — алгебра над $\mathfrak{K}$ с инволюцией $*$ с бесконечным множеством образующих $r_1, r_2, \dots$. Тогда существует единственный гомоморфизм (в категории алгебр с инволюциями) из $\mathfrak{K}[X, X^*]$ в R, отображающий x_i в r_i для любого i. Образ элемента $f(x_1, \dots, x_m; x_1^*, \dots, x_m^*)$ обозначим через $f(r_1, \dots, r_m; r_1^*, \dots, r_m^*)$. Будем говорить, что $f = f(x_1, \dots, x_m; x_1^*, \dots, x_m^*)$ из $\mathfrak{K}[X, X^*]$ является тождеством с инволюцией алгебры R, если f принадлежит ядру каждого гомоморфизма из $\mathfrak{K}[X, X^*]$ в R, т. е. $f(r_1, \dots, r_m; r_1^*, \dots, r_m^*) = 0$ для всех $r_1, r_2, \dots, r_m$ из R [1]. (Обычные полиномиальные тождества тоже являются тождествами с инволюцией.)

Идеал Q алгебры $\mathfrak{K}[X, X^*]$ называется T-идеалом, если Q инвариантен относительно инволюции $*$ и относительно всех эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{K}[X, X^*]$ (в категории алгебр с инволюциями).

Полином g из $\mathfrak{K}[X, X^*]$ является следствием полиномов $f_1, f_2, \dots$ из $\mathfrak{K}[X, X^*]$, если g принадлежит T-идеалу, порожденному полиномами $f_1, f_2, \dots$.

Под степенью монома u по переменной x_i будем понимать сумму чисел вхождений x_i и x_i^* в u. Степенью одночлена называется сумма степеней всех его переменных, а степенью многочлена будет максимальная степень его мономов. В частности, полином f будет полилинейным, если все входящие в f переменные имеют степень 1 в каждом мономе полинома f.

Замечание 1. Повторяя рассуждения, используемые в случае обычных полиномиальных тождеств [2], можно убедиться, что все тождества с инволюцией любой алгебры над полем характеристики нуль следуют из полилинейных. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только полилинейных тождеств с инволюцией.

Замечание 2. Пусть R — алгебра с инволюцией $*$ над полем $\mathfrak{K}$ характеристики, отличной от двух. Тогда всякое полилинейное тождество с инволюцией алгебры R является суммой тождеств с инволюцией вида:

$$g(x_1+x_1^*, \ldots, x_k+x_k^*;\ x_{k+1}-x_{k+1}^*, \ldots, x_m-x_m^*). \tag{1}$$

Действительно, пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ — произвольное полилинейное тождество с инволюцией алгебры R. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, \ldots, x_m^*) + f_2(x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, \ldots, x_m^*),$$

где $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, x_3^*, \ldots, x_m^*)$ объединяет все мономы полинома $f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, которые не содержат x_1^*, а $f_2(x_2, x_3, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ включает все остальные мономы, т. е. ввиду линейности по x_1, сюда вошли только одночлены, в которых не содержится x_1.

Так как характеристика поля $\mathfrak{K}$ отлична от двух, то

$$x_1 = 1/2(x_1+x_1^*)+1/2(x_1-x_1^*) \text{ и } f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$$

$$= 1/2\,\{f_1(x_1+x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, \ldots, x_m^*)+f_2(x_2, \ldots, x_m;\ x_1+x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)\}$$

$$+1/2\,\{f_1(x_1-x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, \ldots, x_m^*)-f_2(x_2, \ldots, x_m;\ x_1-x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)\}.$$

Но $f_1(x_1+x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, \ldots, x_m^*)+f_2(x_2, x_3, \ldots, x_m;\ x_1+x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)+f(x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_1, x_2^*, \ldots, x_m^*).$$

А $f_1(x_1-x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_2^*, \ldots, x_m^*)-f_2(x_2, x_3, \ldots, x_m;\ x_1-x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)-f(x_1^*, x_2, \ldots, x_m;\ x_1, x_2^*, \ldots, x_m^*),$$

и, следовательно, выражения в фигурных скобках являются тождествами с инволюцией алгебры R. Продолжая этот процесс по каждой переменной x_i, $i=2, 3, \ldots, m$, получим искомое утверждение.

Если R — кольцо с инволюцией $*$, элемент a называется симметричным, если $a^*=a$, и антисимметричным, если $a^*=-a$. Будем называть элемент $a+a^*$ следом элемента a, а $a-a^*$ антиследом. Через $a \circ b$ будем обозначать, как обычно, $ab+ba$. В дальнейшем, если не указано противное, коммутаторы будут левонормированными.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — некоторый полином, через $f|_{x_i=a}$ мы будем обозначать полином, получающийся из полинома f подстановкой элемента a вместо x_i.

Далее мы остановимся последовательно на обоих возможных типах инволюций — транспонирования и симплектической — в алгебре матриц порядка два. Результаты этой работы анонсированы в [6].

2. Инволюция типа транспонирования. Определение. *Если R — кольцо с центром $Z(R)$, инволюция $*$ является инволюцией первого рода, если $a^*=a$ для всех a из $Z(R)$. В противном случае инволюция называется инволюцией второго рода.*

Определение. *Если в кольце R выполняется тождество с инволюцией $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, то говорят, что f — специальное, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m})$ является обычным полиномиальным тождеством в R.*

В работе [5] показано, что если R — простая алгебра с инволюцией второго рода, то все полилинейные тождества с инволюцией — специальные, и, следовательно, как показано в [3] для матричной алгебры второго порядка, они вытекают из конечного их числа.

