Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СХОДИМОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

РАЛИЦА КР. КОВАЧЕВА

Пусть E — односвязный компакт в $\mathbf{C}$, такой, что множество $E^c=\bar{\mathbf{C}}-E$ обладает (классической) функцией Грина $G(z, \infty)$. Пусть $\beta=\{\beta_k^{(n)}\}$, $n=1, 2, \ldots$, $k=1, \ldots, n$ — бесконечная таблица точек, экстремальных по отношению компакта E, и функция f, голоморфная на E, продолжается голоморфно в области E_R, $R>1$, где $E_R=R\bigcup\{z\in C, G(z,\infty)<\log R\}$. Для любого натурального n ($n\in\mathbf{N}$) обозначим через $R_n^\beta(f)$ β обобщенную аппроксимацию Паде функции f порядка (n, n). В настоящей работе исследуются достаточные условия для существования числа R_0, $R_0>1$, такого, чтобы последовательность $R_n^\beta(f)$, $n\in\mathbf{N}$ сходилась (в том или ином смысле) на компактных подмножествах области E_{R_0}.

Пусть E — односвязный компакт в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Не нарушая общности, будем предполагать, что $0\in E$. Всюду в дальнейшем будем считать, что E — регулярный компакт (последнее означает, что его дополнение E^c относительно расширенной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$ обладает (классической) функцией Грина $G(z, \infty)$ с особенностью в бесконечности. Пусть задана таблица точек

$$\begin{array}{l} \beta_1^{(1)}, \\ \beta_1^{(2)},\ \beta_2^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_1^{(n)},\ \beta_2^{(n)}, \ldots,\ \beta_n^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(необязательно отличных между собою), все точки сгущения которых лежат на E, и таких, что равномерно внутри E^c (на компактных подмножествах E^c) имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\prod_{k=1}^{n}(z-\beta_k^{(n)})\Big|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}|\omega_n^\beta(z)|^{1/n}=A\exp G(z, \infty)$$

($A>0$ — константа; если для некоторого натурального k ($k\in\mathbf{N}$) $\beta_k^{(n)}=\infty$, то соответствующий множитель $z-\beta_k^{(n)}$ заменяется единицей). Хорошо известно, что таблицы β точек с указанными свойствами всегда существуют; различные конструкции содержатся в [1, гл. VIII и IX] и [2]. Обозначим множество таких последовательностей β через $\mathfrak{P}(E)$.

Пусть f — функция, голоморфная на компакте E ($f\in H(E)$). (Тем самым, f голоморфна в некоторой открытой окрестности $U\supset E$. Зададимся парой

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 82–90.

натуральных чисел (n, m); существуют полиномы p и q, $q \neq 0$, степени $\leq n$ и $\leq m$, соответственно, $(\deg p \leq n, \deg q \leq m)$, такие, что

$$(2) \qquad \varphi_{n,m} = ((f \cdot q - p)/\omega^{\beta}_{n+m+1}) \in H(E).$$

Положим $R_{n,m} = R^{\beta}_{n,m}(f) = p/q$. Хотя полиномы p и q определяются условием (2) неоднозначно, указанная конструкция приводит (при заданных n и m) к единственной рациональной функции $R_{n,m}$ (см. [3]).

Конструкция $R_{n,m}$ обобщает конструкцию классической аппроксимации Паде $\pi_{n,m}$ типа (n, m) (если $\beta^{(n)}_k = 0$, $n = 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, n$ и f голоморфна в нуле, то $R^{\beta}_{n,m}(f) = \pi_{n,m}(f)$).

Положим $R_{n,m} = P_{n,m}/Q_{n,m}$, где $Q_{n,m}(z) = Q^{\beta}_{n,m}(f)(z) = \prod\limits_{k=1}^{m_n}(z - \alpha_{n,k})$, $m_n \leq m$ (каждый нуль полинома $Q_{n,m}$ выписывается столько раз, какова его кратность) и полиномы $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$ не имеют общих множителей $((P_{n,m}, Q_{n,m}) = 1)$. Оба полинома строятся однозначно по заданным f, β и (n, m). Нули полинома $Q_{n,m}$ называются свободными полюсами функции $R_{n,m}$; их число $\leq m$. Если $\deg Q_{n,m} = m$, то у рациональной функции $R_{n,m}$ ровно m свободных полюсов. Тогда (2) имеет место с $q = Q_{n,m}$, и функция $R_{n,m}$ интерполирует заданную функцию f во всех точках $\beta^{(n+m+1)}_1, \ldots, \beta^{(n+m+1)}_{n+m+1}$.

