Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ I. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

ФАН ДЫК ЧАУ

В работе рассматривается вопрос о постановке и исследовании краевых задач для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Доказывается единственность сильного решения этих задач.

В области $D\subset R^2$ рассмотрим уравнение

$$Lu=k(x)u_{xx}+m(y)u_{yy}+\alpha(x,y)u_x+\beta(x,y)u_y=f(x,y), \tag{1}$$

где $k(x)$ и $m(y)\in C^2(\bar{D})$, $xk(x)>0$ для $x\neq 0$, $ym(y)>0$ для $y\neq 0$, $0<K_0\leq k'(x)\leq K_1$, $0<K_0\leq m'(y)\leq K_1$ ($K_i=\text{const}$, $i=0,1$), $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)\in C^1(\bar{D})$.

В этой работе дается постановка краевых задач для уравнения (1) и доказывается единственность сильного решения. В 1 даются некоторые вспомогательные сведения о положительно-симметричных системах. В 2 рассматривается связанная с уравнением (1) положительно-симметричная система 1-го порядка и дается постановка краевой задачи A для этой системы. В 3 доказывается, что для произвольной ограниченной подобласти $G\supset D$ существует ограниченная область $G'/\subset D$ и постоянная $c(G')$ такие, что для всех функций $u\in C^1(\bar{D})$ выполнена оценка

$$\Big\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big\|_{L_2(G)}\leq c_0(\|u_x\|_{L_2(G')}+\|u_y\|_{L_2(G')})+c(G')\max_{S^0\cap G'}|u|,$$

где постоянная c_0 зависит только от D (здесь S^0 — часть границы области D) В 4 рассматривается задача B для уравнения (1) соответствующей задачи A. При некоторых дополнительных предложениях относительно области D доказывается, что сильное решение задачи B единственно и выполнена оценка

$$\Big\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big\|_{L_2(D)}+\|u_x\|_{L_2(D)}+\|u_y\|_{L_2(D)}\leq c\|Lu\|_{L_2(D)}.$$

Отметим, что краевые задачи в ограниченных и неограниченных областях для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения $k(y)u_{xx}+m(x)u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=f(x,y)$ рассматривались в работах Н. И. Попиванова [2; 3].

Краткое изложение полученных результатов опубликовано в заметках [4; 5].

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 91—103.

1. Вспомогательные сведения о положительно-симметричных системах (см. [6; 7]). В ограниченной или неограниченной области $D\subset R^m$ с кусочно-гладкой границей $S=\partial D$ рассмотрим систему

$$Lu=\sum_{i=1}^{m} A^i\,\partial u/\partial x_i+Bu=F,$$

где $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $F=(f_1,\ldots,f_n)$, A^i и B — $n\times n$ матрицы с кусочно-гладкими и соответственно с кусочно-непрерывными элементами. Введем матрицу $\varkappa=B-(\Sigma_{i=1}^m\partial A^i/\partial x_i)/2$. Если матрицы A^i симметричны и матрица $\varkappa+\varkappa'$ положительно-определенна в $\bar{D}$, система называется положительно-симметричной. Рассмотрим характеристическую матрицу $\beta=\Sigma_{i=1}^m n_iA^i(x)$, где $n(x)=(n_1(x),\ldots,n_m(x))$ — единичный вектор внешней нормали к S. Предположим, что матрицу β можно представить в виде $\beta=\beta_++\beta_-$, причем $\mu+\mu'\geqq 0$, где $\mu=(\beta_+-\beta_-)/2$ и $\operatorname{Ker}\beta_+-\operatorname{Ker}\beta_-=R^m$, где $\operatorname{Ker}\beta_\pm$ — ядро $\beta_\pm$. Тогда граничное условие $\beta_-u=0$ называется допустимым. Сопряженное условие будет $\beta'_+v=0$.

Функцию u будем называть кусочно-непрерывной в D, если она ограниченная в D и при помощи конечного числа кусочно-гладких линий D можно разбить на области, внутри которых функция непрерывная. Функцию u будем называть кусочно-гладкой в D, если она непрерывная в $\bar{D}$ и ее первые производные кусочно-непрерывны в D.

Пусть $F\in L_2(D)$. Рассмотрим задачу $Lu=F$ в D, $\beta_-u=0$.

Определение 1. *Функция $u\in L_2(D)$ называется слабым решением задачи, если $(u, L^*v)=(F,v)$ для каждой кусочно-гладкой в D функции v, удовлетворяющей сопряженным граничным условиям, с ограниченным носителем.*

Определение 2. *Функция $u\in L_2(D)$ называется сильным решением задачи, если существует последовательность кусочно-гладких в D функций u_k, удовлетворяющих условиям $\beta_-u_k=0$ с ограниченными носителями и $\|u_k-u\|\to 0$, $\|Lu_k-F\|\to 0$ при $k\to\infty$.*

Имеет место следующая

Теорема. *Для каждой функции $F\in L_2(D)$ существует слабое решение задачи. Сильное решение этой задачи единственно. Справедливо неравенство $\|u\|\leq c\|Lu\|$ для любой функции $u\in C^1(\bar{D})$, удовлетворяющей граничным условиям $\beta_-u=0$, носитель которой ограничен.*

2. Исследование системы, соответствующей уравнению (1). Если функция $u\in C^2(\bar{D})$ удовлетворяет в D уравнению (1), то функции $u_1=\partial_1u$, $u_2=\partial_2u$ ($\partial_1=\partial/\partial x$, $\partial_2=\partial/\partial y$) удовлетворяют в D системе $\partial_1u_2-\partial_2u_1=0$, $k\partial_1u_1+m\partial_2u_2+\alpha u_1+\beta u_2=f$. Если запишем эту систему в матричном виде и умножим ее слева на матрицу

$$E=\begin{pmatrix} k & b\\ -mb & 1\end{pmatrix},$$

где $b(x,y)$ — пока произвольная функция, получим симметричную систему

$$\hat{L}\hat{u}=A_1\partial_1\hat{u}+A_1\partial_2\hat{u}+B\hat{u}=F, \tag{2}$$

где $\hat{u}=(u_1,u_2)$, $F=(bf,f)$,

$$A_1=\begin{pmatrix} kb & k \\ k & -mb \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} -k & mb \\ mb & m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b\alpha & b\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Функцию $b(x, y)$ определяем следующим образом:

$$b(x,y)=\begin{cases} b_1 & \text{при } x\leqq 0,\ y>0, \\ b_1+(b_2-b_1)x/(x+y) & \text{при } x>0,\ y>0, \\ b_2 & \text{при } x\geqq 0,\ y\leqq 0, \end{cases}$$

