Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА

РОСИЦА И. СЕМЕРДЖИЕВА

В работе доказывается существование и единственность сильного решения одной краевой задачи для вырождающегося гиперболического уравнения и исследуется гладкость этого решения.

1. Постановка задачи и единственность сильного решения. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(y)u_{xx} - \partial_y(l(y)u_y) + a(x, y)u_x + c(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

где $k(y) > 0$ при $y > 0$, $k(0) = 0$, $l(y) > 0$ при $y > 0$, $l(0) = 0$ и $l'(0) > 0$. Уравнение (1) — гиперболическое в верхней полуплоскости $\{y > 0\}$, и его порядок вырождается вдоль прямой $y = 0$.

Пусть G — конечная односвязная область плоскости точек (x, y) с кусочно-гладкой границей $\partial G = AB \cup AC \cup BC$, где $AB = \{(x, y)\colon\ 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, а $AC\colon\ x = \int\sqrt{k(t)/l(t)}\,dt$ и $BC\colon\ x = 1 - \int\sqrt{k(t)/l(t)}\,dt$ являются кусками характеристик уравнения (1), выходящими из точки $C(1/2, d)$, $d = \mathrm{const} > 0$.

Будем предполагать, что $k(y) \in C^1[0, d]$, $l(y) \in C^2[0, d]$, $a(x, y) \in C^1(\bar{G})$, $c(x,y) \in C(\bar{G})$.

Рассмотрим следующую задачу. Найти решение уравнения (1) в G, удовлетворяющее граничному условию

$$u = 0 \text{ на } AC. \tag{2}$$

Сопряженная задача к задаче (1), (2) имеет вид

$$L^*v = g(x, y), \tag{3}$$

$$v = 0 \text{ на } BC, \tag{4}$$

где L^* — оператор, сопряженный к L, $L^*v \equiv k(y)v_{xx} - \partial_y(l(y)v_y) - (a(x, y)v)_x + c(x, y)v$.

Обозначим через $\tilde{C}^2(\bar{G})$ и $\tilde{C}^2_*(\bar{G})$ множества функций из $C^2(\bar{G})$, удовлетворяющих соответственно условиям (2) и (4), а через $\tilde{W}^1_2(G)$ и $\tilde{W}^1_{2,*}(G)$ их замыкания по норме $\|\cdot\|_1$ пространства Соболева $W^1_2(G)$. Через $\|\cdot\|_{-1}$ обозначаем норму в негативном пространстве $\tilde{W}^{-1}_2(G)$, сопряженном к $\tilde{W}^1_2(G)$ [8]. Обозначим через $\tilde{C}^\infty(\bar{G})$ и $\tilde{C}^\infty_*(\bar{G})$ множества всех бесконечно дифференцируемых в $\bar{G}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2) и (4).

Скалярное произведение и норму в $L_2(G)$ обозначаем через $(\,.\,,\,.\,)_0$ и $\|\,.\,\|_0$. Пусть $f(x, y) \in L_2(G)$.

Определение 1. *Функция* $u(x, y) \in L_2(G)$ *называется слабым решением задачи* (1), (2), *если* $(u, L^*v)_0 = (f, v)_0$, $\forall v \in \tilde{C}^2_*(\bar{G})$.

Определение 2. *Функция* $u(x, y) \in L_2(G)$ *называется сильным решением задачи* (1), (2), *если существует последовательность функций* $u_n \in \tilde{C}^2(\bar{G})$, *таких, что* $\|u_n - u\|_0 \longrightarrow 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 1. *Если* $a(x, 0) > 0$ *для* $x \in [0, 1]$, *то задача* (1), (2) *может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство. Пусть $u(x, y) \in C^2(\bar{G})$ и $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — пока произвольные, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, 1]$ функции. Интегрированием по частями получаем

$$(5)\qquad 2\int_G (\alpha u_x + \beta u_y) Lu\, dx\, dy = \int_G A(u_x, u_y) dx\, dy + \int_{\partial G} B(u_x, u_y) ds + 2\int_G (\alpha u_x + \beta u_y) cu\, dx\, dy$$