Итак, если $\mathfrak{R}_2$ — алгебра матриц второго порядка над $\mathfrak{R}$, будем предполагать, что на $\mathfrak{R}_2$ задана инволюция типа транспонирования, являющаяся инволюцией первого рода, т.е.

$$\text{если } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ то } X^*=\begin{pmatrix} a & \alpha^{-1}c \\ \alpha b & d \end{pmatrix}, \text{ где } 0\neq\alpha\in\mathfrak{R}$$

и, следовательно, $X+X^*=\begin{pmatrix} 2a & b+\alpha^{-1}c \\ c+\alpha b & 2d \end{pmatrix}$, $X-X^*=(b-\alpha^{-1}c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}_2$ — алгебра матриц второго порядка над полем $\mathfrak{R}$ характеристики нуль и пусть на $\mathfrak{R}_2$ задана инволюция $*$ типа транспонирования первого рода. Тогда все тождества с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$ следуют из тождеств*

$$[(x-x^*)(y-y^*),\ z]=0, \tag{2}$$

$$[x-x^*,\ y-y^*]=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&[x_1+x_1^*, x_2+x_2^*]\,[x_3+x_3^*, x_4+x_4^*]+[x_2+x_2^*, x_3+x_3^*]\,[x_1+x_1^*, x_4+x_4^*]\\ &\quad+[x_3+x_3^*, x_1+x_1^*]\,[x_2+x_2^*, x_4+x_4^*]=0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$[x-x^*, y+y^*, z-z^*, t+t^*]=4(x-x^*)(z-z^*)\,[t+t^*, y+y^*]. \tag{5}$$

То, что (2) и (3) являются тождествами с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$, видно непосредственно.

Так как элемент $(x-x^*)\circ(z+z^*)$ является антиследом элемента $(x-x^*)(z+z^*)$, из (3) имеем $[(x-x^*)\circ(z+z^*), y-y^*]=0$. Но тогда

$$(x-x^*)\circ[z+z^*, y-y^*]=0, \tag{6}$$

откуда, учитывая тождества (2) и (3), получим, что $(x-x^*)(z+z^*)(y-y^*)=(y-y^*)(z+z^*)(x-x^*)$.

С другой стороны, снова из (3) следует, что $(x-x^*)(z-z^*)(y-y^*)=(y-y^*)(z-z^*)(x-x^*)$, и так как характеристика поля $\mathfrak{R}$ отлична от двух, то каждый элемент z можно представить в виде $z=1/2(z+z^*)+1/2(z-z^*)$, и поэтому

$$(x-x^*)z(y-y^*)=(y-y^*)z(x-x^*) \tag{7}$$

является тождеством алгебры $\mathfrak{R}_2$.

Если s_1 и s_2 — симметричные элементы, а k_1, k_2 — антисимметричные, то

$$[s_1, s_2]^* = -[s_1, s_2], \tag{8}$$

$$[s_1, k_1]^* = [s_1, k_1], \tag{9}$$

$$[k_1, k_2]^* = -[k_1, k_2]. \tag{10}$$

Кроме того, если характеристика основного поля $\mathfrak{K}$ отлична от двух, то каждый симметричный элемент является следом, а каждый антисимметричный — антиследом, и, следовательно, коммутаторы, зависящие от следов и антиследов, сами являются следами либо антиследами. В дальнейшем, для краткости, коммутаторы, являющиеся следами, мы будем называть симметричными коммутаторами, а те, которые являются антиследами — антисимметричными.

В алгебре $\mathfrak{K}_2$ выполняется стандартное тождество степени 4 (от следов независимых переменных), учитывая равенство (8) и тождество (3), а также, что характеристика поля $\mathfrak{K}$ отлична от двух, мы заключаем, что (4) является тождеством с инволюцией алгебры $\mathfrak{K}_2$.

Как следствие из (6) получим

$$\begin{aligned}[x-x^*, y+y^*, z-z^*] &= [x-x^*, y+y^*](z-z^*)-(z-z^*)[x-x^*, y+y^*]\\ &= 2[x-x^*, y+y^*](z-z^*).\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда, используя (2) и (11), получим

$$\begin{aligned}[x-x^*, y+y^*, z-z^*, t+t^*] &= 2[[x-x^*, y+y^*](z-z^*), t+t^*]\\ &= 2(x-x^*)(z-z^*)[t+t^*, y+y^*]+2[(x-x^*)(y+y^*)(z-z^*), t+t^*].\end{aligned}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что $[(x-x^*)(y+y^*)(z-z^*), t+t^*] = (x-x^*)(z-z^*)[t+t^*, y+y^*]$ является тождеством с инволюцией алгебры $\mathfrak{K}_2$, откуда следует, что (5) также является тождеством алгебры $\mathfrak{K}_2$.

Лемма 1. *Если f — полилинейное тождество алгебры $\mathfrak{K}_2$ с инволюцией $*$, в записи которого следы независимых переменных участвуют только под знаками коммутаторов веса ≥ 2, то f можно представить в виде линейной комбинации элементов следующих трех типов: А) $v_1v_2 \ldots v_{2k}$; Б) $v_1v_2 \ldots v_{2k+1}$; В) $v_1v_2 \ldots v_mw$, где v_i — антисимметричные коммутаторы веса ≥ 1, а w — симметричный коммутатор веса ≥ 2. При этом каждый из коммутаторов v_i и w содержит не более одного антиследа независимой переменной.*

Доказательство. Из тождества Якоби получаем $[x-x^*, y+y^*, z-z^*, t+t^*] = [[x-x^*, y+y^*], [z-z^*, t+t^*]]+[x-x^*, y+y^*, t+t^*, z-z^*]$, и так как коммутатор $[x-x^*, y+y^*, t+t^*]$ антисимметричен (из (9) и (8)), из (3) следует, что второе слагаемое равно нулю.