где b_1 и b_2 — постоянные, причем $b_1>k'(0)/m'(0)>b_2$. Если в области $R^2\diagdown\{x<0,\ y<0\}$ выполняются условия

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases} 2\alpha-k'\geqq c, \qquad 2\beta-m'\geqq c, \\ b(2\alpha-k')(2\beta-m')-(-bm'-k'+b\beta+\alpha)^2\geqq c, \\ (b_1-b_2) \text{ — достаточно мало,} \end{cases}$$

где $c=\text{const}>0$, то система (2) будет положительно-симметрична в $R^2\diagdown\{x<0,\ y<0\}$. Действительно, рассмотрим матрицу $\varkappa$ и ее симметричную часть:

$$\varkappa+\varkappa'=\begin{pmatrix} -b_xk+b(2\alpha-k') & -b_ym-bm'-k'+b\beta+\alpha \\ -b_ym-bm'-k'+b\beta+\alpha & b_xm+(2\beta-m') \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в областях $\{x\leqq 0, y>0\}$ и $\{x\geqq 0, y\leqq 0\}$, когда обе первые неравенства из (P) выполнены, имеем $\varkappa+\varkappa'>0$. В области $\{x>0,\ y>0\}$ имеем $|kb_x|\leqq\text{const}\,(b_1-b_2)$, $|mb_x|\leqq\text{const}\,(b_1-b_2)$, $|mb_y|\leqq\text{const}\,(b_1-b_2)$. Следовательно, если выполнено условие (P), $\varkappa+\varkappa'$ будет положительно-определенна в области $\{x>0,\ y>0\}$. Условие (P) выполнено, например, в случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$(k(x)u_x)_x+(m(y)u_y)_y+\varphi(x, y)u_x+\psi(x, y)u_y=f(x, y),$$

где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ достаточно малы по абсолютному значению.

Найдем область $R^*\subset R^2\diagdown\{x<0,\ y<0\}$, такую, что

$$\text{(3)}\qquad \det E=k(x)+b^2(x, y)m(y)\geqq cr(x, y),\ \ r(x, y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

и в некоторой окрестности точки (0, 0) характеристика уравнения (1), проходящая через (0, 0), содержится в R^*. Обозначим

$$C(m, h)=\max_{|y|\leqq h}|m'(y)-m'(0)|, \quad C(k, H)=\max_{|x|\leqq H}|k'(x)-k'(0)|,$$

$$\Pi=\{|x|\leqq H,\ |y|\leqq h\}, \quad R_0=\{x>0,\ y>0\}.$$

Пусть h и H столь малые, что $C(k, H)<k'(0)$ и $C(m, h)<m'(0)$. В областях $\{x\geqq 0,\ y\leqq 0\}$ и $\{x\leqq 0,\ y>0\}$ характеристика уравнения (1), проходящая через (0, 0), находится соответственно в областях

$$\left[\frac{m'(0)+C(m,\ h)}{k'(0)-C(k,\ H)}\right]x+y\geqq 0 \ \text{ и } \left[\frac{m'(0)-C(m,\ h)}{k'(0)+C(k,\ H)}\right]x+y\geqq 0.$$

Кроме того, получаем, что

а) в R_0 имеем $k+b^2m\geqq K_0(b_2^2|y|+|x|)$;

б) в $R_1=\Pi\cap\{x\leqq 0,\ \ y>0,\ \ y+p_1x\geqq 0\}$, где $p_1=[m'(0)-C(m, h)]/[k'(0)+C(k, H)]$ имеем $k+b^2m\geqq\{b_1^2[m'(0)-C(m, h)]\,p_1-[k'(0)+C(k, H)]\}|y|/p_1$;

в) в $R_2=\Pi\cap\{x\geqq 0,\quad y\leqq 0,\quad y+p_2x\geqq 0\}$, где $p_2=[m'(0)+C(m,h)]/[k'(0)-C(k,H)]$ имеем $k+b^2m\geqq\{[k'(0)-C(k,H)]-b_2^2p_2[m'(0)+C(m,h)]\}|x|$. Если h и H достаточно малые, так что выполнено неравенство

$$b_2<[k'(0)-C(k,H)]/[m'(0)+C(m,h)]<k'(0)/m'(0)$$
$$<[k'(0)+C(k,H)]/[m'(0)-C(m,h)]<b_1,$$

то в $R=R_0\cup R_1\cup R_2$ имеет место неравенство (3).

Пусть $(x_2,y_2)=\partial R\cap\{y+p_2x=0,\ y\leqq 0\}$. В области $\{x\geqq x_2,\ y\leqq 0\}$ имеем

$$k+b^2m=[k(x_2)+b_2^2m(y_2)]+[k(x)-k(x_2)]+b_2^2[m(y)-m(y_2)=I_1+I_2+I_3$$
$$\geqq c'r(x_2,y_2)+K_0(x-x_2)+I_3.$$

Если $y_2\leqq y\leqq 0,\ \ x\geqq y_2$, то $I_3>b_2^2K_0|y-y_2|$ и неравенство (3) имеет место. Если $y\leqq y_2,\ \ x\geqq x_2,\ \ y_2-y\leqq p_3(x-x_2)$ (здесь $p_3>0$), то $k+b^2m\geqq c'r(x_2,y_2)+K_0(x-x_2)-K_1\ p_3(x-x_2)b_2^2=c'r(x_2,\ y_2)+|x-x_2|[K_0-K_1p_3b_2^2]\geqq cr(x,\ y)$, когда $K_0/K_1b_2^2>p_3>0$. Поэтому для всех точек из $P_2'=\{x\geqq x_2,\ y\leqq 0,\ y_2-y\leqq p_3(x-x_2)\}$ выполнено неравенство (3).

Пусть $(x_1,\ y_1)=\partial R\cap\{y+p_1x=0,\ x\leqq 0\}$. Можно найти постоянную $p_4>0$, такую, что неравенство (3) будет выполнено для всех точек области $R_1'=\{x\leqq 0,\ y\geqq y_1,\ y-y_1\leqq p_4(x-x_1\}$.

В области $R^*=R_0\cup R_1\cup R_1'\cup R_2\cup R_2'$ (рис. 1) выполняется сформулированное выше.

