# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# ШЕЙП КОМПАКТНЫХ ГРУПП

ГЕНЧО С. СКОРДЕВ

Пусть $G_0$ — компактная, связная группа Ли. Группа $G$ называется $G_0$-группой, если существует проективная система $\underline{G}=\{G_0, p(k+1, k), k\in N\}$ такая, что: а) $G=\varprojlim \underline{G}$, б) $p(k+1, k)$ — эпиморфизмы. Пусть $T$ — компонента связности центра $G$, содержащая единицу $G$. В настоящей работе для $G_0$-групп доказано, что:

1. $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ только в том случае, когда $\mathrm{Sh}(T)=\mathrm{Sh}(T')$.

2. $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ тогда и только тогда, когда $H^1(G, Z)=H^1(G', Z)$.

Здесь $\mathrm{Sh}(X)$ — шейп пространства $X$, $H^1(X, Z)$ — когомологии Александрова — Чеха с целыми коэффициентами.

Далее, пусть $U(n)$ — группа всех унитарных $(n\times n)$-матриц, $G$ — $U(n)$-группа и $\underline{G}=\{U(n); p(k+1, k), k\in N\}$ — проективная система, в которой $p(k+1, k)$ — эпиморфизмы и $G=\varprojlim \underline{G}$. Пусть $\deg p(k+1, k)=a_k$ и $A=\{a_1, a_2, \dots\}$. Тогда группа $G$ называется $(U(n), A)$-группой. Для таких групп доказываем следующие утверждения:

3. Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа, а $G'$ — $(U(n), B)$-группа. $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ тогда и только тогда, когда $A$ и $B$ эквивалентны в смысле Кука (1967).

4. Пусть $G$ и $G'$ — $U(n)$-группы. $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ тогда и только тогда, когда существуют эпиморфизмы $f: G\longrightarrow G'$, $g: G\longrightarrow G'$.

5. Пусть $G$ и $G'$ — $U(n)$-группы. Пространства $G$ и $G'$ квазигомеоморфны тогда и только тогда, когда топологические группы $G$ и $G'$ изоморфны.

**1. $G_0$-группы.** Пусть $G_0$ — компактная, связная группа Ли, а $T^l$ — компонента связности ее центра. Будем предполагать, что $l\geqq 1$.

Группу $G$ назовем $G_0$-группой, если $G$ есть проективный предел $\varprojlim \underline{G}$ проективной системы

$$\underline{G}=\{G_0, p(k+1, k), k\in N\}, \tag{1.1}$$

где $p(k+1, k)\colon G_0\longrightarrow G_0$ — эпиморфизм, а $N$ — множество натуральных чисел Заметим, что в этом случае отображение $p(k+1, k)$ — конечно-листное, регулярное накрытие.

Проективную систему $\underline{G}$ будем называть спектром Ли группы $G$. Рассмотрим группу $G_0$. Из [9] знаем, что существует компактная, односвязная и полупростая группа Ли $\widehat{G}_0$ и эпиморфизм $\pi\colon \widehat{G}_0\times T^l\longrightarrow G_0$, такие, что ядро гомоморфизма $\pi$ имеет вид $\mathrm{Ker}\,\pi=\{(x, y)\in\widehat{G}_0\times T^l \mid x\in K, y=\varphi(x)\}$, где $K$ — подгруппа центра группы $\widehat{G}_0$, а $\varphi\colon K\longrightarrow T^l$ — некий гомоморфизм. Будем обозначать ядро $\mathrm{Ker}\,\pi$ гомоморфизма $\pi$ через $(K, \varphi)$.

Лемма 1.1. *Пусть $G$ является $G_0$-группой. Тогда $G$ есть фактор-группа группы $\widehat{G}_0\times T$ по подгруппе $\mathrm{Ker}\,\widehat{\pi}$, где:*

1. *$T$ — $l$-мерная, компактная, связная, абелева группа ($T$ есть проективный предел проективной системы $\underline{T}=\{T^l, p(k+1, k)(T), k\in N\}$, где $p(k, k+1)(T)\colon T^l\longrightarrow T^l$ — эпиморфизм);*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 123—142.