Положим теперь $G(z, \infty) = 1$ для $z \in E$; для любого $r > 1$ введем следующие обозначения: $E_r = \{z, G(z, \infty) < \log r\}$ и $\Gamma_r = \partial E_r$. Ясно, что множество E_r представляет собою область, замкнутая оболочка $\bar{E}_r$ которой — регулярный компакт, обладающий функцией Грина $G_r(z, \infty) = G(z, \infty) - \log r$. Очевидно, что из условия $\beta \in \mathfrak{P}(E)$ вытекает и $\beta \in \mathfrak{P}(E_r)$ (в этом случае в соотношении (1) заменяется только положительная константа).

Предположим теперь, что заданная функция f, голоморфная по предположению на компакте E, продолжается голоморфно в некоторую область E_R, $R > 1$. Положим для любого $n \in N$ $R_{n,n} = R_n$ и $Q_{n,n} = Q_n$. Будем считать, что для любого $n \in N$ функция R_n имеет ровно n свободных полюсов (т. е. для $n \in N$ $\deg Q_n = n$).

В этой работе исследуется, в зависимости от R, вопрос о существовании и точном определении числа R_0, $R_0 = R_0(R)$, такого, что последовательность R_n, $n \in N$ сходится (в том или ином смысле) внутри области E_{R_0}, если все рациональные функции R_n, $n \in N$ голоморфны в области E_R (или имеют в E_R не более чем „достаточно“ мало полюсов). Напомним, что $f \in H(E_R)$ по предположению.

Прежде чем сформулируем основной резултьтат, рассмотрим неравенство

$$(3) \qquad A(x) = x^6 - 4x^5 - 12x^4 - 4x^4 - 11x^2 - 2 > 0.$$

Элементарными рассуждениями проверяется, что функция $A(x)$ имеет два вещественнозначных корня и что больший из них находится в интервале (6, 6,5). Обозначим этот корень через x_0. Ясно, что неравенство (3) справедливо для всех $x > x_0$.

Перед тем, как продолжим дальше, обозначим для любого $n \in N$ через γ_n число тех полюсов функции R_n, которые лежат в области $E_R (0 \leq \gamma_n \leq n)$.

В п. 2 доказана

Теорема 1. *Пусть $E \ni o$ — односвязный регулярный компакт, $\beta \in \mathfrak{P}(E)$ и $f \in H(E)$. Предположим, что $f \in H(E_R)$ и $R > x_0$. Пусть для любого $n \in N$ рациональная функция R_n имеет ровно n (свободных) полюсов $\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,n}$. Тогда, если $\gamma_n = o(n)$, $n \to \infty$, то последовательность R_n, $n \in N$ сходится по емкости к функции f внутри области $E_{(R/x_0)}$. Если $\gamma_n = o(n/\log n)$, $n \to \infty$, последовательность R_n, $n \in N$ сходится к f — почти равномерно относительно любой α-меры Хаусдорфа внутри области $E_{(R/x_0)}$ (m_α — почти равномерно внутри $E_{(R/x_0)}$).*

В частном случае, когда $f \in H(z, |z| < 1)$ и $\beta_k^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, n$ (тогда для $n \in N$ R_n-классическая аппроксимация Паде π_n порядка n) и R_n голоморфны в единичном круге. Цин-Жустин показал, что $\pi_n \rightrightarrows f$, $n \to \infty$ на любом замкнутом круге $\{z, |z| \leq \varrho\}$, для которого $\varrho < 1/\sqrt{3}$ (см. [4]). С другой стороны, Рахмановым (*Мат. сб.* **112**,1980, 162-169) сконструирован пример функции f, удовлетворяющей последние условия, для которой $\pi_n \underset{\Lambda}{\rightrightarrows} \infty$ по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset N$ на компакте $\{z, |z| \leq 1\} \cap \{z, |z-1| \leq 1/4\}$.

Обозначим теперь через C единичную окружность и через $\mathfrak{H}_2(C)$ класс Харди на C. Напомним, что класс Харди $\mathfrak{H}_2(C)$ состоит из голоморфных внутри $C_{2\theta}$ функций, таких, что

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Пусть $f \in \mathfrak{H}_2(C)$. Как функция из класса $\mathfrak{H}_2(C)$, f имеет почти всюду на C предельные значения по некасательным путям (угловые предельные значения), которые образуют граничную функцию $f(\zeta)$, $\zeta \in C$. При этом, $f(\zeta) \in L_2(C)$ (для $\zeta \in C$).