Теперь из тождества (5) получаем

$$[[x-x^*, y+y^*], [z-z^*, t+t^*]] = 4(x-x^*)(z-z^*)[t+t^*, y+y^*], \tag{12}$$

т. е. коммутатор двух симметричных коммутаторов веса ≥ 2 можно представить в виде произведения антисимметричных коммутаторов. Сейчас мы покажем, что произведение двух симметричных коммутаторов веса ≥ 2 тоже записывается в виде линейной комбинации таких же элементов, а именно

$$[[x-x^*, y+y^*], [z-z^*, t+t^*]] = [x-x^*, y+y^*, z-z^*, t+t^*] \quad \text{(по (11))}$$

$$=2[[x-x^*, y+y^*](z-z^*), t+t^*]$$

$$=2[x-x^*, y+y^*][z-z^*, t+t^*]+2[x-x^*, y+y^*, t+t^*](z-z^*),$$

т. е.

$$[x-x^*, y+y^*][z-z^*, t+t^*]=2(x-x^*)(z-z^*)[t+t^*, y+y^*] - [x-x^*, y+y^*, t+t^*](z-z^*), \tag{13}$$

откуда видно, что произведение $[x-x^*, y+y^*][z-z^*, t+t^*]$ является линейной комбинацией произведений антисимметричных коммутаторов веса ≥ 1.

Теперь, учитывая тождества (3) и (6), произведение антисимметричных коммутаторов v_i, $i=1, 2, \ldots, r$ веса ≥ 1 и симметричных коммутаторов w_j, $j=1, 2, \ldots, s$, веса ≥ 2 можно представить в виде $\varepsilon v_1 v_2 \ldots v_r w_1 w_2 \ldots w_s$, где ε равно 1 или -1, и ввиду (13) заданный полином f можно записать в виде линейной комбинации указанных трех типов элементов. Этим первое утверждение леммы доказано.

Теперь мы установим, что если коммутатор u содержит более одного антиследа независимой переменной, то в случае, когда u симметричен, его можно представить (с точностью до постоянного множителя) в виде произведения одного симметричного и антисимметричных коммутаторов, а если u антисимметричен — в виде произведения антисимметричных коммутаторов, причем в каждом из сомножителей участвуют строго меньше антиследов, чем в исходном коммутаторе u.

Итак, если коммутатор u, веса три, содержит два антиследа независимых переменных, то, как показывает равенство (11), симметричный коммутатор u представим в виде произведения антисимметричного и симметричного коммутатора, содержащих только по одному антиследу.

Пусть коммутатор u имеет вес ≥ 4. Если $u=[w, z-z^*, x, \ldots]$, где w — коммутатор веса ≥ 2 и $u=0$ не является следствием из (3), то w — симметричный коммутатор, и, следовательно, $w=[v, w_1]$, где v — антисимметричный, а w_1 — симметричный коммутатор веса ≥ 1. Но тогда, согласно (11): $[w, z-z^*]=[v, w_1, z-z^*]=2[v, w_1](z-z^*)$.

Далее, если $x=t-t^*$, то мы имеем:

$$[w, z-z^*, t-t^*]=2[v, w_1, t-t^*](z-z^*)=4(z-z^*)(t-t^*)[v, w_1],$$

а если $x=t+t^*$, применяя (5), получим

$$[w, z-z^*, t+t^*]=[v, w_1, z-z^*, t+t^*]=4v(z-z^*)[t+t^*, w_1].$$

Но произведение двух антиследов является центральным полиномом (из (2)), и, следовательно, $u=4(z-z^*)v'u'$, где v' — антисимметричный коммутатор (а именно, это $t-t^*$ или v), а u' — коммутатор, симметричный или антисимметричный, в зависимости от того, какой был u.

И наконец, если простой левонормированный коммутатор u веса ≥ 4 содержит только два антиследа независимых переменных и имеет вид $u=[x-x^*, \ldots, y-y^*]$, то если из тождества (3) не следует $u=0$, то u симметричен и имеет вид $u=[v, t+t^*, y-y^*]$, где v — антисимметричный и, следовательно, из (11) и (6) следует утверждение и в этом случае. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если φ — полилинейное тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$ и $\varphi=f_1+f_2+f_3$, где f_1, f_2, f_3 — линейные комбинации элементов типов А), Б), В) (из леммы 1) соответственно, то f_1, f_2, f_3 являются тождествами с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$.

Действительно, при подстановке в φ элементов из $\mathfrak{R}_2$ мы получим, что нулевая матрица является суммой скалярной матрицы, симметричной матрицы со следом нуль и антисимметричной матрицы. Но если характеристика основного $\mathfrak{R}$ отлична от двух, то представление матрицы в виде суммы указанных типов матриц однозначно и, следовательно, f_1, f_2, f_3 — тождества в $\mathfrak{R}_2$.

Замечание 4. Из тождества (5) и равенств (8) и (9) непосредственно следует, что произведение нечетного числа антисимметричных коммутаторов, хотя бы один из которых имеет вес $\geqq 2$, есть, с точностью до постоянного множителя, антисимметричный коммутатор.

Замечание 5. Из (11) и (8) непосредственно следует, что произведение антисимметричного коммутатора на симметричный веса $\geqq 2$ есть (с точностью до постоянного множителя) симметричный коммутатор.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_l;\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$ — некоторый полином и $s \in S_l$ — подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, l\}$, обозначим через $s(f)$ полином $f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(l)};\ x_{s(1)}^*, \ldots, x_{s(l)}^*)$. Везде ниже через σ_{ij}, $(i \neq j)$ мы будем обозначать подстановку на множестве $\{1, 2, \ldots, l\}$, переставляющую индексы i и j и действующую единичным образом на остальные индексы.