2. $\operatorname{Ker}\widehat{\pi}=\{(x,\ y)\in\widehat{G}_0\times T\mid x\in K,\ y=\widehat{\varphi}(x)\}$, *где* $K$ *— данная подгруппа центра* $\widehat{G}_0$, *а* $\widehat{\varphi}$ *— гомоморфизм* $K$ *в* $T$ *такой, что* $p_k(T)\widehat{\varphi}=\varphi$ *для любого* $k\in N$ *(здесь* $p_k(T)\colon T\longrightarrow T^l$ *— естественная проекция).*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $p(k+1,\ k)\colon G_0\longrightarrow G_0$. Так как $p(k+1,\ k)$ — конечнолистное накрытие, то ядро $\operatorname{Ker}p(k+1,\ k)$ — конечная группа, лежащая в центре группы $G_0$. Следовательно, $\pi^{-1}$ $(\operatorname{Ker}p(k+1,\ k))$ — конечная, абелевая подгруппа группы $\widehat{G}_0\times T^l$.

Пусть $\Gamma_k=\{(1,\ x)\in\pi^{-1}(\operatorname{Ker}p(k+1,k))\}$ (1 — единица группы $\widehat{G}_0$). Через $\Gamma'_k$ обозначим $\Gamma'_k=\{x\in T^l\mid(1,\ x)\in\Gamma_k\}$.

Пусть $f_k\colon T^l\longrightarrow T^l$ — такой локальный изоморфизм, что $\operatorname{Ker}f_k=\Gamma'_k$. Положим $\widehat{f}_k=\mathrm{id}\times f_k$ $(\widehat{f}_k\colon\widehat{G}_0\times T^l\longrightarrow\widehat{G}_0\times T^l)$.

Через $L_k$ обозначим группу $\widehat{f}_k$ $(\pi^{-1}(\operatorname{Ker}p(k+1,\ k)))$ — это конечная, абелева группа в $\widehat{G}_0\times T^l$.

Непосредственно проверяется ,что факторгруппа группы $\widehat{G}_0\times T^l$ по подгруппе $L_k$ изоморфна группе $G_0$. Пусть $M_k=\{x\in\widehat{G}_0\mid$, для которых существует $y\in T^l$ такое, что $(x,\ y)\in L_k\}$. Это подгруппа центра $\widehat{G}_0$. Легко убедиться, что следующее определение отображения $\psi_k\colon M_k\longrightarrow T^l$ корректно: для $x\in M_k$ пусть $\psi_k(x)$ — такой элемент $T^l$, что $(x,\ \psi_k(x))\in L_k$.

Непосредственно из определений получается, что группа $L_k$ есть $(M_k$ $\psi_k)$-группа. Так как $G_0$ — фактор $\widehat{G}_0\times T^l$ по подгруппе $(K,\ \varphi)$, то $(M_k,\ \psi_k)$ и $(K,\ \varphi)$ эквивалентны в смысле П. Баума [9], т. е. существуют такие автоморфизмы $\alpha_k\colon\widehat{G}_0\longrightarrow\widehat{G}_0$ и $\beta_k\colon T^l\longrightarrow T^l$, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\widehat{G}_0 \arrow[d, "\alpha_k"'] & M_k \arrow[l, "i_k"'] \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\alpha_k\mid M_k"] & T^l \arrow[d, "\beta_k"] \\
\widehat{G}_0 & K \arrow[l, "i_k"'] \arrow[r, "\varphi"] & T^l
\end{tikzcd}$$

Здесь $i_k$ и $j_k$ — тождественные вложения, а $\alpha_k\mid M_k$ — ограничение гомоморфизма $\alpha_k$.