Теперь для любого $n \in N$ через $r_n = r_n(f, L_2(C))$ обозначим рациональную функцию из класса S_n, $S_n = \{(a_0 z^n + \cdots + a_n)/(b_0 z^n + \cdots + b_n), \Sigma_{i=0}^n |b_i| > 0\}$, такую, что

$$\|f - r_n\|_{L_2(C)} = \inf_{r \in S_n} \|f - r\|_{L_2(C)},$$

$$\text{где, как обычно, } \|\varphi\|^2_{L_2(C)} = (1/2\pi) \int_C |\varphi^2(\zeta)| |d\zeta|.$$

Функция r_n называется рациональной функцией порядка n наилучшего приближения f в пространстве $L_2(C)$ (см. [1]).

Положим $r_n = p_n/q_n$, где коэффициент перед старшей степенью полинома q_n равен единице и $(p_n, q_n) = 1$. Хорошо известно, что рациональная функция r_n всегда существует, единственна и имеет ровно n полюсов (т. е. $\deg q_n = n$). Пусть $\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,n}$ — полюсы функции r_n. В. Д. Ерохин показал (см. [5]), что $|\alpha_{n,k}| > 1$, $k = 1, \ldots, n$ и что функция r_n интерполирует функцию f один раз в нуле и два раза в каждой точке $1/\overline{\alpha_{n,1}}, \ldots, 1/\overline{\alpha_{n,n}}$. Так что, в случае наилучших рациональных приближений в метрике $L_2(C)$, происходит в общем $2n+1$-кратная интерполяция для любого ($n \in N$); имеем

$$(f - r_n)(z) = (1/2\pi i) \int_C \prod_{k=1}^n \left(\frac{z \cdot \overline{\alpha_{n,k}} - 1}{t \cdot \overline{\alpha_{n,k}} - 1} \right)^2 \prod_{k=1}^n \frac{t - \alpha_{n,k}}{z - \alpha_{n,k}} \, \frac{f(t)}{t - z} \, dt.$$

В п. 3 рассмотрен вопрос о кругах сходимости последовательности r_n, $n=1, 2, \ldots$, если f голоморфна в некотором круге $C_R=\{z, |z|<R\}$ и если все функции r_n голоморфны в этом круге (или „не очень много" много полюсов γ_n попадают в круг C_R). Доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть* $f\in H(C_R)$, $R>1$ *и* $r_n=r_n(f, L_2(C))$. *Тогда, если* $\gamma_n=0(n)$, $n\to\infty$, *то* $r_n\to f$, $n\to\infty$ *по емкости внутри круга* C_{R_0}, *где число* R_0 *определяется равенством*: $R_0=1+(R-1)^3/(3R^2+1)$. *Если* $\gamma_n=o(n/\log n)$, $n\to\infty$ и что любое число, *то* $r_n\to f$, при $n\to\infty$, m_α *— почти равномерно внутри того же круга* C_{R_0}.

Доказательство теоремы 4 приведено в п. 3. Ряд вспомогательных утверждений и лемм изложены в п. 1.

1. Остановимся теперь на тех понятиях сходимости, которые используются в этой работе.

Пусть e — подмножество плоскости C и $\alpha>0$ — произвольное; положим $m_\alpha(e)=\inf_\nu \Sigma |U_\nu|^\alpha$, где нижняя грань берется по всем покрытиям множества e кругами $U_\nu(|U_\nu|$ — радиус круга $U_\nu)$; $m_\alpha(e)$ — α-мера Хаусдорфа множества e. Через Cape будем обозначать гриновую емкость множества e; если e — компакт, то Cape совпадает с его трансфинитным диаметром (см., напр., [7, гл. VII]).

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, φ — функция, определенная в Ω (со значениями в $\bar{\mathbb{C}}$). Последовательность мероморфных в Ω функций φ_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится по m_α-мере внутри Ω к функции φ, если для любого компакта K, $K\subset\Omega$ и любого $\varepsilon>0$ имеем $m_\alpha\{z\in K, |(\varphi_n-\varphi)(z)|\geq\varepsilon\}\to 0$ при $n\to\infty$. Аналогично определяется сходимость по емкости внутри Ω. Из неравенства Картана $m_\alpha(e)\leq A_\alpha(\mathrm{Cap}e)^\alpha$ (см., напр., [8, гл. III]) немедленно вытекает, что эта последовательность сходится внутри Ω и по m_α-мере для любого $\alpha>0$.

Отметим здесь следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть последовательность* φ_n, $n=1, 2, \ldots$, *сходится по* m_1*-мере к функции* f *внутри* Ω *и пусть* $\varphi_n\in H(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$. *Тогда сходимость равномерна и* $\varphi\in H(\Omega)$. *Обратим внимание на тот факт, что лемма* 1 *справедлива только в случае* m_1*-меры Хаусдорфа.*

Говорим дальше, что последовательность φ_n, $n=1, 2, \ldots$ сходится к φ m_α-почти равномерно внутри области Ω, если для любого компакта K, $K\subset\Omega$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество K_ε $K_\varepsilon\subset K$, такое, что $m_\alpha(K-K_\varepsilon)<\varepsilon$, и $\varphi_n\to\varphi$ при $n\to\infty$, равномерно на K_ε. Ясно, что из m_α-почти равномерой сходимости внутри Ω следует и сходимость по m_α-мере (внутри Ω).