Обозначение $g(x_1, x_2, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_l)$ будет использоваться для того, чтобы подчеркнуть, что полином g не зависит от переменной x_j.

Лемма 2. *Пусть φ — полилинейное тождество с инволюцией степени l алгебры $\mathfrak{R}_2$, зависящее только от следов независимых переменных, и пусть $\varphi = f_1 + f_2 + f_3$, где f_1, f_2, f_3 определены в замечании 3. Тогда существует полилинейный полином*

$$g = g(x_1 + x_1^*, \ldots, x_{i-1} + x_{i-1}^*, x_i - x_i^*, \widehat{x_j}, \widehat{x_j^*}, x_{i+1} + x_{i+1}^*, \ldots, x_l + x_l^*),$$

такой, что тождество $\varphi - \sigma_{ij}\varphi = g \mid x_i = 1/2[x_i + x_i^*, x_j + x_j^*]$ является следствием тождеств (2)—(5).

Доказательство. Докажем лемму последовательно для полилинейных тождеств f_2, f_3, f_1, откуда будет следовать ее справедливость и для полинома φ.

Сначала мы получим еще некоторые следствия из тождеств (2)—(5).

Пусть v — антисимметричный коммутатор веса $\geqq 1$. Из тождества Якоби имеем $[v, y+y^*, z+z^*] = [v, z+z^*, y+y^*] + [v, [y+y^*, z+z^*]]$ и так как $[y+y^*, z+z^*]$ — антисимметричный коммутатор, то учитывая (3), заключаем, что последнее слагаемое в этом равенстве равно нулю. Следовательно,

$$[v, y+y^*, z+z^*] = [v, z+z^*, y+y^*], \tag{14}$$

$$[v, y_1+y_1^*, y_3+y_3^*, y_2+y_2^*, y_4+y_4^*] \tag{15}$$

$$= [v, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*] + [v, y_1+y_1^*, [y_3+y_3^*, y_2+y_2^*], y_4+y_4^*]$$

$$= [v, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*] + 4v[y_3+y_3^*, y_2+y_2^*][y_4+y_4^*, y_1+y_1^*].$$

Теперь, пользуясь (14) и (15), получаем

$$[v, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*]$$

$$= [v, y_3+y_3^*, y_1+y_1^*, y_4+y_4^*, y_2+y_2^*] + 4v[y_4+y_4^*, y_1+y_1^*][y_2+y_2^*, y_3+y_3^*]$$

$$=[v, y_1+y_1^*, y_3+y_3^*, y_2+y_2^*, y_4+y_4^*]+4v[y_4+y_4^*, y_1+y_1^*][y_2+y_2^*, y_3+y_3^*]$$
$$=[v, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*]+4v[y_3+y_3^*, y_2+y_2^*][y_4+y_4^*, y_1+y_1^*]$$
$$+4v[y_4+y_4^*, y_1+y_1^*][y_2+y_2^*, y_3+y_3^*].$$

Учитывая (3), получим, что сумма последних двух слагаемых равна нулю. Окончательно имеем тождество

$$(16)\qquad [v, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*]=[v, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, y_3+y_3^*, y_4+y_4^*].$$

Из тождества (16), в частности, следует, что если простой левонормированный коммутатор

$$u=[v, y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, \quad y_3+y_3^*, y_4+y_4^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, y_{2k}+y_{2k}^*, \ldots],$$

где v — антисимметричный коммутатор веса ≥ 1, после элемента v разобьем на пары, то эти пары можно переставлять между собой местами.

Докажем лемму сначала для полилинейного тождества f_2. Итак, полином f_2 является линейной комбинацией элементов вида $v_1v_2\ldots v_{2k+1}$, где v_i — антисимметричные коммутаторы веса ≥ 2 (φ не зависит от антиследов независимых переменных). Из замечания 4 следует, что f_2 является линейной комбинацией антисимметричных коммутаторов вида

$$u=[x_1+x_1^*, x_2+x_2^*, \quad x_3+x_3^*, x_4+x_4^*, \ldots, x_{2k-1}+x_{2k-1}^*, x_{2k}+x_{2k}^*].$$

Разобьем коммутатор u на пары. Из тождества (14) следует, что элементы в одной паре можно переставлять. Как мы уже отметили, пары, начиная со второй, также можно менять местами, и поэтому, если мы хотим переставить элементы из двух разных пар, можно считать, что эти две пары соседние и если ни одна из них не первая, пользуясь тождеством (15), мы заключаем, что $u-\sigma_{ij}u$ имеет нужный вид, а если одна из них первая, то

$$(17)\qquad [z+z^*, x_i+x_i^*, \quad y_1+y_1^*, y_2+y_2^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*, \ldots]$$

(переставляем пару, в которую входит $x_j+x_j^*$, на втором месте),

$$[z+z^*, x_i+x_i^*, \quad y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-2}+y_{2k-2}^*, \ldots]$$

(по тождеству Якоби и (14)),

$$[z+z^*, x_j+x_j^*, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-2}+y_{2k-2}^*, \ldots]$$
$$+[x_j+x_j^*, x_i+x_i^*, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-2}+y_{2k-2}^*, \ldots,]$$

(отодвигаем вторые пары обоих слагаемых)

$$=[z+z^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-2}+y_{2k-2}^*, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*, \ldots]$$
$$+[x_j+x_j^*, x_i+x_i^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-2}+y_{2k-2}^*, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*, \ldots].$$

Итак, из (14), (15), (16) и (17) следует утверждение леммы для полинома f_2.