где

$$A(u_x, u_y) = (-k\alpha_x + k'\beta + 2\alpha a) u_x^2 + 2(-\beta_x k + \beta a) u_x u_y + (-l\alpha_x - l'\beta) u_y^2,$$

$$B(u_x, u_y) = k(\alpha n_1 - \beta n_2) u_x^2 + l(\alpha n_1 - \beta n_2) u_y^2 + 2(-\alpha l n_2 + \beta k n_1) u_x u_y,$$

$u = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно выбрать так, что квадратичная форма $B(u_x, u_y)$ будет неотрицательна на ∂G. Действительно, на отрезке AB имеем $B(u_x, u_y) = 0$, так как $k(0) = l(0) = 0$. На характеристиках AC и BC форму $B(u_x, u_y)$ можно записать в виде

$$(6)\qquad B(u_x, u_y) = (\alpha n_1 - \beta n_2)(k + l)(n_1 u_y - n_2 u_x)^2.$$

Так как $u = 0$ на AC, то $u_x = N(x, y) n_1$ и $u_y = N(x, y) n_2$ $\forall (x, y) \in AC$ и, следовательно, $n_1 u_y - n_2 u_x = 0$. Отсюда следует, что $B(u_x, u_y) = 0$ на AC. Если $\alpha(x) > 0$ и $\beta(x) < 0$ для $x \in [0, 1]$, то из (6) следует, что $B(u_x, u_y) \geq 0$ на BC. Выбираем $\alpha(x) = \mu e^{-\lambda x}$, $\beta(x) = -e^{-\lambda x}$, где $\lambda, \mu > 0$ — достаточно большие постоянные, которые определим попозже. Принимая во внимание, что

$$\int_G e^{-\lambda x}(\lambda u^2 - 2uu_x) dx\, dy = -\int_G (e^{-\lambda x} u^2)_x dx\, dy = -\int_{\partial G} e^{-\lambda x} u^2 n_1 ds \leq 0,$$

из (5) получаем

$$(7)\qquad 2\int_G e^{-\lambda x}(\mu u_x - u_y) Lu\, dx\, dy$$

$$\geq \int_G e^{-\lambda x}[(\lambda\mu k - k' + 2\mu a) u_x^2 + (l' + \lambda\mu l) u_y^2 + \lambda u^2 - 2(\lambda k + a) u_x u_y + 2(\mu c - 1) u u_x - 2c u u_y] dx dy.$$

Из $a(x, 0) > 0$ для $x \in [0, 1]$, $a(x, y) \in C^1(G)$, $l'(0) > 0$, $l(y) \in C^2[0, d]$ следует что существует $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$, так что $a(x, y) \geq \varepsilon_0$ и $l'(y) \geq \varepsilon_0$ в некоторой окрестности $U = \{(x, y) \in \bar{G}\colon 0 \leq y \leq \delta_0,\ \delta_0 = \text{const} > 0\}$ — отрезки AB.

С помощью неравенства $2a_1 a_2 \leq \varepsilon a_1^2 + \varepsilon^{-1} a_2^2$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, из (7) получаем

$$(8)\qquad 2\int_G e^{-\lambda x}(\mu u_x - u_y) Lu\, dx\, dy$$

$$\geq \int_G e^{-\lambda x}\{[\lambda k(\mu - 1) - k' + 2\mu a - 4a^2/\varepsilon_0 - \varepsilon_0/2] u_x^2 + [l' - \varepsilon_0/2 + \lambda l(\mu - k/l)] u_y^2$$