Подробнее о сходимостях по мерам и емкости см. [6, п. 2]. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 2. *Пусть* $P_n(z)=z^n+\cdots+c_n$ *— полином степени* n *и* $r>0$ *— произвольное число. Тогда множество точек, определяемых неравенством* $|P_n(z)|\leq r$, *имеет трансфинитный диаметр* $\sqrt[n]{r}$, *т. е.*

Доказательство см. в [7, гл. VIII].

Сформулируем в виде леммы необходимый для дальнейшего вариант интерполяционной формулы Эрмита — Лагранжа.

Лемма 3. *Пусть* G *— область в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *ограниченная спрямляемой кривой Жордана* Γ *и пусть* $a_k\in G$, $k=1, \ldots, n_1$. *Пусть функция* f *голоморфна в замкнутой области* $\bar{G}$, *пусть* n_2 *— фиксированное число,* $n_2<n_1$ *и* r_{n_2} *— рациональная функция класса* S_{n_2}, $r_{n_2}=p_{n_2}/q_{n_2}$, *интерполирующая* f *во всех точках* $a_1, \ldots, a_{n_1}$. *Тогда для всех точек* $z\in G$ *таких, что* $q_{n_2}(z)\neq 0$, *справедлива формула*

$$(f-r_{n_2})(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\prod_{k=1}^{n_1}\frac{t-a_k}{z-a_k}\cdot\frac{q_{n_2}(t)}{q_{n_2}(z)}\;\frac{f(t)}{b-z}\,dt.$$

Доказательство см., напр., в [1, гл. VII].

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим следствием формулы Эрмита — Лагранжа: если P — произвольный полином степени не выше n_1-n_2-1, то для всех $z\in G$, таких, что $(Pq_{n_2})(z)\neq 0$, имеет место представление

$$(f-r_{n_2})(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\prod_{k=1}^{n_1}\frac{t-a_k}{z-a_k}\cdot\frac{q_{n_2}(t)}{q_{n_2}(z)}\cdot\frac{P(t)}{P(z)}\;\frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Это следствие вытекает непосредственно из формулы Эрмита—Лагранжа.

Пусть теперь Φ однолистная вне единичного круга функция со значениями в $\bar{\mathbf{C}}$. (Напомним, что однолистность определяется условием: для любой пары точек (ζ_1,ζ_2), $\zeta_1\neq\zeta_2$, $|\zeta_i|>1$, $i=1, 2$ имеем $\Phi(\zeta_1)\neq\Phi(\zeta_2)$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Если функция* $\Phi(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\alpha_1\xi^{-1}+\alpha_2\zeta^{-2}+\cdots$ *голоморфна, исключая (простой) полюс в бесконечно удаленной точке, однолистна вне единичного круга и* $|\Phi(\zeta)|>0$ *для всех* $|\zeta|>1$, *то справедливы оценки* (см. [7, гл. II]) $(|\zeta|-1)^2/|\zeta|\leq|\Phi(\zeta)|\leq(|\zeta|+1)^2/|\zeta|$.

2. Доказательство теоремы 1. Напомним, что для всех $n\in N$ $\deg Q_n=n$; тем самым, для любого $n\in N$ функция R_n интерполирует функцию f во всех точках $\beta_1^{(2n+1)},\ldots,\beta_{2n+1}^{(2n+1)}$. Для любого $n\in\mathbf{N}$ перенумеруем свободные полюсы функции R_n таким образом, что $\alpha_{n,k}\in E_R$ для $k=1,\ldots,\gamma_n$.

Зададимся теперь произвольным числом R_1, таким, что $x_0<R_1<R$. Из условий теоремы вытекает, что $f\in H(\bar{E}_{R_1})$. Пусть $n\in N$ произвольно. Положим $\omega_{2n+1}^{\beta}(z)/\omega_{2n+1}^{\beta}(t)=W_n(z,t)$. Применяя к разности $f-R_n$ и области E_R формулу Эрмита — Лагранжа, получаем представление (ниже $z\neq\{\alpha_{n,k}/\gamma_n\ k=1,2,\ldots,\gamma_n)$

$$(f-R_n)(z)=(1/2\pi i)\int_{\Gamma_{R_1}}W_n(z,t)\,Q_n(t)f(t)/(Q_n(z)(t-z))\,dt \tag{4}$$