Теперь рассмотрим полином f_3, который является линейной комбинацией элементов вида $v_1v_2\ldots v_mw$, где v_i — антисимметричные, а w — симметричный коммутатор веса ≥ 2. Из замечания 5 следует, что f_3 является линейной комбинацией коммутаторов вида

$$u=[x_1+x_1^*, x_2+x_2^*, \quad x_3+x_3^*, x_4+x_4^*, \ldots, x_{2k+1}+x_{2k+1}^*].$$

Разобьем снова коммутатор u на пары, начиная слева, после чего последний элемент $x_{2k+1}+x^*_{2k+1}$ останется один, не входящий в пару. Из предыдущих рассмотрений ясно, что $u-\sigma_{ij}u$ при $i, j\neq 2k+1$ имеет нужный вид. Нам нужно выяснить, как выглядит эта разность, когда один из переставляемых элементов последний, не входящий в пару, и так как по предыдущему пары, начиная со второй, можно менять местами, будем предполагать, что вторая переставляемая переменная входит либо в последнюю пару (на втором месте по (14)), либо в первую пару. В первом из этих случаев имеем

$$(18)\qquad \begin{aligned}&[x_1+x^*_1, x_2+x^*_2, \dots, x_{2k-1}+x^*_{2k-1}, x_i+x^*_i, x_j+x^*_j]\\ &-[x_1+x^*_1, x_2+x^*_2, \dots, x_{2k-1}+x^*_{2k-1}, x_j+x^*_j, x_i+x^*_i]\end{aligned}$$

по (11)

$$=2[x_1+x^*_1, x_2+x^*_2, \dots, x_{2k-1}+x^*_{2k-1}]\,[x_i+x^*_i, x_j+x^*_j].$$

Отметим, что из (7) непосредственно следует

$$(19)\qquad [[x+x^*, y+y^*], p+p^*, \dots, [z+z^*, t+t^*]]=[[z+z^*, t+t^*], p+p^*, \dots, [x+x^*, y+y^*]].$$

Осталось рассмотреть

$$\begin{aligned}u-\sigma_{ij}u=&[x_i+x^*_i, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k}+y^*_{2k}, x_j+x^*_j]\\ &-[x_j+x^*_j, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k}+y^*_{2k}, x_i+x^*_i]\end{aligned}$$

по (17) меняем местами $b+b^*$ и $y_{2k}+y^*_{2k}$

$$\begin{aligned}&=[x_i+x^*_i, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, b+b^*, x_j+x^*_j]\\ &+[y_{2k}+y^*_{2k}, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, x_i+x^*_i, x_j+x^*_j]\\ &-[x_j+x^*_j, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}\ b+b^*, x_i+x^*_i]\\ &-[y_{2k}+y^*_{2k}, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, x_j+x^*_j, x_i+x^*_i]\\ &=[x_i+x^*_i, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, x_j+x^*_j, b+b^*]\\ &+[x_i+x^*_i, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, [b+b^*, x_j+x^*_j]]\\ &-[x_j+x^*_j, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, x_i+x^*_i, b+b^*]\\ &-[x_j+x^*_j, y_{2k}+y^*_{2k}, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, [b+b^*, x_i+x^*_i]]\\ &+[y_{2k}+y^*_{2k}, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, [x_i+x^*_i, x_j+x^*_j]]\end{aligned}$$

к сумме первого и третьего слагаемых применяем (17), к остальным — (19)

$$\begin{aligned}&=[x_i+x^*_i, x_j+x^*_j, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k}+y^*_{2k}, b+b^*]\\ &+[x_j+x^*_j, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, [y_{2k}+y^*_{2k}, x_i+x^*_i]]\\ &-[x_i+x^*_i, b+b^*, y_1+y^*_1, \dots, y_{2k-1}+y^*_{2k-1}, [y_{2k}+y^*_{2k}, x_j+x^*_j]]\end{aligned}$$

$$+[x_i+x_i^*,\ x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, [y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*]]$$

$$=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*]$$

$$+[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, y_{2k}+y_{2k}^*, x_i+x_i^*]$$

$$-[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$

$$-[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, y_{2k}+y_{2k}^*, x_j+x_j^*]$$

$$+[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$

$$+[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*]$$

$$-[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*, y_{2k}+y_{2k}^*].$$

Отсюда

$$2(u-\sigma_{ij}u)=2[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*]$$

$$-[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$

$$+[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$

$$-[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*, y_{2k}+y_{2k}^*].$$

Из (17) следует, что сумма последних трех слагаемых равна нулю и так как характеристика поля $\mathfrak{K}$ отлична от двух, окончательно имеем

$$u-\sigma_{ij}u=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*].$$

Этим мы доказали утверждение леммы для полинома f_3.

И, наконец, докажем лемму для полинома f_1, который является линейной комбинацией произведений четного числа антисимметричных коммутаторов веса $\geqq 2$.

Из замечания 4 следует, что f_1 является линейной комбинацией элементов $u=v'v''$, где v', v'' — антисимметричные коммутаторы. Но тогда, учитывая следующее следствие из тождества (7)

$$[x+x^*, y+y^*, z+z^*, \ldots]v''=[v'', z+z^*, \ldots][x+x^*, y+y^*], \tag{20}$$

можно считать, что коммутаторы v'' имеют вес, равный двум.