$$+[\lambda-(4\mu^2c^2+4+4c^2)/\varepsilon_0]u^2\}dx\,dy.$$

Выбираем столь большую постоянную $\mu>0$, что выполнено $-k'+2\mu a-4a^2/\varepsilon_0\geqq\varepsilon_0$ $\forall(x,y)\in U$, $\mu>\max(1,\ \sup_{y\in[0,d]}|k(y)/l(y)|)$ и фиксируем μ. Потом выбираем столь большую постоянную $\lambda>0$, что

$$\lambda k(\mu-1)-k'+2\mu a-4a^2/\varepsilon_0\geqq\varepsilon_0 \quad \forall(x,y)\in\overline{G\setminus U},$$

$$l'+\lambda l(\mu-k/l)\geqq\varepsilon_0 \quad \forall(x,y)\in\overline{G\setminus U},$$

$$\lambda-(4\mu^2c^2+4+4c^2)/\varepsilon_0\geqq\varepsilon_0/2 \quad \forall(x,y)\in\overline{G},$$

и фиксируем λ. Тогда из (8) получаем

$$(l^{-\lambda x}(\mu u_x-u_y),\ Lu)_0\geqq C_1\|u\|_1^2, \tag{9}$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x,y)$. Из оценки (9) получаем $\|Lu\|_0\geqq C\|u\|_1$, $\forall u\in\tilde{C}^2(\overline{G})$. Из этого неравенства вытекает единственность сильного решения задачи (1), (2).

Следствие 1. *Если $u(x,u)$ — сильное решение задачи* (1), (2), *то* $u(x,\ y)\in\tilde{W}_2^1(G)$.

2. Существование слабого решения. Теорема 2. *Если* $a(x,0)>0$ *для* $x\in[0,1]$, *то существует слабое решение* $u\in\tilde{W}_2^1(G)$ *задачи* (1), (2) *для любой функции* $f(x,y)\in L_2(G)$.

Доказательство. Пусть $v(x,y)\in\tilde{C}^2_*(\overline{G})$ и $v=0$ в окрестности AB. Тогда краевая задача

$$l^{-\lambda x}(\mu u_x-u_y)=v \text{ в } G,\ u=0 \text{ на } AC \tag{10}$$

имеет единственное решение $u(x,y)\in\tilde{C}^2(\overline{G})$. Действительно, путем неособой замены независимых переменных $\xi=x$, $\eta=\mu y+x$ уравнение $l^{-\lambda x}(\mu u_x-u_y)=v(x,y)$ принимает вид

$$\tilde{u}_\xi(\xi,\ \eta)=\mu^{-1}l^{\lambda\xi}\,\tilde{v}(\xi,\eta), \tag{11}$$

где $\tilde{u}(\xi,\eta)=u(\xi,\mu^{-1}(\eta-\xi))$, $\tilde{v}(\xi,\eta)=v(\xi,\mu^{-1}(\eta-\xi))$. Уравнение характеристики AC в новых переменных можно записать в виде $\xi=\varphi(\eta)$, $\eta\in[0,\eta_0]$, где $\varphi(\eta)\in C^2[\delta,\eta_0]$, $\forall\delta=\text{const}>0$. Из (11) с учетом граничного условия (2) получаем $\tilde{u}(\xi,\eta)=\int_{\varphi(\eta)}^{\xi}\mu^{-1}l^{\lambda t}\tilde{v}(t,\eta)\,dt$. Легко проверить, что функция $u(x,\ y)\in\tilde{C}^2(\overline{G})$.