На основании следствия формулы Эрмита—Лагранжа (см. лемму 3) имеем далее

$$(f-R_n)(z)=(1/2\pi i)\int_{\Gamma_{R_1}}W_n(z,t)\prod_{k=1}^{\gamma_n}(t-\alpha_{n,k})\;(z-\alpha_{n,k})^{-1}\prod_{k=\gamma_n+1}^{n}(t^2$$

$$-\alpha_{n,k}^2)\,(z^2-\alpha_{n,k}^2)^{-1},|\,f(t)/(t-z))\,dt$$

(как и выше, $z\in E_{R_1}$, $z\neq\alpha_{n,1},\ldots,\alpha_{n,\gamma_n}$. Если $\gamma_n=0$, то полагаем $\prod_{k=1}^{\gamma_n}(\otimes-\alpha_{n,k})=1$).

Пусть $\varrho>0$ — произвольное число, такое, что $1<\varrho<R_1$. Для любого $z\in\bar{E}_\varrho$, $z\neq\alpha_{n,1},\ldots,\alpha_{n,\gamma_n}$ справедлива оценка

$$|(f-R_n)(z)|\leq A_1^{\gamma_n}\prod_{k=1}^{\gamma_n}|z-\alpha_{n,k}|^{-1}\,\|W_n(z,t)\|_{\substack{z\in\Gamma_\varrho\\ t\in\Gamma_{R_1}}}\prod_{k=\gamma_n+1}^{n}\|(t^2 \tag{5}$$

$$-\alpha_{n,k}^2)/(z^2-\alpha_{n,k}^2)\|_{\substack{z\in\Gamma_\varrho\\ t\in\Gamma_{R_1}}}.$$

где $\| \times \|_{\otimes}$ = sup-норма на $\otimes$. (Здесь и всюду в дальнейшем $A_i>0$, независящие от n постоянные, $i=1, 2, \ldots$).

Обозначим через $\Phi(\zeta)=a\zeta+a_0+\bar{a}_1\zeta^{-1}+\cdots$ функцию, отображающую однолистно и конформно, исключая $\zeta=\infty$, внешность единичного круга на внешность компакта E. Поскольку $0\notin E$, то $|\Phi(\zeta)|>0(|\zeta|>1)$. Условия $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)=a>0$ определяют эту функцию однозначно. Положим $\Phi(u)=t$ для $t\in\Gamma_{R_1}$, $\Phi(v)=z$ для $z\in\Gamma_\varrho$ и $\Phi(a_{n,k})=\alpha_{n,k}$, $k=\gamma_n+1,\ldots,n$. Очевидно из того, что $t\in\Gamma_{R_1}$ и $z\in\Gamma_\varrho$, вытекают равенства $|u|=R_1$ и $|v|=\varrho$. Ясно также, что $|a_{n,k}|>R$, $k=\gamma_n+1,\ldots,n$. Положим теперь $\Psi(\zeta)=\Phi(\zeta)/a$ и запишем (5) в следующем виде:

$$|(f-R_n)(z)|_{\substack{z\in E_\varrho\\ z\neq\{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{\gamma_n}}}\leq A_2^{\gamma_n}\prod_{k=1}^{\gamma_n}|z-\alpha_{n,k}|^{-1}\tag{6}$$

$$\|W_n(z,t)\|_{\substack{z\in\Gamma_\varrho\\ t\in\Gamma_{R_1}}}\prod_{k=\gamma_n+1}^{n}\left\|\frac{1-\Psi^2(u)/\Psi^2(a_{n,k})}{1-\Psi^2(v)/\Psi^2(a_{n,k})}\right\|_{\substack{|u|=R_1\\ |v|=\varrho}}.$$

Фиксируем ϱ_0, $1<\varrho_0<R_1$ таким образом, чтобы имели место неравенства

$$\mathscr{R}_{R_1}(\varrho_0)=1-(\varrho_0+1)^4R_1^2/[\varrho_0^2(R_1-1)^4]>0,\tag{7}$$

$$0<\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)=(\varrho_0/R_1)^2\,[1+(R_1+1)^4/(R_1-1)^4]/\mathscr{R}_{R_1}(\varrho_0)<1.\tag{8}$$