Рассмотрим разность $u-\sigma_{ij}u$. Если переменные x_i и x_j входят в v', то утверждение леммы для элементов u следует из тождеств (14), (15) и (16) (как это уже было показано при рассмотрении полинома f_2). Осталось выяснить, как выглядит элемент $u-\sigma_{ij}u$, если одна из переставляемых переменных входит в коммутатор v', а другая — в v''. Разобьем коммутатор v' на пары.

$$v'=[z_1+z_1^*, z_2+z_2^*, z_3+z_3^*, z_4+z_4^*, \ldots, z_{2k-1}+z_{2k-1}^*, z_{2k}+z_{2k}^*].$$

Так как пары, начиная со второй, можно менять местами, достаточно рассмотреть случаи, когда одна из переставляемых переменных входит или в последнюю пару (на последнем месте, учитывая тождества (14)) или в первую пару коммутатора v'. В первом из этих двух случаев равенство

$$[z_1+z_1^*, z_2+z_2^*, \ldots, z_{2k-1}+z_{2k-1}^*, x_i+x_i^*][x_j+x_j^*, y+y^*]$$
$$-[z_1+z_1^*, z_2+z_2^*, \ldots, z_{2k-1}+z_{2k-1}^*, x_j+x_j^*][x_i+x_i^*, y+y^*]$$
$$=[x_j+x_j^*, x_i+x_i^*][z_1+z_1^*, z_2+z_2^*, \ldots, z_{2k-1}+z_{2k-1}^*, y+y^*]$$

есть в точности тождество (4), так как коммутатор $[z_1+z_1^*, \ldots, z_{2k-1}+z_{2k-1}^*]$ является симметричным элементом (следом) (из (8) и (9)).

Рассмотрим теперь последний оставшийся случай — когда одна из переставляемых переменных — x_i — входит в первую пару коммутатора v' а другая — x_j — в коммутатор v''.

$$u-\sigma_{ij}u=[x_i+x_i^* b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*][x_j+x_j^*, z+z^*]$$
$$-[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*][x_i+x_i^*, z+z^*]$$

(по (17))

$$=[x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*][x_j+x_j^*, z+z^*]$$
$$+[y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*][x_j+x_j^*, z+z^*]$$
$$-[x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*][x_i+x_i^*, z+z^*]$$
$$-[y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*][x_i+x_i^*, z+z^*]$$

(по (4))

$$=[x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*][b+b^*, z+z^*]$$
$$-[x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*][b+b^*, z+z^*]$$
$$+]x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_j+x_j^*, b+b^*]$$
$$-[x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_i+x_i^*, b+b^*]$$
$$+[y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*][x_j+x_j^*, z+z^*]$$
$$-[y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*][x_i+x_i^*, z+z^*]$$

(применим (17) к первым двум слагаемым и (4) к последним двум)

$$=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*][b+b^*, z+z^*]$$
$$+[x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_j+x_j^*, b+b^*]$$
$$-[x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_i+x_i^*, b+b^*]$$
$$+[y_{2k}+y_{2k}^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_j+x_j^*, x_i+x_i^*]$$

(по (20))

$$=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*][b+b^*, z+z^*]$$
$$+[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_i+x_i^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$-[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*][x_j+x_j^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$+[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, z+z^*[\,[b+b^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$

(по (4))

$$=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[b+b^*, z+z^*]$$
$$+[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[x_i+x_i^*, z+z^*]$$
$$+[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$-[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$-[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[x_j+x_j^*, z+z^*]$$
$$+[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[b+b^*, z+z^*]$$
$$+[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*].$$

Отсюда

$$2(u-\sigma_{ij}u)=2[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[b+b^*, z+z^*]$$
$$+[x_j+x_j^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_i+x_i^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$-[x_i+x_i^*, b+b^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, x_j+x_j^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*]$$
$$+[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k-1}+y_{2k-1}^*, b+b^*]\,[z+z^*, y_{2k}+y_{2k}^*].$$

По (17) сумма последних трех слагаемых равна нулю. Так как характеристика основного поля $\mathfrak{K}$ отлична от двух, окончательно имеем

$$u-\sigma_{ij}u=[x_i+x_i^*, x_j+x_j^*, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2k}+y_{2k}^*]\,[b+b^*, z+z^*]. \tag{21}$$

Этим доказано утверждение леммы и для полинома f_1, и так как $\varphi=f_1+f_2+f_3$, то $\varphi-\sigma_{ij}\varphi$ имеет искомый вид. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Ввиду замечаний 1 и 2 достаточно доказать теорему для полилинейных тождеств типа (1). Легко заметить, что все полилинейные тождества, в записи которых участвуют только антиследы независимых переменных, следуют из тождества (3). Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что в записи полилинейных тождеств участвует хотя бы один след независимой переменной.

Мы докажем теорему индукцией по степени n полиномиальных тождеств с инволюцией, выполняющихся в $\mathfrak{K}_2$. Основание индукции $n=1$ выполнено, так как полиномиальных тождеств с инволюцией степени 1 в $\mathfrak{K}_2$, очевидно, нет. Пусть все тождества степени не выше, чем $l-1$, следуют из (2)—(5). Докажем наше утверждение в случае, когда $n=l$.

Заметим сначала, что если в записи полилинейного тождества $f=f(x_1, \ldots, x_l;\ x_1^*, \ldots, x_l^*)$ участвуют следы независимых переменных, то можно предполагать, что следы участвуют только под знаками коммутаторов веса ≥ 2. Действительно, если f — тождество степени l алгебры $\mathfrak{K}_2$, то полиномы $f|_{x_i=1}$, $i=1, 2, \ldots, l$ являются тождествами степени $l-1$ и по индукционному предположению вытекают из тождеств (2)—(5). Если полиномы $f|_{x_i=1}$, $i=1, 2, \ldots, k-1$, равны нулю, а $f|_{x_k=1}$ ненулевой полином, то положим