Положим $\tilde{f}_k=(\alpha_k,\ \beta_k)\widehat{f}_k$, т. е. для $(x,\ y)\in\widehat{G}_0\times T^l$ имеем $\tilde{f}_k(x,\ y)=(\alpha_k(x),$ $\beta_k\ f_k(y))$ $(\tilde{f}_k\colon\widehat{G}_0\times T^l\longrightarrow\widehat{G}_0\times T^l)$. Заметим, что если $(a,\ b)\in(K,\ \varphi)$, то $\tilde{f}_k(a,b)$ $=(a,\ b)$.

Теперь можем сказать, что имеем $p(k+1,\ k)(x)=\pi\tilde{f}_k\pi(y,z)$, где $\pi(y,z)=x$, $x\in G_0$, $(y,\ z)\in\widehat{G}_0\times T^l$.

Другими словами, имеем коммутативную диаграмму

(1.2)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{G}_0\times T^l \arrow[r, "\tilde{f}_k"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{G}_0\times T^l \arrow[d, "\pi"] \\
G_0 \arrow[r, "p(k+1,\ k)"] & G_0
\end{tikzcd}$$

Из диаграммы (1.2), переходя к индуктивному пределу, получаем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{G}_0\times T^l \arrow[r, "\tilde{f}(k)"] \arrow[d, "\widehat{\pi}"'] & \widehat{G}_0\times T^l \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "p(k)"] & G_0 \end{tikzcd}$$

Здесь $\tilde{f}(k)=\varprojlim \tilde{f}_k$, $\widehat{\pi}=\varprojlim \pi$.

Так как проективный предел — точный функтор в категории компактных групп, то $\widehat{\pi}$ — эпиморфизм. Так как $p(k+1, k)$ — изоморфизм на $\operatorname{Ker}\pi$, то $\operatorname{Ker}\widehat{\pi}$ изоморфно $\operatorname{Ker}\pi$ (ограничение на $\operatorname{Ker}\widehat{\pi}$ естественной проекции $\tilde{f}(k)$ группы $\widehat{G}_0\times T$ на $\widehat{G}_0\times T^l$ — изоморфизм):

$$\mathrm{id}\times p(k)(T)\,|\operatorname{Ker}\widehat{\pi}:\ \operatorname{Ker}\widehat{\pi}\approx\operatorname{Ker}\pi.$$

Стало быть $\operatorname{Ker}\widehat{\pi}=(K,\widehat{\varphi})$, где $\widehat{\varphi}: K\longrightarrow T$ — гомоморфизм, и при этом имеем $p(k)(T)\widehat{\varphi}=\varphi$. Лемма 1.1 доказана.

Гомоморфизм $\widehat{\pi}$ будем называть каноническим эпиморфизмом (представлением) $G_0$-группы $G$.

Рассмотрим снова $G_0$ и эпиморфизм $\pi$. Гомоморфизмы $\pi_0=\pi\,|\,\widehat{G}_0:\ \widehat{G}_0\longrightarrow G_0$, $\pi_l=\pi\,|\,T^l:\ T^l\longrightarrow G_0$ являются мономорфизмами. Следовательно, группа $\pi_0(\widehat{G}_0)$ $(\pi_l(T^l))$ изоморфна группе $\widehat{G}_0$ $(T^l)$.

Так как группа $\widehat{G}_0$ — компактная, полупростая группа Ли, то она совпадает со своим коммутантом. Отсюда следует, что коммутант группы $G_0$ совпадает с группой $\pi_0(\widehat{G}_0)$ и что $G_0=\pi_0(\widehat{G}_0)\cdot\pi_l(T^l)$, т. е. любой элемент $G_0$ является произведением элемента из $\pi(\widehat{G}_0)$ и элемента из $\pi_l(T^l)$. Рассмотрим гомоморфизм $p(k+1, k)$. Используя (1.2), нетрудно убедиться, что ограничение гомоморфизма $p(k+1, k)$ на коммутант группы $G_0$ есть изоморфизм. Теперь, рассмотрев проективную систему (1.1), заключаем, что коммутант группы $G$ изоморфен коммутанту группы $G_0$ и стало быть изоморфен группе $\widehat{G}_0$, при этом ограничение гомоморфизма $\widehat{\pi}$ на $\widehat{G}_0$ есть изоморфизм. Нетрудно убедиться, что компонента связности центра $G$ изоморфна группе $T$, и что ограничение $\widehat{\pi}$ на $T$ — изоморфизм. Тем самым установлена