Рассмотрим случай, когда $k(x)=x,\ m(y)=y$. Прямая $x+y=0$ является характеристикой уравнения (1) через (0, 0). Можно взять $R^*=\{x+y\geqq 0\}$. Если $b_2<1<b_1$ и (b_1-b_2) достаточно мало, то $k+b^2m=x+b^2y\geqq(b_1^2-1)y$ в области $\{x\leqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\geqq 0\}$ и $k+b^2m\geqq(1-b_2^2)x$ в области $\{x\geqq 0,\ x+y\geqq 0\}$, т. е. выполняется неравенство (3) в R^*. Кроме того, в R^* содержится вся характеристика через (0, 0).

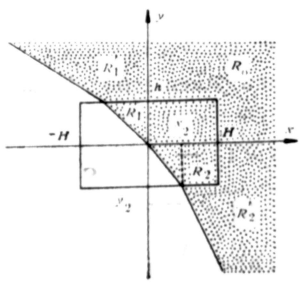

Рис. 1

Дальше будем рассматривать только области $D\subset R^*$. Пусть граница $S=\partial D$ кусочно-гладка. Введем на S граничную матрицу

$$\beta=n_1A_1+n_2A_2=\begin{pmatrix}k(bn_1-n_2) & kn_1+bmn_2\\ kn_1+bmn_2 & -m(bn_1-n_2)\end{pmatrix},$$

где $n=(n_1,n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к S.

Если $bn_1+n_2\neq 0$, матрицу β можно записать в виде

$$u.\beta u=(bn_1+n_2)^{-1}[H(bu_1+u_2)^2-(k+b^2m)(n_1u_2-n_2u_1)^2],$$

где $H=kn_1^2+mn_2^2$.

Отсюда ясно, какие краевые условия являются допустимыми. Обозначим

$$S_0^1=S\cap\{H\geqq 0,\quad bn_1+n_2>0\};\quad S_0^2=s\cap\{H\geqq 0,\ bn_1+n_2=0\};$$
$$S_{00}=S\cap\{H<0,\ bn_1+n_2>0\};\quad S'=S\cap\{H>0,\ bn_1+n_2<0\};$$
$$S_{\sim}=S\cap\{H\leqq 0,\ bn_1+n_2<0\}.$$

Матрицу μ определяем через квадратичную форму

$$\widehat{u}\,.\,\mu\widehat{u}=(2|bn_1+n_2|)^{-1}[|H|(bu_1+u_2)^2+(k+b^2m)(n_1u_2-n_2u_1)^2] \text{ при } bn_1+n_2\neq 0.$$

Для того, чтобы матрица μ определялась отсюда однозначно, будем предполагать, что она симметрична. Например, на S_0^1

$$\widehat{u}\,.\,\mu\widehat{u}=1[H(bu_1+u_2)^2+(k+b^2m)(n_1u_2-n_2u_1)^2]/2(bn_1+n_2).$$

Тогда

$$\widehat{u}\,.\,\beta_+\widehat{u}=H(bu_1+u_2)^2/(bn_1+n_2)\,;\ \widehat{u}\,.\,\beta_-\widehat{u}=-(k+b^2m)(n_1u_1-n_2u_1)^2/(bn_1+n_2).$$

Отсюда находим

$$\beta_+=\frac{N}{bn_1+n_2}\begin{pmatrix} b^2 & b\\ b & 1\end{pmatrix};\quad \beta_-=-\frac{k+b^2m}{bh_1+n_2}\begin{pmatrix} n_2^2 & -n_1n_2\\ -n_1n_2 & n_1^2\end{pmatrix}.$$

Любое $\widehat{u}$ можно представить в виде $\widehat{u}=\widehat{u}_++\widehat{u}_-$, где при $n_1\neq 0$ $\widehat{u}_+=(u_{1+},$ n_2u_{1+}/n_1, где $u_{1+}=(n_2/n_1+b)^{-1}(bu_1+u_2)$; $\widehat{u}_-=(u_{1-},\ -bu_{1-})$, где $u_{1-}=(n_2/n_1+b)^{-1}(n_2n_1/u_1-u_2)$; а при $n_1=0$, $\widehat{u}_+=(0,\ bu_1+u_2)$, $\widehat{u}_-=(u_1,\ -bu_1)$.

Очевидно $\beta_+\widehat{u}=\beta_-\widehat{u}_+=0$. Допустимое условие $\beta_-\widehat{u}=0$ имеет вид $n_2u_1-n_1u_2=0$ на S_0^1.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Допустимые условия имеют вид

$$\begin{cases} n_1u_2-n_2u_1=0 & \text{на}\quad S_0=S_0^1\cup S_0^2;\quad u_1=u_2=0\quad \text{на}\quad S_{00};\\ bu_1+u_2=0 & \text{на}\quad S';\qquad u\sim\qquad \text{на}\quad S_\sim.\end{cases}\tag{4}$$

Здесь и далее знак $\sim$ обозначает, что на соответственной части границы не задается граничных условий.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача A. *Найти решение системы* (2) *в области* D, *удовлетворяющее граничным условиям* (4).

Из теории положительно-симметричных систем [6] следует

Утверждение. *Для каждой функции* $F=(f_1,\ f_2)\in L_2(D)$ *существует слабое решение зодачи* A. *Сильное решение этой задачи единственно. Справедливо неравенство* $\|\widehat{u}\|\leq c\|L\widehat{u}\|$ *для любой функции* $\widehat{u}\in C^1(\bar{D})$, *удовлетворяющей граничным условиям* (4), *носитель которой ограничен.*

Обозначим через $S_\sim^*$ множество $S\cap\{H\leq 0,\ bn_1+n_2>0\}$. Пусть $S_\sim=\cup\Gamma_i^1$, $S_\sim^*=\cup\Gamma_i^2$, $S\diagdown(S_\sim\cup S_\sim^*)=\cup\Gamma_i^3$. Здесь Γ_i^k — замкнутые, связные кривые. Через $\measuredangle(\Gamma_i,\ \Gamma_j)$ будем обозначать угол, образованный при пересечении Γ_i и Γ_j, рассмотренный со стороны области. Предположим, что

a1. $\Gamma_i^1\in C^1$, $\Gamma_i^2\in C^1$, $\Gamma_i^3\in C^2$; если $\Gamma_i^1\cap\Gamma_j^2\neq\varnothing$ то, или $\Gamma_i^1\in C^2$, или $\Gamma_j^2\in C^2$.

a2. $0<\measuredangle(\Gamma_i^k,\ \Gamma_j^l)<\pi$ для $k\neq l$ и для $k=l=3$, $i\neq j$; $(0,\ 0)\,\bar{\in}\, S_0\cup S_{00}\cup S'$.

a3. Множество тех точек из Γ_j^3, в каждой из которых выражение bn_1+n_2 меняет знак, не имеет конечных точек сгущения. Имеет место следующая лемма ([3]).