Элементарными рассуждениями проверяется, что существуют числа ϱ_0 с этими свойствами. Действительно, для любого фиксированного R_1, $R_1>1$ функции $\mathscr{R}_{R_1}(\varrho)$ и $\mathscr{C}_{R_1}(\varrho)$ непрерывны в точке $\varrho=1$. Неравенство $\mathscr{R}_{R_1}(1)>0$ удовлетворяется для всех $R_1>2\eta 2+3$. Для таких R_1 неравенство $\mathscr{C}_{R_1}(1)<1$ приводит к (3) ($\mathscr{A}(R_1)>1$). Исследуя в отдельности уравнение $\mathscr{A}(x)=0$, увидим, что у функции $\mathscr{A}(x)$ три экстремальных точки; вычисляется, что наибольшая из них, точка x_1 (в который $\mathscr{A}''(x_1)>0$), лежит в интервале $(5,2\sqrt{2}+3)$. Проверяется далее, что $\mathscr{A}(2\sqrt{2}+3)<0$; следовательно, наибольший вещественнозначный корень x_0 уравнения $A(x)=0$ лежит правее, чем $2\sqrt{2}+3$ $(x_0>2\sqrt{2}+3)$. Вычисляется непосредственно, что $6<x_0<6{,}5$. Следовательно, $\mathscr{R}_{R_1}(1)>0$ и $\mathscr{C}_{R_1}(1)<1$ для всех $R_1>x_0$. В силу непрерывности функций $\mathscr{R}_{R_1}(\varrho)$ и $\mathscr{C}R_1(\varrho)$ как функции переменного ϱ_0 в точке $\varrho_0=1$(R_1 — фиксированное, $R_1>x_0$ по выбору) существуют числа ϱ_0, $\varrho_0>1$, для которых верны (7) и (8).

Фиксируем $\varrho_0>1$, удовлетворяющее (7) и (8), и положим в (6) $\varrho=\varrho_0$. Зададимся теперь положительным θ, таким, что $\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)\,e^\theta<1$. Из условия $\beta\in\mathfrak{P}(E)$ вытекает для всех достаточно больших n оценка:

$$\|W_n(z,t)\|_{\substack{z\in\Gamma_\varrho\\ t\in\Gamma_{R_1}}}\leq(\varrho_0e^\theta/R_1)^{2n+1},\quad n>N_1.\tag{9}$$

На основании леммы 4 и неравенства (7) имеем далее

$$\prod_{k=\gamma_n+1}^{n}\left\|\frac{1-\Psi^2(u)/\Psi^2(a_{n,k})}{1-\Psi^2(v)/\Psi^2(a_{n,k})}\right\|_{\substack{|u|=R_1\\ |v|=\varrho_0}}\leq[1+(R_1+1)^4/(R_1-1)^4]^{n-\gamma_n}\Big/\prod_{k=\gamma_n+1}^{n}|1$$

$$-|\Psi^2(v)/\Psi^{-2}(a_{n,k})|\leq\{1+(R_1+1)^4/(R_1-1)^4\}^{n-\gamma_n}/\{1-(\varrho_0+1)^4R_1^2/[\varrho_0^2(R_1-1)^4\}.$$

Объединяя последнюю оценку и неравенство (9), получаем из (6)

$$(10)\qquad |(f-R_n)(z)|\, z\in \bar{E}_{\varrho_0},\ z\neq \{a_{n,k}\}_{k=1}^{\gamma_n}\ A_3^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{\gamma_n} |z-a_{n,k}|^{-1}\,[\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)e^{\theta}]^{n-\gamma_n}\ .$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное; положим $\mathscr{A}_{n,\varepsilon}=\{z\in \bar{E}_{\varrho_0},\ |(f-R_n)(z)|\geqq\varepsilon\}$; из неравенства (10) следует, что для всех достаточно больших n $(\geqq N_1)$

$$\mathscr{A}_{n,\varepsilon}\subset\{\in \bar{E}_{\varrho_0},\ \prod_{k=1}^{\gamma_n}|z-a_{n,k}|\leqq A_3^{\gamma_n}\,.\,\varepsilon^{-1}[\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)e^{\theta}]^{n-\gamma_n}\ .$$

Применяя к множеству справа лемму 2, подходим к неравенству

$$\mathrm{Cap}\{z\in E_{\varrho_0},\ |(f-R_n)(z)|\geqq\varepsilon\}\leqq A_3\,\varepsilon^{(-1\gamma_n)}[\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)\,e^{\theta}]^{n-\gamma_n}.$$

Очевидно стоящее в правой стороне выражение стремится к нулю, когда $n\to\infty$. Этим показано, что при $n\to\infty$ последовательность R_n стремится к функции f по емкости на некоторой замкнутой окрестности $\bar{E}_{\varrho_0}$ компакта E (тем самым, и на всем компакте E).