Лемма 1.2. *Коммутант группы $G$ изоморфен группе $\widehat{G}_0$, а компонента связности центра $G$ изоморфна $T$. При этом любой элемент группы $G$ есть произведение некоторого элемента коммутанта $G$ и элемента компоненты связности центра $G$.*

Лемма 1.3. *$G/_{[G,\,G]}\approx T$ (здесь $[G, G]$ — коммутант группы $G$).*

Доказательство. Действительно, найдем $G_0/_{[G_0,\,G_0]}$ (здесь $[G_0, G_0]$ — коммутант группы $G_0$). Так как $\pi$ есть эпиморфизм, то группа $G_0/_{[G_0,\,G_0]}$ изоморфна группе $T^l/_{\varphi(K)}$.

Рассмотрим гомоморфизм пар $\beta_k\tilde{f}_k\beta_k^{-1}(T^l, \varphi(K))\longrightarrow(T^l, \varphi(K))$. Знаем, что ограничение $\beta_k f_k\beta^{-1}$ на $\varphi(K)$ есть тождественное отображение.

Гомоморфизм $\beta_k f_k \beta_k^{-1}$ индуцирует гомоморфизм $p(k+1, k)(T)':\ T^l/\varphi(K)\longrightarrow T^l/\varphi(K)$.

Переходя к двойственным группам и изоморфизмам и используя структурные теоремы конечнопорожденных свободных абелевых групп в конечномерных векторных пространствах, непосредственно убеждаемся, что существует такой изоморфизм $\gamma_k$: $T^l - T^l/\varphi(K)$, что выполнено $p(k+1, k)(T) = \gamma_k^{-1} p(k+1, k)(T)'\gamma_k$. Отсюда получаем, что проективная система

$$\{G_0/_{[G_0,\ G_0]},\ p(k+1,\ k)(T)',\quad k\in N\} \tag{1.3}$$

изоморфна проективной системе

$$\{T^l,\ p(k+1,\ k)(T),\quad k\in N\}. \tag{1.4}$$

Так как $G/_{[G,\ G]}$ есть предел проективной системы (1.3), а $T$ — предел проективной системы (1.4), лемма 1.3. доказана.

Следствие 1.4 ([24]). $H^1(G,\ \mathbf{Z})\approx \mathrm{Char}\, T$.

Это следствие известно, но получается легко из следующих изоморфизмов $\mathrm{Char}\, G = \mathrm{Char}\, G/_{[G,\ G]} = \mathrm{Char}\, T = H^1(G/_{[G,\ G]}, \mathbf{Z}) = H^1(G, \mathbf{Z})$, (здесь $H^i(G, \mathbf{Z})$ — $i$-мерные когомологии Александрова — Чеха с целыми коэффициентами), а $\mathrm{Char}\, A$ — группа непрерывных гомоморфизмов группы $A$ в группу комплексных чисел по модулю единицы — группа характеров группы $A$).

Лемма 1.5. *Пусть $G$ и $G'$ — $G_0$-группы, и $T$, $T'$ — компоненты связности их центров. Если* $\mathrm{Sh}(G) = \mathrm{Sh}(G')$, *то топологические группы $T$ и $T'$ изоморфны.*

(О теории шейпов см. [17]).

Доказательство. Так как шейпы групп $G$ и $G'$ совпадают, то целочисленные когомологии Александрова — Чеха этих групп изоморфны, и тогда из следствия 1.4 имеем, что группы $\mathrm{Char}\, T$ и $\mathrm{Char}\, T'$ — тоже изоморфны. Из теоремы двойственности Понтрягина следует, что топологические группы $T$ и $T'$ — изоморфны [1, с. 259, теорема 39].