$$\tilde{f}=f-f|_{x_i=1}(x_i+x_i^*)/2.$$

Ясно, что полиномы $\tilde{f}$ и f одинаковой степени и что они одновременно следуют или не следуют из тождеств (2)—(5). Поэтому будем считать, что все полиномы $f|_{x_i=1}$, $i=1, 2, \ldots, l$, равны нулю. Но в этом случае полином f можно представить в виде линейной комбинации произведений антиследов и коммутаторов, зависящих от следов и антиследов независимых переменных. Тогда из леммы 1 следует возможность представления полилинейного полинома f в виде линейной комбинации произведений типов А), Б), В), причем, если коммутатор, участвующий в этих произведениях, содержит антислед независимой переменной x, то он имеет вид $[x-x^*, y_1^*+y_1^*, y_2+y_2^*, \ldots, y_s+y_s^*]$. Теперь, если в записи полинома f участвуют антиследы независимых переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, то применяя многократно следующее следствие из тождества (7)

$$(22)\qquad [v, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2r}+y_{2r}^*]\,[t-t^*, z_1+z_1^*, \ldots, z_s+z_s^*]$$
$$=(t-t^*)\,[v, y_1+y_1^*, \ldots, y_{2r}+y_{2r}^*, z_1+z_1^*, \ldots, z_s+z_s^*],$$

где v — антисимметричный коммутатор веса $\geqq 1$, тождества (7) и (3), получим, что $f=(x_{i_1}-x_{i_1}^*)\ldots(x_{i_r}-x_{i_r}^*)\varphi$, где $r=k$ или $r=k-1$. Сделаем специализацию $x_{i_1}=x_{i_2}=\cdots=x_{i_r}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Тогда $(x_{i_1}-x_{i_1}^*)\ldots(x_{i_r}-x_{i_r}^*)$ равно $(-\alpha)^{r/2}$, если r — четное число и $(-\alpha)^{(r-1)/2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}$, если r — нечетное число. Заметим, что для $A\in\mathfrak{R}_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}A=0$ тогда и только тогда, когда $A=0$. Отсюда следует, что f — тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$ тогда и только тогда, когда φ — тождество в $\mathfrak{R}_2$. При этом φ уже или не содержит ни одного, или содержит только один антислед независимой переменной.

Случай 1. Пусть полилинейное тождество φ степени l не содержит антиследов независимых переменных. Тогда по лемме 2 существует полилинейный полином $g=g(x_1+x_1^*, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_i-x_i^*, x_{i+1}+x_{i+1}^*, \ldots, x_l+x_l^*)$, такой, что $\varphi-\sigma_{ij}\varphi=g|_{x_i=1/2[x_i+x_i^*,\ x_j+x_j^*]}$ является следствием тождеств (2)—(5). Так как антислед любой матрицы второго порядка представим в виде коммутатора от следов некоторых матриц, например, если

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\ \text{то}\ A-A^*=(a_2-\alpha^{-1}a_3)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}=[B+B^*, C+C^*],$$

$$\text{где}\ B=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ a_3 & 0\end{pmatrix},\ \text{а}\ C=\begin{pmatrix}1/2 & a_2\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

мы заключаем, что $g(x_1+x_1^*, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_i-x_i^*, x_{i+1}+x_{i+1}^*, \ldots, x_l+x_l^*)$ также является тождеством алгебры $\mathfrak{R}_2$, но уже степени $l-1$ и по индукционному предположению вытекает из (2)—(5). Но тогда и тождество $g|_{x_i=1/2[x_i+x_i^*,\ x_j+x_j^*]}$ следует из (2)—(5), а значит и $\varphi-\sigma_{ij}\varphi$ является следствием этих же тождеств, более того, для любой подстановки s на множестве $\{1, 2, \ldots, l\}$ тождество $\varphi - s(\varphi)$ также вытекает из (2)—(5). Ясно, что из них же следует и тождество

$$l!\ \varphi = \Sigma\, s(\varphi) = \gamma\, \Sigma\, (x_{\sigma(1)} + x^*_{\sigma(1)})(x_{\sigma(2)} + x^*_{\sigma(2)}) \ldots (x_{\sigma(l)} + x^*_{\sigma(l)}) \tag{23}$$

(сумма берется по всем подстановкам s на множестве $\{1, 2, \ldots, l\}$). Положим $x_1 = x_2 = \cdots = 1/2 l_{11}$. Тогда, так как φ — тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$, из (23) получаем $0 = \gamma \,.\, l!\ (x_1 + x_1^*)$, откуда видно, что $\gamma = 0$ в (23). Следовательно, φ является следствием тождеств (2)—(5), что заканчивает первый рассматриваемый случай.

Случай 2. Пусть в записи полилинейного тождества φ степени l участвует единственный антислед $x_1 - x_1^*$. Представим φ в виде $\varphi = f_1 + f_2 + f_3$, где f_1, f_2, f_3 — полиномы, указанные в замечании 3. Мы покажем справедливость утверждения теоремы для тождеств f_1, f_2, f_3, откуда будет следовать ее справедливость и для полинома φ. Из тождеств (3), (7), (22) следует, что $f_1 = (x_1 - x_1^*) \tilde{f}_1$, где $\tilde{f}_1$ — тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$ степени $l-1$ и по индукционному предположению вытекает из (2)—(5). Следовательно, то же самое справедливо и для тождества f_1. Если степень l полинома φ — нечетное число, помимо полинома f_1, в записи полинома φ может участвовать и f_2, который является линейной комбинацией коммутаторов вида $[x_1 - x_1^*, x_{i_1} + x^*_{i_1}, \ldots, x_{i_{l-1}} + x^*_{i_{l-1}}]$.