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (10). Тогда из оценки (9) получаем

$$\|L^*v\|_{-1}\|u\|_1\geqq(L^*v,u)_0=(v,Lu)_0=(e^{-\lambda x}(\mu u_x-u_y),\ Lu)_0\geqq C_1\|u\|_1^2.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\|u\|_1\geqq C_2\|v\|_0$, получаем $\|L^*v\|_{-1}\geqq C\|v\|_0$, для каждого $v\in\tilde{C}^2_*(\overline{G})$ и $v=0$ в окрестности AB. Из этого неравенства, как известно [8], следует существование функции $u(x,y)\in\tilde{W}_2^1(G)$, для которой выполнено $(u,\ L^*v)_0=(f,\ v)_0$. Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_G(-ku_xv_x+lu_yv_y+au_xv+cuv)dx\,dy=(f,\ v)_0 \tag{12}$$

для каждой функции $v(x, y) \in \tilde{C}^2_*(G)$ и $v=0$ в окрестности AB. Также, как в работе [4], докажем, что (12) справедливо для всех $v \in \tilde{C}^2_*(\bar{G})$.

Пусть $v(x, y) \in \tilde{C}^2_*(\bar{G})$ и $\Phi(s) \in C^\infty(R^1)$, для которой имеем $\Phi(s)=0$ для $|s| \leq 1$ и $\Phi(s)=1$ для $|s| \geq 2$. Рассмотрим функции $v_n(x, y)=v(x, y)\Phi(ny)$, $n=1, 2, \ldots$. Легко видеть, что $v_n(x, y) \in \tilde{C}^2_*(\bar{G})$ и $v_n=0$ в окрестности AB. Тогда функции $v_n(x, y)$ удовлетворяют равенство

$$\int_G (-ku_x v_{nx}+lu_y v_{ny}+au_x v_n+cuv_n)dx\,dy=(f, v_n)_0. \tag{13}$$

Непосредственно доказывается, что

$$\|v_n-v\|_0 \longrightarrow 0, \ \|\partial_x(v_n-v)\|_0 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{14}$$

Рассмотрим

$$\|\partial_y[l(y)(v_n-v)]\|_0 \leq \|l'(y)(v_n-v)\|_0+\|l(y)v_y(1-\Phi(ny))\|_0+\|l(y)vn\Phi'(ny)\|_0.$$

Заметим, что $\|l'(y)(v_n-v)\|_0 \longrightarrow 0$ и $\|l(y)v_y(1-\Phi(ny))_0 \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Дальше, так как $l(0)=0$ и $\Phi'=0$ для $ny \geq 2$, получаем

$$\|l(y)vn\Phi'(ny)\|_0=\|[l(y)-l(0)]vn\Phi'(ny)\|_0 \leq C\|ny\Phi'(ny)\|_0 \leq 2C\|\Phi'(ny)\|_0 \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|\partial_y[l(y)(v_n-v)]\|_0 \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{15}$$

Из (13), (14) и (15) следует, что (12) выполнено для всех $v(x, y) \in \tilde{C}^2_*(G)$. Отсюда после интегрирования по частям получаем, что $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ $\forall v \in \tilde{C}^2_*(\bar{G})$. Таким образом теорема 2 доказана.

3. Существование сильного решения. Теорема 3. *Если* $a(x, 0)>0$ *для* $x \in [0, 1]$, *то существует сильное решение* $u(x, y) \in \tilde{W}^1_2(G)$ *задачи* (1), (2) *для любой функции* $f(x, y) \in L_2(G)$ *и слабое решение* $u(x, y) \in \tilde{W}^2_1(G)$ *единственно.*

Доказательство Достаточно показать, что слабое решение $u(x, y) \in \tilde{W}^1_2(G)$ задачи (1), (2) является сильным. Сначала локализируем задачу.

Пусть G_Y, $Y=1, \ldots, s$ — такие области, что $\bar{G} \subset \cup_{Y=1}^s G_Y$ и $\{\varphi_Y(x, y)\}$ является разбиением единицы, соответствующим покрытию $\{G_Y\}$, т. е. $\varphi_Y(x, y) \in C_0^\infty(R^2)$, $\operatorname{supp}\varphi_Y \subset G_Y$, $\Sigma_{Y=1}^s \varphi_Y(x, y)=1$ на $\bar{G}$. Легко видеть, что функции $u_Y=\varphi_Y u$, $Y=1, 2, \ldots, s$ будут слабыми решениями задачи

$$Lu_Y=f_Y \text{ в } G, \ u_Y=0 \text{ на } AC, \tag{16}$$

где $f_Y=\varphi_Y f+2k\partial_x\varphi_Y\partial_x u-2l\partial_y\varphi_Y\partial_y u+uL\varphi_Y-c\varphi_Y u$. Если докажем, что функции u_Y являются сильными решениями задачи (16), то функция $u=\Sigma_{Y=1}^s u_Y$ будет сильным решением задачи (1), (2).