Пусть $\widehat{\pi}: \widehat{G}_0\times T\longrightarrow G$ и $\widehat{\pi}: \widehat{G}_0\times T'\longrightarrow G'$ — канонические эпиморфизмы и $\mathrm{Ker}\,\widehat{\pi} = (K, \widehat{\varphi})$, $\mathrm{Ker}\,\widehat{\pi}' = (K, \widehat{\varphi}')$.

Пусть

$$T = \varprojlim\{T^l,\ p(k+1,\ k)(T),\quad k\in N\},\ T' = \varprojlim\{T^l,\ p(k+1,\ k)(T'),\quad k\in N\}$$

и

$$p(k,\ T): T\longrightarrow T^l,\ p(k,\ T'): T'\longrightarrow T^l$$

естественные проекции. Напомним, что $p(k,\ T)\widehat{\varphi} = \varphi$ и $p(k,\ T')\widehat{\varphi}' = \varphi$.

Лемма 1.6. *Если $T$ и $T'$ — изоморфные топологические группы, то существует изоморфизм $\alpha: T\longrightarrow T'$, такой, что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\varphi}(K) \arrow[rr] \arrow[dr, "p(k,\ T)"'] & & \widehat{\varphi}'(K) \arrow[dl, "p(k,\ T')"] \\
& \varphi(K) &
\end{tikzcd}$$

Эта лемма получается непосредственно из следующей леммы.

Лемма 1.7. *Пусть $T^l$ — $l$-мерный тор, а $A$ и $B$ — изоморфные конечные подгруппы в нем. Существует изоморфизм $\beta\colon T^l \longrightarrow T^l$, такой что $\beta(A)=B$.*

Эта лемма получается непосредственным применением теории двойственности Понтрягина и структурной теории конечнопорожденных подгрупп в конечномерных векторных пространствах.

Лемма 1.8. *Пусть $T$ и $T'$ — компоненты связности центров $G$ и $G'$. Если $\mathrm{Sh}(T)=\mathrm{Sh}(T')$, то существует изоморфизм $\alpha\colon T\longrightarrow T'$, удовлетворяющий условиям леммы* 1.6.

Это следует из результатов Дж. Кислинга и [20] и леммы 1.6.

Лемма 1.9. *Если $T$ и $T'$ как в лемме* 1.8, *и* $\mathrm{Sh}(T)=\mathrm{Sh}(T')$, *то топологические группы $G$ и $G'$ — изоморфны.*

Доказательство. Из леммы 1.8 знаем, что существует изоморфизм $\alpha\colon T\longrightarrow T'$, удовлетворяющий условиям леммы 1.6. Положим $\widehat{\alpha}=\mathrm{id}\times\alpha$: $\widehat{G}_0\times T\longrightarrow\widehat{G}_0\times T'$. Гомоморфизм $\widehat{\alpha}$ индуцирует изоморфизм $\widetilde{\alpha}\colon G \to G'$.

Из этих лемм получаются непосредственно следующие теоремы.

Теорема 1.10. *Пусть $G$ и $G'$ — $G_0$-группы. Следующие условия для $G$ и $G'$ эквивалентны:*

1. *изоморфные топологические группы;*
2. *гомеоморфные пространства;*
3. *гомотопически эквивалентные пространства;*
4. *имеют один и тот же шейп.*

Теорема 1.11. *Если $G$ и $G'$ — $G_0$-группы, а $T$ и $T'$ — компоненты связности их центров, то* $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sh}(T)=\mathrm{Sh}(T')$.

Теорема 1.12. *Если $G$ и $G'$ — $G_0$-группы, то* $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(G')$ *тогда и только тогда, когда* $H^1(G,\mathbf{Z})\approx H^1(G',\mathbf{Z})$.

**2. $U(n)$-группы — определение.** Определение 2.1 [1, гл. 5, § 31, стр. 225]. *Компактная, связная и конечномерная топологическая группа $G$ называется $U(n)$-группой, если $G$ есть предел проективной системы*

$$\underline{G}=\{U(n),\ p(k+1,k),\quad k\in N\}, \tag{2.1}$$

*где $p(k+1,k)\colon U(n)\longrightarrow U(n)$ — накрытие, а $U(n)$ — унитарная группа.*

Проективную систему (2.1) будем называть спектром Ли группы $G$.