Пусть теперь $\alpha>0$ — произвольное число и пусть $\gamma_n=o(n/\log n)$ $n\to\infty$. Фиксируем произвольный номер N'. Для любого $n>N'$ покроем точки $a_{n,1},\ldots,a_{n,\gamma_n}$ открытыми кругами $U_{n,k}$, $k=1,\ldots,\gamma_n$ радиуса $2(\gamma_n\, n^2)^{-(1/\alpha)}$ Положим $U_{N'}=\bigcup_{n\leq N'}\bigcup_{k=1}^{\gamma_n}U_{n,k}$; имеем

$$m_\alpha(U_{N'})\leqq\sum_{n\leqq N'}2n^{-2}\to\infty,\ \text{если}\ N'\to\infty.$$

С другой стороны, вне множества $U_{N'}$ справедлива, на основании (10), оценка

$$\|(f-R_n)(z)\|_{\overline{E_{\varrho_0}-U}}\leqq A_4^{\gamma_n}(\gamma_n\quad n^2)^{\gamma_n/\alpha}2^{(-\gamma_n/\alpha)}(\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)e^{\theta})^n$$

$$=[A_4^{\gamma_n/n}(\gamma_n\quad n^2)^{(\gamma_n/\alpha n)}\,.\,2^{(-\gamma_n/\alpha n)}]^n(\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)e^{\theta})^n.$$

В силу условий роста чисел γ_n при $n\to\infty$ последовательность $(\gamma_n\, n^2)^{\gamma_n/n}$ сходится к единице при $n\to\infty$. С другой стороны, $\mathscr{C}_{R_1}(\varrho_0)<1$ (см. (7)). Следовательно, стоящее в последних скобках выражение меньше единицы, если n достаточно большое $(n\geqq N'')$; это означает, что $R_n\to f$ равномерно на множестве $\bar{E}_{\varrho_0}-U_{N'}$ при $n\to\infty$. На этом показано, что последовательность R_n стремится при $n\to\infty$, m_α-почти равномерно к функции f на компакте $\bar{E}_{\varrho_0}$; тем самым, и на компакте E.

Итак, увидели в общности, что если $\gamma_n=o(n)$, то $R_n\to f$ по емкости и если к условиям теоремы 1 добавится и $\gamma_n=o(n/\log n)$, при $n\to\infty$, то $R_n\to f$, $n\to\infty$, m_α-почти равномерно, на компакте на E и на некоторой его замкнутой окрестности $\bar{E}_{\varrho_0}$, $\varrho_0>1$.

Зададимся, теперь, положительным числом R', таким, что $1<R'<R/x_0$. Множество $\bar{E}_{R'}$ — регулярный компакт, линии уровня $\Gamma_r^{R'}$ которого связаны с линиями Γ_r, $r>1$ соотношениями: $\Gamma_r^{R'}=\Gamma_{rR'}$: в частности, $\Gamma^{R'}_{(R'/R)}=\Gamma_R$. Применяя к функции f и компакту $\bar{E}_{R'}$ полученный результат и устремляя потом R' к R, $(R'<R/x_0)$, получим и утверждение теоремы 1.

Отметим, что если для всех n рациональные функции R_n голоморфны в области E_R (т. е. $\gamma_n=0$ для всех n), то сходимость последовательности R_n, $n\to\infty$ уже равномерна внутри области $E_{(R/x_0)}$.

Утверждения теоремы 1 относительно сходимости R_n, $n=1, 2, \ldots$, справедливы и в случае, когда, в отличие от условии теоремы, функция f, $f\in H(E)$ продолжается мероморфно в области $E_R(f\in\mathfrak{M}(E_R))$. Сформулируем последнее в виде теоремы:

Теорема 2. *Пусть E и β определены как в теореме 1 и функция f, $f\in H(E)$, продложается мероморфно в области E_R, где $R>x_0$. Пусть для всех n рациональные функции R_n находятся в уловиях теоремы 1. Тогда, если последовательность γ_n, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям теоремы 1, то справедливы соответствующие утверждения относительно сходимости последовательности R_n, $n=1, 2, \ldots$, внутри области $E_{(R/x_0)}$.*

Заметим, что если число полюсов функции f в области E_{R/s_0} равно m, то, начиная с некоторого n, $\gamma_n\geqq m$ (см. лемму 1).

Доказательство этой теоремы повторяет рассуждения п. 2; отличие есть только в выборе интерполируемой в формуле Эрмита—Лагранжа (см. (4)).

И наконец, следуя схеме рассуждений п. 2, можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть E, β, f и R определены как в теореме 1. Пусть (n, m_n), $n=1, 2 \ldots$, — последовательность пар натуральных чисел, таких, что $n/m_n\to 1$ при $n\to\infty$. Пусть для всех n рациональные функции R_{n,m_n} находятся в условиях теоремы 1. Тогда, если последовательность γ_{n,m_n} удовлетворяет при $n\to\infty$ условиям теоремы 1, то справедливы соответствующие утверждения относительно сходимости последовательности $R_{(n,m_n)}$ при $n\to\infty$ внутри области $E_{(R/x_0)}$*

(здесь $\gamma_{,nm_n}$ обозначает число свободных полюсов функции R_{n,m_n}, лежащих в области E_R).