Лемма 1. *Пусть все точки границы* S *удовлетворяют условиям о совпадении слабого и сильного решения. Пусть элементы матриц* A_i *возрастают не быстрее, чем* $\sqrt{x^2+y^2}$ *в* D. *Тогда каждое слабое решение задачи* A *является сильным решением.*

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (P) *и область* $D\subset R^*$ *удовлетворяет условиям* a1—a3. *Тогда для каждой функции* $F=(f_1, f_2)\in L_2(D)$ *существует одно и только одно сильное решение задачи* A. *Для всех кусочно-гладких функций* $\widetilde{u}$, *удовлетворяющих* (4), *с ограниченными носителями, выполняется оценка* $\|\widehat{u}\|\leqq c\|\widehat{L}\,\widehat{u}\|$.

Доказательство. Покажем, что все точки границы S удовлетворяют условиям о совпадении слабого и сильного решения. На $S_\smile$ не задаются граничные, а на $S^*_\smile$ — сопряженные условия, и, следовательно, для них применима теорема 2 из [1]. На $S\setminus(S_\smile\cup S^*_\smile)$ остались только точки, в которых $H>0$. Матрица β неособая. Граничное пространство $N(x)$ имеет вид

$$N(x)=\{\widehat{u}:\ n_2u_1-n_1u_2=0,\text{ где } bn_1+n_2\geqq 0;\ bu_1+u_2=0,\text{ где } bn_1+n_2<0\}.$$

Из a3 и кусочной гладкости функции $b(x, y)$ вне точки $(0, 0)$ оно кусочно-гладкое и одномерно ([3]). Из a1 имеем $\Gamma_i^3\in C^2$. Следовательно, в некоторой окрестности произвольной внутренней точки Γ_i^3 выполнены все условия теоремы П. Лакса и Р. Филипса [7]. Рассмотрим точку $\Gamma_i^1\cap\Gamma_i^1$ $(\Gamma_i^2\cap\Gamma_j^2)$ В некоторой ее окрестности граница липшицова и не задаются граничные (сопряженные граничные) условия. Из теоремы 2 работы [1] следует, что слабое решение является сильным. Рассмотрим точку $\Gamma_i^1\cap\Gamma_j^2(\Gamma_i^1\cap\Gamma_j^3)$. Некоторую ее окрестность в $\bar{D}$ можно отобразить в угол вида $\{y_1=F(y_2), y_2\geqq 0\}$ посредством неособого преобразования класса C^2. Функция F липшицова. На одной стороне этого угла не задаются граничные условия, а на другой — сопряженные граничные условия. Из теоремы 3, случай 2б работы [1], следует совпадение слабого и сильного решения. Точка $\Gamma_i^2\cap\Gamma_j^3$ рассматривается аналогичным образом. Рассмотрим точку $\Gamma_i^3\cap\Gamma_j^3$. Γ_1^3 и $\Gamma_j^3\in C^2$. На Γ_i^3 матрица β неособая, $N(x)$ кусочно-гладко и одномерно. Тогда точка $\Gamma_i^3\cap\Gamma_j^3$ удовлетворяет условиям о совпадении слабого и сильного решения (см. в [3] аналогичный результат для операторов второго порядка).

Так как функция $b(x, y)$ ограниченная и $|m(y|\leqq K_1|y|$, $|k(x)|\leqq K_1|x|$, то элементы матриц A_1, A_2 возрастают не быстрее, чем $r(x, y)$. Следовательно, все условия леммы 1 выполнены. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Пусть граница области $S=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ (рис. 2). Кривая Γ_0 находится в области $\{x>0,\ y>0\}$, и на ней $n_1, n_2>0$. Γ_1 и Γ_3 — характеристики уравнения $(xu_x)_x+(yu_y)_y=f(x,\ y)$. Γ_2 — характеристика этого уравнения через $(0,\ 0)$. В этом случае условия (4) имеют вид $n_1u_2-n_2u_1=0$ на Γ_0, $u\sim$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$. Действительно, на Γ_0 имеем $N>0$, $bn_1+n_2>0$, т. е. $\Gamma_0\subset S_0$. На Γ_2 имеем $H=0$, $bn_1+n_2<0$, т. е. $\Gamma_2\subset S_\smile$. На Γ_1 имеем $H=0$, $bn_1+n_2=n_2-b_1n_2\sqrt{y}/\sqrt{-x}=-n_2(x+b_1^2y)/\sqrt{-x}(\sqrt{-x}+b_1\sqrt{y})<0$, т. е. $\Gamma_1\subset S_\smile$. На Γ_3 имеем $H=0$, $bn_1+n_2=n_2-b_2\sqrt{-y}/\sqrt{x}=n_2(x+b_2^2y/\sqrt{x}(\sqrt{x}+b_2\sqrt{-y})<0$, т. е. $\Gamma_3\subset S_\smile$.

Пример 2. Пусть граница области $S=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Gamma_2$ (рис. 3). $\Lambda_1=\{y=-1/x,\ -\sqrt{b_1}<x_1\leqq x<0,\ y\geqq y_0\}$, где $y_0=-1/x_1$ и на Λ_1 выполняется неравенство $k+mx^4\leqq 0$. Γ_2 — характеристика через $(0, 0)$ с концами (x_1, y_1), (x_2, y_2). $\Lambda_2=\{x=x_1,\ y_1\leqq y\leqq y_0\}$. $\Lambda_3=\{y=F(x),\ x\geqq x_2\}$ и пусть $k(F')^2+m>0$, $F'\geqq 1/b$ на Λ_3. Пусть выполняется условие (P) для уравнения (1). Тогда условия (4) имеют вид $n_1u_2-n_2u_1=0$ на Λ_3, $u\sim$ на $\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Gamma_2$. Действительно, на Λ_1 имеем $n_1=-n_2/x^2<0$, $bn_1+n_2=n_2(x^2-b_1)/x^2<0$, $kn_1^2+mn_2^2$

$=n_2^2(k+mx^4)/x^4\geq 0$, т. е. $\Lambda_1\subset S_-$. На Λ_2 имеем $n_1=-1$, $n_2=0$, $bn_1+n_2=-b_1<0$, $H=k<0$, т. е. $\Lambda_2\subset S_-$. Очевидно $\Gamma'_2\subset S_-$. На Λ_3 имеем $bn_1+n_2\geq 0$, так как $F'=-n_1/n_2\geq 1/b$ и $n_2<0$, $H=n_2^2[k(F')^2+m]>0$, т. е. $\Lambda_3=S_0$.