Пуст $\operatorname{supp} u_Y$ содержится в достаточно малой окрестности точки C. Обозначим $G'_Y=G_Y \cap G$. Уравнение AC имеет вид $x=F(y)$, а уравнение BC имеет вид $x=1-F(y)$, где $F(y)=\int\sqrt{k(t)/l(t)}dt$ и удовлетворяет в $[0, d)$ условию Липшица $|F(y_1)-F(y_2)| \leq E|y_1-y_2|$, $E=\text{const}>0$. Продолжаем задачу (16) в области $\Omega=\{(x, y): F(y) \leq x \leq -F(y)+1\}$, полагая $u_Y=0$ и $f_Y=0$ вне

G'_Y, а коэффициенты оператора L продолжаем, сохраняя их гладкость. Пусть $j(s)$ — бесконечно дифференцируемая в интервале $-\infty<s<+\infty$ функция, удовлетворяющая следующим условиям: $j(-s)=j(s)$, $j(s)\geqq 0$, $j(s)=0$ для $|s|\geqq 1$ и $\int_{-1}^{1} j(s)ds=1$. Для $\varepsilon>0$ рассмотрим оператор усреднения

$$J_\varepsilon u_Y(x, y)=\varepsilon^{-2}\int_\Omega j(\varepsilon^{-1}(x-x_1)-E-2)\, j(\varepsilon^{-1}(y-y_1))u_Y(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1,$$

где E — константа Липшица. Как известно, $J_\varepsilon u_Y\in C^\infty(\bar\Omega)$, $\|J_\varepsilon u_Y-u_Y\|_{L_2(\Omega)}\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\to 0$. Если $v(x, y)$ — произвольная функция из $L_2(\Omega)$, то функция $J^*_\varepsilon v C^\infty(\bar\Omega)$ и удовлетворяет сопряженному условию. Из определения слабого решения имеем $(u_Y, L^*(J^*_\varepsilon v))_{L_2(\Omega)}=(f_Y, J^*_\varepsilon v)_{L_2(\Omega)}$. Дальше поступаем также, как в [2; 6]. Отметим только, что $J_\varepsilon u_Y(x, y)=0$ в окрестности характеристики AC. В остальных случаях расположении области G_Y доказательство проводится так же, как в работах [2; 6]. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что аппроксимирующая сильное решение последовательность состоит из функций $u_n(x, y)\in C^\infty(\bar G)$, которые аннулируются в окрестности AC.

Следствие 2. *Если $a(x, 0)>0$ для $x\in[0, 1]$, то существует единственное сильное решение $v(x, y)\in \tilde W^1_{2,*}(G)$ задачи* (3), (4) *для любой функции $g(x, y)\in L_2(G)$*.

Следствие 3. *Если $a(x, 0)>0$ для $x\in[0, 1]$, то каждое слабое решение $u(x, y)\in L_2(G)$ задачи* (1), (2) *является сильным и, следовательно, принадлежит $\tilde W^1_2(G)$*.

4. Гладкость сильного решения. Обозначим через $W^{(n)}(G)$, $n=1,2,\ldots$ множество функций $u(x, y)\in L_2(G)$, для которых $\partial^p_x u(x, y)\in L_2(G)$, $p=1, 2,\ldots, n$ и $l^{q-1}(y)\partial^p_x\partial^q_y u(x, y)\in L_2(G)$, $p=0, 1,\ldots, n-1$, $q=1, 2,\ldots, n$, $p+q\leqq n$ (здесь производные понимаются в обобщенном смысле).