Применяя тождества (14), (15), (16), приведем каждый из этих коммутаторов к правильному виду $[x_1 - x_1^*, x_2 + x_2^*, \ldots, x_l + x_l^*]$. Тогда $f_2 = \beta[x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \ldots, x_l + x_l^*] + 4(x_1 - x_1^*)\tilde{f}_2$, где $\tilde{f}_2$ является линейной комбинацией произведений коммутаторов от $x_i + x_i^*$, $i = 2, 3, \ldots, l$. Положим в f_2

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом $\tilde{f}_2$ равен нулю и $f_2 = \beta(-2\alpha)^{(l-1)/2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, и так как f_2 — тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$, то $\beta = 0$, т. е. $f_2 = 4(x_1 - x_1^*)\tilde{f}_2$ и, следовательно, $\tilde{f}_2$ — также тождество алгебры $\mathfrak{R}_2$, но уже степени $l-1$ и по индукционному предположению следует из тождеств (2)—(5), что влечет справедливость теоремы для полинома f_2.

И, наконец, если степень l полинома φ — четное число, то $\varphi = f_3$, который является линейной комбинацией коммутаторов вида $[x_1 - x_1^*, x_{i_1} + x^*_{i_1}, \ldots, x_{i_{l-1}} + x^*_{i_{l-1}}]$.

Применяя тождества (14), (15), (16), (18) и (7), представим f_3 в виде

$$f_3 = \beta[x_1 - x_1^*, x_2 + x_2^*, \ldots, x_l + x_l^*] + (x_1 - x_1^*)\tilde{f}_3, \tag{24}$$

где $\tilde{f}_3$ является линейной комбинацией произведений коммутаторов от $x_2 + x_2^*, x_3 + x_3^*, \ldots, x_l + x_l^*$. Полагая снова

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим, как и в предыдущем случае, что $\beta=0$ в (24) и, следовательно, $f_3=(x_1-x_1^*)\tilde{f}_3$. Снова из индуктивных соображений ясно, что $\tilde{f}_3$, а значит и f_3 следует из тождеств (2)—(5). Теорема доказана.

3. Симплектическая инволюция. Инволюция $*$ на $\mathfrak{R}_2$ называется симплектической, если существует система матричных единиц $\{l_{ij} \mid 1\leq i, j\leq 2\}$ в $\mathfrak{R}_2$, такая, что $l_{11}+l_{22}=1$ и

$$\left(\sum_{j,\, i=1}^{2} l_{ij}a_{ij}\right)^*=l_{11}a_{22}+l_{22}a_{11}-l_{12}a_{12}-l_{21}a_{21}$$

для всех $a_{ij}\in\mathfrak{R}$, $1\leq i, j\leq 2$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно ясно, что

$$[x+x^*, y]=0 \tag{25}$$

является тождеством алгебры $\mathfrak{R}_2$. Более того, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{R}_2$ — алгебра матриц второго порядка над полем $\mathfrak{R}$ характеристики нуль с симплектической инволюцией $*$. Тогда все тождества с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$ следуют из тождества* (25).

Доказательство. Ввиду замечания 1 достаточно доказать теорему для полилинейных тождеств, а ввиду замечания 2 — для полиномов вида (1). Пусть $f=f(x_1+x_1^*, \ldots, x_k+x_k^*, y_1-y_1^*, \ldots, y_l-y_l^*)$ — тождество с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$. Как следствие из (25) мы получим тождество $f=(x_1+x_1^*)\ldots(x_k+x_k^*)\tilde{f}(y_1-y_1^*, \ldots, y_l-y_l^*)$. Но тогда $\tilde{f}(y_1-y_1^*, y_2-y_2^*, \ldots, y_l-y_l^*)$ является тождеством с инволюцией алгебры $\mathfrak{R}_2$. Так как, если характеристика поля $\mathfrak{R}$ отлична от двух, любая матрица второго порядка со следом нуль представима в виде антиследа некоторой матрицы, то $\tilde{f}(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ является слабым тождеством (обычным, без инволюции) алгебры $\mathfrak{R}_2$. (Определение слабого тождества содержится в работе [3].) По теореме 1 из [3]

$$\tilde{f}(z_1, z_2, \ldots z_l)=\Sigma a_i u_i[v_i'\circ v_i'', t_i]w_i,$$

где $a_i\in\mathfrak{R}$, u_i, w_i — ассоциативные одночлены, а v_i', v_i'' — коммутаторы от образующих. Тогда

$$\tilde{f}(y_1-y_1^*, y_2-y_2^*, \ldots, y_l-y_l^*)=\Sigma a_i u_i[v_i'\circ v_i'', t_i]w_i,$$

где v_i' и v_i'' будут коммутаторы от $y_i-y_i^*$, $i=1, 2, \ldots, l$. Так как по (10) коммутатор (любой длины) от антиследов является антиследом, а, с другой стороны,

$$(x-x^*)\circ(t-t^*)=(x-x^*)(t-t^*)+[(x-x^*)(t-t^*)]^*,$$

мы заключаем, что тождество $\tilde{f}(y_1-y_1^*, y_2-y_2^*, \ldots, y_l-y_l^*)$ следует из (25). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность А. В. Михалеву за постановку задачи и В. Н. Латышеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Amitsur. Identities in rings with involutions. *Israel J. Math.*, **7**, 1969, 63—68.
2. А. И. Мальцев. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями. *Мат. сб.*, **26**, 1950, 19—33.
3. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 83—113.
4. L. H. Rowen. Standard polynomials in matrix rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **190**, 1974, 253—284.
5. L. H. Rowen. Identities in algebras with involution. *Israel J. Math.* **20**, 1975, 70—95.
6. Д. В. Левченко. Тождества с инволюцией матричной алгебры второго порядка. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1043—1045.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 17. 4. 1980