3. Теорема вложения. Рассмотрим неограниченной область $D\subset R^*$. Предположим, что

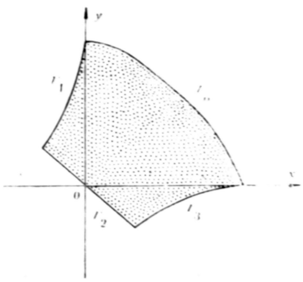

Рис. 2

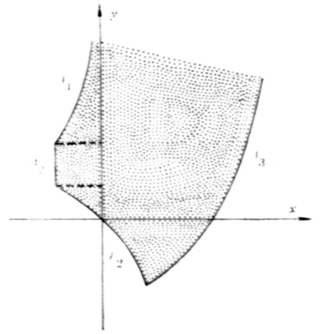

Рис. 3

в1. Область D можно записать в виде $\bar{D}=\{x_1\leq x\leq x_2,\quad y_-(x)\leq y\leq y_+(x)\}$ и в виде $\bar{D}=\{y_1\leq y\leq y_2,\ x_-(y)\leq x\leq x_+(y)\}$.

в2. $S=S^0\cup S^1$; $S_0\neq\varnothing$; $(0,\ 0)\notin S^0$.

в3. S^1 — связная, $S^1\subset\{(x, y):\ xy\leq 0\}$, $S^1\cap\{n_2>0\}\subset\{(x, y):\ x\leq 0,\ y\geq 0\}$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть область D удовлетворяет условиям в1—в3 и ограниченная область G содержится в D. Тогда существуют ограниченная область $G'\subset D$ и постоянная $c\ (G')$ такие, что для всех функций $u\in C^1(\bar{D})$ выполнена оценка*

$$\left\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\|_{L_2(G)}\leq c_0(\|u_x\|_{L_2(G')}+\|u_y\|_{L_2(G')})+c(G')\max_{S^0\cap G'}|u|. \tag{5}$$

Здесь постоянная c_0 зависит только от D. Если $\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|_{L_2(D)}<\infty$, постоянная c тоже зависит только от D, а в противном случае $c(G')$ возрастает как $\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|_{L_2(G')}$.

Следствие. *Для всех функций $u\in C^1(\bar{D})$, $u=0$ на S^0, выполняется оценка*

$$\left\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\|_{L_2(D)}\leq c_0(\|u_x\|_{L_2(D)}+\|u_y\|_{L_2(D)}). \tag{6}$$

Отметим, что в работе [2] эта теорема доказана при следующих предположениях:

01. Область D можно записать в виде $\bar{D}=\{x_1\leq x\leq x_2,\ \ y(x)\geq y\geq Y(x)\}$, где $-\infty\geq x_1<x_2\leq+\infty$.

02. Если $Y(x)=\infty$, то S^0 содержит неограниченную связную часть. Если $Y(x)\neq\infty$, предполагаем, что множество тех точек $(x, Y(x))\in S^1$, для которых $(x, y(x))\in S^1$, является ограниченным.

03. Существует постоянная $q>0$ такая, что $D\subset\{y\geq 0\}\cup\{y<0,\ |y|\leq q|x|+q\}$; $S^1\subset\{|y|\leq q|x|+q\}$. В примере 2 из п. 2 условия в1—в3 выполняются, однако условия 02—03 не выполняются, так как множество точек $(x, y_+(x))\in S^1$, для которых $(x, y_-(x))\in S^1$, неограничено (здесь $S^1=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Gamma_2$, $S^0=\Lambda_3$) и, кроме того, $S^1\not\subset\{|y|\leq p|x|+p\}$ для никакого p.

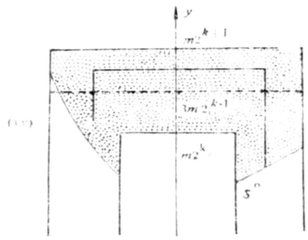

Рис. 4

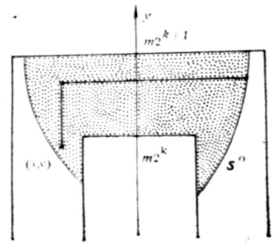

Рис. 5

Доказательство теоремы 2. Покажем, что существует постоянная $q>0$, такая, что $D\subset\{y\geq 0\}\cup\{x\geq 0,\ y<0,\ y\geq -qx-q\}$. Действительно, так как $D\subset R^*$, имеем

$D\subset\{y\geq 0\}\cup\{0\leq x\leq x_2,\ y<0,\ y\geq -p_2x\}\cup\{x>x_2,\ y<0,\ y\geq -p_3x+(p_3x_2+y_2)\}$. Если $p_3\geq p_2$, то $q=p_3$; если $p_3<p_2$, то $q=p_2$; т. е. $q=\max(p_2, p_3)$. Обозначим

$$\Pi_0=\{|x|\leq 2^{k_0},\ |y|\leq m\,2^{k_0}\},\ \text{где } k_0 \text{ — естественно число};$$

$$\Pi_k=\{|x|\leq 2^{k+1},\ |y|\leq m\,2^{k+1}\}\diagdown\{|x|\leq 2^k,\ |y|\leq m\,2^k\}\ (\text{для } k\geq k_0);$$

$D_k=D\cap\Pi_k$, где $m=\max(2, 4q)$. Ясно, что $D_k\subset\{y>-m\,2^k\}$.

Рассмотрим 2 случая: I. $y_+(x)\equiv+\infty$; II. $y_+(x)\not\equiv+\infty$.

В первом случае $S_0\neq\emptyset$, а S^1 — связная. Без ограничения общности можно предполагать, что $(x, y_-(x))\in S^0$ для $x\geq x_0>0$. Пусть k_0 — число, такое, что $x_0<2^{k_0}$. Далее рассмотрим только случаи $k\geq k_0$. Имеем 3 подслучая:

Iа. $\{3m\,2^{k-1}\leq y\leq m\,2^{k+1},\ \tilde{x}_-(y)\leq x\leq 2^{k+1}\}\subset D$, где $\tilde{x}_-(y)=\max(x_-(y), -2^{k+1})$.