Далее будем предполагать, что $a(x, 0)>0$ для $x\in[0, 1]$.

Лемма 1. *Функция $u(x, y)\in L_2(G)$ является сильным решением задачи* (1), (2) *и $u(x, y)\in \tilde W^1_2(G)$, если равенство $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ выполняется только для тех $v(x, y)\in \tilde C^\infty_*(\bar G)$, которые аннулируются в окрестности BC.*

Доказательство. Из следствия 2 и замечания 1 для каждой функции $v(x, y)\in \tilde C^2_*(\bar G)$ существует последовательность функций $v_Y(x, y)\in \tilde C^\infty_*(\bar G)$, $v_Y(x, y)=0$ в окрестности BC и $\|v-v_Y\|_0+\|L^*v-L^*v_Y\|_0\longrightarrow 0$ при $Y\to\infty$. По предложению леммы 1 для $v_Y(x, y)$ выполнено равенство $(u, L^*v_Y)_0=(f, v_Y)_0$. С помощью предельного перехода при $Y\to\infty$ получаем $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$, $\forall v(x, y)\in \tilde C^2_*(\bar G)$. Следовательно, $u(x, y)\in L_2(G)$ является слабым решением задачи (1), (2). Используя следствие 3, завершаем доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $f(x, y)\in W^1_2(G)$, $f(x, y)|_{AC}=0$, $a(x, y)\in C^2(\bar G)$, $c(x, y)\in C^1(\bar G)$. Если $u(x, y)\in \tilde W^1_2(G)$ — сильное решение задачи* (1), (2), *то $u_x(x, y)$ сильное решение задачи:*

$$Lw=f_1\equiv f_x-a_x u_x-c_x u \text{ в } G, \tag{17}$$

$$w=0 \text{ на } AC \tag{18}$$

и $u_x(x, y)\in \tilde W^1_2(G)$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать равенство $(u_x, L^*v)_0=(f_1, v)_0$ только для тех $v(x, y)\in \bar{C}_*^\infty(\bar{G})$, которые аннулируются в окрестности BC. Нетрудно установить, что $v_x(x, y)\in C_*^\infty(\bar{G})$. Тогда получаем

$$(u_x, L^*v)_0=-(u, (L^*v)_x)_0=-(u, L^*(v_x))_0+(u, L^*(v_x)-(L^*v)_{x0}$$

$$=-(f, v_x)_0+(u, (a_xv)_x-c_xv)_0=(f_x-a_xu_x-c_xu, v)_0=(f_1, v)_0.$$

Таким образом лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Пусть*

$$k(y)\in C^{\max(1, m-1)}[0, d],\ l(y)\in C^{m+1}[0, d],\ a(x, y)\in C^{\max(2, m)}(\bar{G}),$$

$c(x, y)\in C^m(\bar{G})$, $f(x, y)\in W^{(m)}(G)$, $m=1, 2, 3, \ldots, \partial_x^p f|_{AC}=0$, $p=0, 1, \ldots, m-1$ *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное сильное решение* $u(x, y)\in W^{(m+1)}(G)$ $\partial_x^p u|_{AC}=0$, $p=0, 1, \ldots, m$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что задача (1), (2) имеет единственное сильное решение $u(x, y)\in \tilde{W}_2^1(G)$ для любой функции $f(x, y)\in L_2(G)$.