3. Прежде чем продолжим дальше, сформулируем в виде леммы следующее утверждение:

Лемма 5. *Пусть $A, T, A>1, T>1$, — заданные числа и пусть $1<z<A$; пусть $|t|=T$, $|\alpha|>A$ и $1<|z|\leqq z$.* Тогда справедливы оценки:

$$|(z\cdot\bar{a}-1)/(z-a)|\leq(AZ-1)/(A-Z);\ |(t-a)/(t\bar{a}-1)|\leq(A+T)/(AT+1).$$

Доказательство этой леммы см. в [1, гл. XI].

Доказательство теоремы 4.

Пусть $f\in H(C_R)$ и для любого n r_n — наилучшее приближение в классе S_n в метрике $L_2(C)$; положим $r_n=p_n/q_n$, где $(p_n, q_n)=1$. Напомним, что $\deg q_n=n$ $q_n(z)\neq 0$ $|z|<1$; $q_n(z)=\Pi_{k=1}^n(z-a_{n,k})$.

Фиксируем произвольное число R_1, такое, что $1<R_1<R$; положим потом $R_0^{(1)}=(R_1^3+3R_1)\ (3R_1^2+1)^{-1}$ и зададимся числом ϱ, $1<\varrho<R_0^{(1)}$. Пусть $n\in N$ — произвольное натуральное число. Для всех точек z, $|z|<\varrho$, $z\neq a_{n,1}, \ldots, a_{n,\gamma_n}$ справедливо представление

$$(f-r_n)(z)=(1/2\pi i)\int\limits_{|t|=R_1}D_n(z, t)f(t)\prod_{k=1}^{\gamma_n}(z\cdot\overline{a_{n,k}}-1)^2(t-a_{n,k})\,(t,\overline{a_{n,k}}-1)^{-2}(z-a_{n,k})^{-1}\frac{dt}{t-z},$$

где через $D_n(z, t)$ обозначено выражение $\Pi_{k=\gamma_n+1}^{n}(z\,.\,\overline{a_{n,k}}-1)(t-a_{n,k})(z-a_{n,k})^{-1}(t,\,\overline{a_{n,k}}-1)^{-2}$. Применяя к $D_n(z, t)$ лемму 5, получаем оценку

$$(11)\quad |(f-r_n)(z)| \leqq A_5^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{\gamma_n} |z-a_{n,k}|^{-1}[(R_1\varrho-1)2R_1(R_1-\varrho)^{-1}(1+R_1^2)^{-1}]^n;$$

здесь $|z|<\varrho$, $z\neq a_{n,1}, \dots, a_{n,\gamma_n}$.

Пусть $\gamma_n=o(n)$, $n\to\infty$. Следуя схеме доказательства теоремы 1, увидим, что последовательность r_n, $n=1, 2, \dots$ стремится по емкости (к функции f) на всем круге $\overline{C}_\varrho=\{z, |z|\leqq\varrho\}$. И поскольку число ϱ, $\varrho<R_0^{(1)}$ выбрано произвольным, то имеем право утверждать, что $r_n\to f$, $n\to\infty$ по емкости внутри круга $C_{R_0^{(1)}}$.

Также, как и в п. 2, убедимся, что если $\gamma_n=o(n/\log n)$, то сходимость последовательности r_n, $n\to\infty$ уже m_α-почти равномерна ($\alpha>0$ — любое) внутри круга $C_{R_0^{(1)}}$.

Устремляя потом число $R_0^{(1)}$ к R_0, получим и утверждения относительно сходимостей внутри круга C_{R_0}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д ж. У о л ш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, Москва, 1961.
2. T. B a g b y. On interpolation by rational functions. *Duke Math. J.*, **36**, 1967, 95-104.
3. E. B. S a f f. An extension of Montessus de Ballore's Theorem on the convergence of interpolating rational functions. *J. Approxim. Theory*, **6**, 1972, 63-69.
4. J. Z i n n - J u s t i n. Convergence of Pade-approximants in general case, 2. *Colloquim on Adv. Comp. methods in theoret. Physics*, Marseille, 1971, II 89-II 101.
5. B. Д. Е р о х и н. О наилучших приближениях аналитических функций посредством рациональных. *Доклады АН СССР*, **128**, 1959, 29-32.
6. А. А. Г о н ч а р. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций. *Мат. сб.*, **98**, 1976, 569-577.
7. Г. М. Г о л у з и н. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва, 1966.
8. Н. С. Л а н д к о ф. Основы современной теории потенциала. Москва, 1966.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 17. 6. 1980