Iб. $\{3m\,2^{k-1}\leq y\leq m\,2^{k+1},\ \tilde{x}_-(y)\leq x\leq x_+(y)\}D$.

Iв. Существует $\theta=\theta(k)$, $1<\theta<4/3$, где θ — наименьшее число, для которого $\{3m\,2^{k-1}\theta\leq y\leq m\,2^{k+1},\ \tilde{x}_-(y)\leq x\leq 2^{k+1}\}\subset D$.

Рассмотрим Iа. Пусть $\varphi(y)$ и $\varkappa(x)$ — линейные функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(-m2^k)=3m2^{k-1}$, $\varphi(m2^{k+1})=m2^{k+1}$, $\varkappa(-2^{k+1})=2^k$, $\varkappa(2^{k+1})=2^{k+1}$. Тогда они имеют вид $\varphi(y)=y/6+c_1$, $\varkappa(x)=x/4+c_2$, где $c_1=5m2^k/3$, $c_2=3.2^{k-1}$. Для $(x, y)\in D_k$ имеем (рис. 4)

$$(\mathrm{A1})\quad u(x,y)=\int_{\varphi(y)}^{y}u_y(x,t)dt+\int_{\varkappa(x)}^{x}u_x(t,\varphi(y))dt+\int_{y_-(\varkappa(x))}^{\varphi(y)}u_y(\varkappa(x),t)dt+u(\varkappa(x), y_-\varkappa(x))),$$

где $(\varkappa(x),\ y_-(\varkappa(x)))\in S^0$. Получаем следующие оценки:

$$\Big\|\int_{\varkappa(x)}^{x}u_x(t,\varphi(y))dt\Big\|^2_{L_2(D_k)}=6\int_{3m2^{k-1}}^{m2^{k+1}}\int_{x_-(\varphi^{-1}(\alpha))}^{2^{k+1}}\Big(\int_{x}^{\varkappa(x)}u_x(t,\alpha)dt\Big)^2dxd\alpha$$

$$\leqq 6 \cdot 2^{2(k+2)} \int_{3m2^{k-1}}^{m2^{k+1}} \int_{x_-(\alpha)}^{2^{k+1}} (u_x(t, \alpha))^2 dt d\alpha \leqq 6 \cdot 2^{2(k+2)} \|u_x\|^2_{L_2(D_k)};$$

$$\left\| \int_{y_-(\varkappa(x))}^{\varphi(y)} u_y(\varkappa(x), t) dt \right\|^2_{L_2(D_k)} \leqq 4(m2^{k+2})^2 \|u_y\|^2_{L_2(D_k)};$$

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_k)} \leqq \frac{(3m2^{k+2})^2}{\min\limits_{\Pi_k}(1+x^2+y^2)} \left[\|u_x\|^2_{L_2(D_k)} + \|u_y\|^2_{L_2(D_3)}\right.$$

$$\left. + 2\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|^2_{L_2(D_k)} \cdot \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2.\right.$$

Так как в Π_k имеет место неравенство $1+x^2+y^2 \geqq 2^{2k}$, получаем

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_k)} \leqq (12m)^2 (\|u_x\|^2_{L_2(D_k)} + \|u_y\|^2_{L_2(D_k)}) \tag{7}$$

$$+ 2\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|^2_{L_2(D_k)} \cdot \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2.$$

В случае Iб имеет место представление (рис. 5)

$$u(x, y) = \int_{\varphi(y)}^{y} u_y(x, t) dt + \int_{x_+(\varphi(y))}^{x} u_x(t, \varphi(y)) dt + u(x_+(\varphi(y)), \varphi(y)), \tag{A2}$$

где $(x_+(\varphi(y)), \varphi(y)) \in S^0$. Отсюда, как и выше, получаем (7).

Рассмотрим Iв. Обозначим $\bar{y} = 3m2^{k-1}\theta$ $(1 < \theta < 4/3)$. Запишем D_k в виде $D_k = D_{k1} \cup D_{k2}$, где $D_{k1} = D_k \cap \{y \geqq \bar{y}\}$, $D_{k2} = D_k \cap \{y < \bar{y}\}$. Пусть $\varphi_\theta(y)$ — линейная функция, такая, что $\varphi_\theta(-m2^k) = m2^k$, $\varphi_\theta(3m2^{k-1}\theta) = 3m2^{k-1}\theta$. Тогда она имеет вид $\varphi_\theta(y) = (3\theta-2)/(3\theta+2) + c_3$, где $c_3 = 12m2^{k-1}\theta/(3\theta+2)$.
Для $(x, y) \in D_{k1}$ получаем (рис. 6)

$$u(x, y) = \int_{\varkappa(x)}^{x} u_x(t, y) dt + \int_{y_-(\varkappa(x))}^{y} u_y(\varkappa(x), t) dt + u(\varkappa(x), y_-(x(x))), \tag{A3}$$

где $(\varkappa(x), y_-(\varkappa(x))) \in S^0$.
Для $(x, y) \in D_{k2}$ получаем

$$u(x, y) = \int_{\varphi_\theta(y)}^{y} u_y(x, t) dt + \int_{x_+(\varphi_\theta(y))}^{x} u_x(t, \varphi_\theta(y)) dt + u(x_+(\varphi_\theta(y)), \varphi_\theta(y)), \tag{A4}$$

где $(x_+(\varphi_\theta(y)), \varphi_\theta(y)) \in S^0$. Так как $(3\theta+2)/(3\theta-2) < 6$, то

$$\left\| \int_{x_+(\varphi_\theta(y))}^{x} u_x(t, \varphi_\theta(y)) dt \right\|^2_{L_2(D_{k2})} \leqq 6 \cdot 2^{2(k+2)} \|u_x\|^2_{L_2(D_{k2})}.$$

Из

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_k)} = \left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_{k1})} + \left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_{k2})}$$

получаем оценку (7).

Рассмотрим случай, когда $y_+(x) \not\equiv +\infty$. Имеем 3 подслучая:

IIа. $S^1 \cap \{n_2 > 0\} = \varnothing$.

IIб. $S^1 \cap \{n_2 > 0\} \neq \varnothing$ и ограниченна.

IIв. $S^1 \cap \{n_2 > 0 \neq \varnothing$ и неограниченна.