Пусть $m=1$. Из леммы 2 вытекает, что $u_{xx}\in L_2(G)$, $u_{xy}\in L_2(G)$ и $u_x|_{AC}=0$. С помощью равенства $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$, $\forall v(x, y)\in C_0^\infty(G)$, после интегрирования по частям получаем $(lu, v_{yy})=(\Phi_1, v)$, $\forall v(x, y)\in C_0^\infty(G)$, где $\Phi_1(x, y)=ku_{xx}+(l'u)_y+au_x+cu-f$, $\Phi_1(x, y)\in L_2(G)$. Следовательно, существует обобщенная производная $(lu)_{yy}\in L_2(G)$. Отсюда следует, что существует обобщенная производная $lu_{yy}\in L_2(G)$. Следовательно, $u(x, y)\in W^{(2)}(G)$, и тем самым теорема 4 доказана в случае $m=1$.

Предположим, что для m теорема доказана, и докажем ее для $m+1$. Из леммы 2 вытекает, что u_x — сильное решение задачи (17), (18). Непосредственно проверяется, что для уравнения (17) выполнены условия теоремы 4 при m. Теперь из предложения индукции получаем, что

$$u_x\in W^{(m+1)}(G) \tag{19}$$

и

$$\partial_x^p u_x|_{AC}=0 \text{ для } p=0, 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Для завершения доказательства надо показать, что существует обобщенная производная $l^{m+1}\partial_y^{m+2}u\in L_2(G)$. Из равенства

$$(u, L^*(\partial_y^m(l^mv)))=(f, \partial_y^m(l^mv)), \quad \forall v(x, y)\in C_0^\infty(G)$$

после интегрирования по частям получаем

$$(u, l\partial_y^{m+2}(l^mv))=(\Phi_2(x, y), v), \quad \forall v(x, y)\in C_0^\infty(G),$$

где $\Phi_2(x, y)=(-1)^m(l^m\partial_y^m(ku_{xx})+l^m\partial_y^m(au_x)+l^m\partial_y^m(l'u)_y+l^m\partial_y^m(cu)-l^m\partial_y^m f)$, $\Phi_2(x, y)\in L_2(G)$. Следовательно, существует обобщенная производная $l^m\partial_y^{m+2}(lu)\in L_2(G)$, откуда, используя (19), получаем, что существует и обобщенная производная $l^{m+1}\partial_y^{m+2}u\in L_2(G)$. Тогда из (19) и (20) следует, что $u\in W^{(m+2)}(G)$ и $\partial_x^p u|_{AC}=0$ для $p=0, 1, \ldots, m+1$. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорему 4 можно обобщить, как в [7], заменяя условие $\partial_x^p f|_{AC}=0$, $p=0, 1, \ldots, m-1$ менее ограничительным условием $\partial_x^p f|_\gamma=0$, $p=0, 1, \ldots, m-1$, где $\gamma\subset AC$ — малая окрестность точки A.

Отметим, что краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений, вся главная часть которых вырождается, рассмотрены в работах А. В. Бицадзе, А. М. Нахушева [1] и Н. И. Попиванова [3; 4; 5].

Краткое изложение результатов этой работы опубликовано в [9].

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. Д. Каратопраклиеву за предложенную тему и ценные советы. Выражаю также благодарность Г. Д. Дачеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **204**. 1972, 1289-1291.
2. Г. Д. Каратопраклиев. К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений. Докторская диссертация, Москва, 1972.
3. Н. И. Попиванов. Некоторые краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **243**, 1978, 584-587.
4. Н. И. Попиванов. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений. *Дифференц. уравн.*, **14**, 1978, 80-93.
5. Н. И. Попиванов. Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. В сб.: *Математика и мат. образование*, **7**, София, 1978, 438-448.
6. Н. И. Попиванов. Совпадение слабого и сильного решений краевых задач для линейных систем первого порядка. *Сердика*, **1**, 1975, 121-132.
7. Г. Д. Дачев. Гранични задачи за частни диференциални уравнения от смесен тип. Канд. дисертация, София, 1979.
8. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
9. Р. И. Семерджиева. Об одной краевой задаче для вырождающегося гиперболического уравнения. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1321—1324.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 21. 5. 1980;
В переработанном виде 6. 10. 1980