В случае IIa имеем $(x, y_+(x)) \in S^0$ для x, такое, что $y_+(x) < +\infty$. Обозначим через Γ множество тех точек $\{(x, y):\ y = y_+(x),$ где $y_+(x) < \infty\}$. Кривая Γ имеет один вид: а) односвязная монотонная кривая; б) две односвязных монотоных кривых (одна — возрастающая, другая — убывающая); в) односвяз-

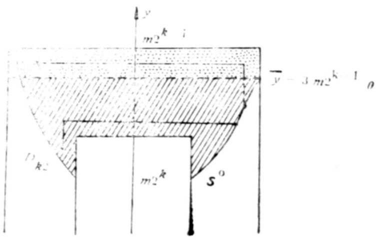

Рис. 6

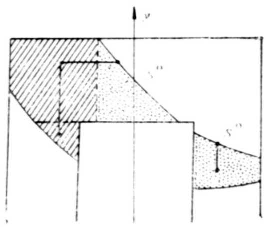

Рис. 7

ная кривая: возрастающая для $x \leq \bar{x}$ и убывающая для $x > \bar{x}$, причем $y_+(\bar{x}) < +\infty$.

Рассмотрим первый случай, например, когда Γ — убывающая. Выбираем k_0 так, что в Π_0 находится одна часть кривой Γ. Покажем, что для $k \geq k_0$ выполнено $\Gamma \cap \{2^k \leq x \leq 2^{k+1},\ m2^k \leq y \leq m2^{k+1}\} = \emptyset$. Действительно, для $k \geq k_0$ имеем $y_+(2^k) < y_+(2^{k_0}) < m2^{k_0} < m2^k$, отсюда следует, что в области $\{2^k \leq x \leq 2^{k+1},\ m2^k \leq y \leq m2^{k+1}\}$ не находится часть Γ. Запишем D_k в виде $D_k = (y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Рассмотрим множество тех точек, для которых существует точка $(x, y) \in D_k$. Это множество можно представить конечным объединением сегментов двух видов: а) такие, для которых выполнено $(x, y_2(x)) = (x, y_+(x)) \in S^0$, $\forall x \in \Delta x_i$; б) такие, для которых выполнено $y_2(x) = m2^{k+1}$, $\forall x \in \Delta x_i$. Из свойства кривой Γ следует, что для Δx_i второго вида имеем $\{m2^k \leq y \leq m2^{k+1},\ \hat{x}_-(y) \leq x \leq x_+(y)\} \subset D_k$, где $\hat{x}_-(y) = \max(-2^{k+1}, x_-(y)), (x_+(y), y) \in S_0$. Обозначим $V_i = \{(x, y):\ x \in \Delta x_i,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Для $(x, y) \in V_i$ первого вида получаем (рис. 7)

$$u(x, y) = \int_{y_+(x)}^{y} u_y(x, t)\,dt + u(x, y_+(x)), \tag{A5}$$

где $(x, y_+(x)) \in S_0$. Имеем

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(V_i)} \leq 2(4m)^2 \|u_y\|^2_{L_2(V_i)} + 2\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|^2_{L_2(V_i)} \cdot \max_{S^0 \cap V_i} |u|^2.$$

Для $(x, y) \in V_i$ второго вида получаем представление (A4) с $\varphi_\theta = \varphi_{4/3}$

$$u(x, y) = \int_{\varphi_{4/3}(y)}^{y} u_y(x, t)\,dt + \int_{x_+(\varphi_{4/3}(y))}^{x} u_x(t, \varphi_{4/3}(y))\,dt + u(x_+(\varphi_{4/3}(y)),\ \varphi_{4/3}(y)),$$

где $(x_+(\varphi_{4/3}(y)),\ \varphi_{4/3}(y)) \in S^0$. Имеем

$$\left\| \int_{x_+(\varphi_{4/3}(y))}^{x} u_x(t, \varphi_{4/3}(y))\,dt \right\|^2_{L_2(V_i)} \leq 3\Delta x_i 2^{k+2} \|u_x\|^2_{L_2(D_k)}.$$

Таким образом получаем

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_k)} = \sum_i \left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(V_i)}$$

$$\leqq 3(4m)^2 \sum_i \|u_y\|^2_{L_2(V_i)} + 12 \cdot 2^{-k} \|u_x\|^2_{L_2(D_k)} \cdot \sum_i \Delta x_i + \sum_i \|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|^2_{L_2(V_i)} \cdot 2 \max_{S_0 \cap D_k} |u|^2,$$

откуда получаем (7).

Случай б) из IIа рассматривается как комбинация двух случаев а).

В случае в) из IIа рассматривается дополнительно следующее.

Выбираем k_0, такое, что в Π_0 содержится точка $(\bar{x}, y_+(\bar{x}))$. Тогда для $k \geqq k_0$ в D_k содержатся только подобласти первого вида.

Рассмотрим случай IIб. Так как $S^1 \cap \{n_2 > 0\}$ ограниченная, выбираем k_0, такое, что $S^1 \cap \{n_2 > 0\} \subset \Pi_0$. Для $k \geqq k_0$ и x такое, что $y_+(x) < +\infty$, имеем $(x, y_+(x)) \cap \bar{D}_k \in S^0$. Неравенство (7) получается также как в случае IIа.

Рассмотрим IIв. Без ограничения общности можно предполагать, что кривая $S^1 \cap \{n_2 > 0\}$ возрастающая. Обозначим

$$\{y = y_+(x)\} = \{y = y_{+1}(x)\} \cup \{y = y_{+2}(x)\}, \text{ где } \{y = y_{+1}(x)\} = S^1 \cap \{n_2 > 0\}, \ \{y = y_{+2}(x)\} = \{y = y_+(x)\} \setminus \{y = y_{+1}(x).$$

Если $y_{+2}(x) = \infty$, аналогичным образом следует, что существует x_0, такое, что $(x, y_-(x)) \in S^0$ для $x \geqq x_0$. Выбираем k_0, такое, что $2^{k_0} > x$ и для $k \geqq k_0$ имеем $D_k \subset \Pi_k \cap \{x \geqq -2^k\}$ (рис. 8). Тогда $\{m2^k \leqq y \leqq m2^{k+1}, \ x_-(y) \leqq x \leqq \tilde{x}_+(y)\} \subset D_k$, где $\tilde{x}_+(y) = \min(x_+(y), 2^{k+1})$. В этом случае используем представления (A3), (A4) с $\varphi_\theta(y) = y$.

Если $y_{+2}(x) \neq \infty$, то $\gamma = \{y = y_{+2}(x) : y_{+2}(x) < +\infty\}$ — убывающая кривая и, кроме того, $\gamma \subset S^0$. Выбираем k_0, такое, что для $k \geqq k_0$: а) $D_k \subset \Pi_k \cap \{x \geqq -2^k\}$ и б) в области $\{2^k \leqq x \leqq 2^{k+1}, \ m2^k \leqq y \leqq m2^{k+1}\}$ не находится часть из γ. Запишем D_k в виде $D_k = D_{k1} \cup D_{k2}$, где $D_{k1} = \{m2^k \leqq y \leqq m2^{k+1}, \ x_-(y) \leqq x \leqq x_+(y) \leqq 2^k\}$, $D_{k2} = \{2^k \leqq x \leqq 2^{k+1}, \ y_-(x) \leqq y \leqq y_+(x)\}$; здесь $(x_-(y), y) \in S^1$,

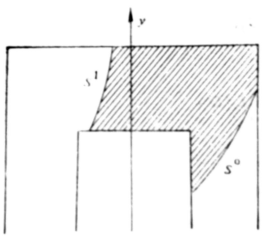

Рис. 8

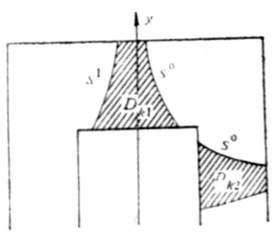

Рис. 9

$(x_+(y), y) \in S^0$, $(x, y_+(x)) \in S^0$, D_{k2} может быть пустое (рис. 9). Получаем представление (A4) для $(x, y) \in D_{k1}$ (с $\varphi_\theta(y) = 0$) и представление (A5) для $(x, y) \in D_{k2}$. Из этих представлений, как и выше, получаем оценку (7).

Таким образом, в случаях $y_+(x) = +\infty$ и $y_+(x) \neq +\infty$ имеет место оценка (7) для $k \geqq k_0$.

Рассмотрим область $D_0 = D \cap \Pi_0$. Граница ∂D_0 содержит некоторый кусок из S_0. Тогда неравенство Пуанкаре для области D_0 дает

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|^2_{L_2(D_0)} \leq c_1\Big(\|u_x\|^2_{L_2(D_0)} + \|u_y\|^2_{L_2(D_0)} + \max_{S^0 \cap \Pi_0} |u|^2\Big). \tag{8}$$

Пусть G — ограниченная подобласть из D. Тогда можно найти столь большое число N, что $G \subset G' = D_0 \cup [\cup_{k_0}^{N} D_k)$. Из (7) и (8) получаем (5). Теорема 2 доказана.

4. Теорема единственности. Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1), соответствующую задаче А.

Задача В. *Найти в D решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям:*

$$u=0 \text{ на } S_0;\ u=\partial u/\partial n=0 \text{ на } S_{00};\ bu_x+u_y=0 \text{ на } S'. \tag{9}$$

Обозначим через W гильбертово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u/\sqrt{1+x^2+y^2}\|_{L_2(D)}.$$

Определение 3. *Функция $u(x, y)$ называется сильным решением задачи* В, *если существует последовательность функций $u_k \in C^2(\bar{D})$, которые удовлетворяют условиям* (9), *их носители ограничены и $\|u_k-u\|_W \to 0$, $\|Lu_k/f\|_{L_2(D)} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Рассматривая задачу В, будем предполагать, что $S^0 = S_0 \cup S_{00}$, $S^1 = S_{\smile}$, $S' = \varnothing$.

Теорема 3. *Пусть область $D \subset R^*$ удовлетворяет условиям* в1—в3. *Тогда задача* В *может иметь не более одного сильного решения и выполняется оценка*

$$\|u\|_W + \|u_x\|_{L_2(D)} + \|u_y\|_{L_2(D)} \leq c\|Lu\|_{L_2(D)}, \tag{10}$$

для всех функций $u \in C^2(\bar{D})$ с ограниченными носителями, удовлетворяющими граничным условиям (9).

Доказательство. Если функция $u \in C^2(\bar{D})$ удовлетворяет условиям (9) и ее носитель ограниченный, то $\hat{u} = (u_x, u_y)$ удовлетворяет условиям (4) задачи А, и $\|\hat{u}\|_{L_2(D)} \leq c\|\widehat{Lu}\|_{L_2(D)}$. Так как функция $b(x, y)$ ограниченная, отсюда получаем

$$\|u_x\|_{L_2(D)} + \|u_y\|_{L_2(D)} \leq c\|Lu\|_{L_2(D)}. \tag{11}$$

Из теоремы 2 получаем

$$\|u\|_W \leq c_0\big(\|u_x\|_{L_2(D)} + \|u_y\|_{L_2(D)}\big). \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем (10). Теорема 3 доказана.

Замечание. Отметим, что два последние условия из в3 автоматически выполнены. Действительно, рассмотрим $D \subset R^* \subset R \setminus \{x<0,\ y<0\}$. В области $\{x>0,\ y>0\}$ имеем $H = kn_1^2 + mn_2^2 > 0$. Т. е. $S_{\smile} \subset \{(x, y): xy \leq 0\}$; на $S_{\smile}$, если $n_2 > 0$, то $n_1 < 0$. Допустим, что часть из $S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\}$ содержится в $\{x \geq 0,\ y \leq 0\}$. Имеем $-n_1 > n_2/b_2 > 0$, или $n_1^2 > n_2^2/b_2^2$. Таким образом $H = kn_1^2 + mn_2^2 > n_2^2(k + b_2^2 m)/b_2^2 > 0$, что невозможно. Т. е. $S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\} \subset \{(x, y): x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

Выражаю благодарность Г. Д. Каратопраклиеву и Н. И. Попиванову за внимание к этой работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Попиванов. Совпадение слабого и сильного решений краевых задач для линейных систем первого порядка. *Сердика*, **1**, 1975, 121-132.
2. Н. И. Попиванов. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в неограниченных областях. I. Теорема вложения. Теорема единственности. *Дифф. уравнения*, **14**, 1978, 304-317.
3. Н. И. Попиванов. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в неограниченных областях. II. Существование сильного решения. *Дифф. уравнения*, **14**, 1978, 665-679.
4. Фан Дык Чау. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения в ограниченных областях. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 599—562.
5. Фан Дык Чау. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения в неограниченных областях. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1317—1320.
6. K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **11**, 1958, 333-418.
7. P. D. Lax, R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operator. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **13**, 1960, 427-455.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 6. 1980