Так как $p(k+1,k)$ — накрытия, а $U(n)$ — компактная группа, то имеем

1. $p(k+1,k)$ — регулярное, конечнолистное накрытие;
2. $p(k+1,k)$ — локальный изоморфизм;
3. ядро гомоморфизма $p(k+1,k)$ — конечная подгруппа $A_k$ в центре $U(n)$, а $p(k+1,k)$ является естественной проекцией [1], гл. 9, § 51]. $U(n)$ на факторгруппу $U(n)/A_k$ (стало быть факторгруппа $U(n)/A_n$ изоморфна группе $U(n)$).

Рассмотрим группу $A_k$. Центр $C_n$ группы $U(n)$ —

$$C_n=\{\lambda I \mid \lambda\in\mathbf{C},\ \lambda\bar{\lambda}=1\} \tag{2.2}$$

(здесь $I$ — единичная матрица, $\mathbf{C}$ — комплексные числа, $\bar{\lambda}$ — комплексно сопряженное $\lambda$).

Всякая конечная подгруппа группы $C_n$ циклична. Следовательно и группа $A_k$ циклична. Пусть $a_k$ ее порядок.

Для удобства циклическую группу порядка $m$ будем обозначать через $\mathbf{Z}(m)$.

Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Определение 2.2. *Если $G$ — предел проективной системы* (2.1), *а $p(k+1, k)$ является $a_k$-листным накрытием, то будем говорить, что группа $G$ есть $(U(n), A)$-группа.*

Пусть $p_k: G \longrightarrow U(n)$ — естественная проекция. Через $H_k$ обозначим ядро гомоморфизма $p_k$. Очевидно $H_{k+1} \subset H_k$ и факторгруппа $G/H_k$ изоморфна группе $U(n)$. Кроме того, так как $p(k+1, k)$ — конечнократное отображение, то группа $H_k$ — вполне несвязная компактная группа и лежит в центре группы $G$.

Легко проверить, что определение 2.1 эквивалентно следующему.

Определение 2.3. *Связная, компактная и конечномерная группа называется $U(n)$-группой, когда в $G$ существует последовательность подгрупп $\{H_k \mid k=1, 2, \ldots\}$, удовлетворяющих:*

1. *$H_k$ — вполне несвязная, компактная подгруппа центра $G$;*
2. *$H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \cdots$;*
3. *факторгруппа $G/H_k$ изоморфна группе $U(n)$;*
4. *$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = e$.*

Положив $p(k+1, k): U(n)/_{H_{k+1}} \longrightarrow U(n)/_{H_k}$ получим, что $U(n)$ будет пределом проективной системы $\{U(n), p(k+1, k), k \in N\}$. Здесь ядром изображения $p(k+1, k)$ является группа $H_k/H_{k+1}$.

Напомним следующий розультат.

Теорема 2.4 [9]. *Если*

$$\Gamma(m)=\{\lambda I \mid \lambda^m=1\}, \tag{2.3}$$

*то факторгруппа $U(n)/_{\Gamma(m)}$ тогда и только тогда изоморфна группе $U(n)$, когда*

$$m \equiv \pm 1 \mod n. \tag{2.4}$$

Теперь ясно, что данная $(U(n), A)$-группа однозначно определяется последовательностью натуральных чисел $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$, удовлетворяющих (2.4).

Для удобства докажем достаточность теоремы 2.4, следуя [9].

**3. Доказательство достаточности теоремы 2.4** [9]. Через $SU(n)$, как обычно, будем обозначать специальную унитарную группу, т. е. $X \in SU(n)$, если $X \in U(n)$ и $\det X=1$. Через $S^1$ будем обозначать группу $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{C}, \lambda\bar{\lambda}=1\}$. Имеем гомоморфизм $\pi$: $SU(n) \times S^1 \longrightarrow U(n)$, где $\pi(X, \lambda)=\lambda X$ (группа $\Gamma(n)$ из (2.3) является центром группы $SU(n)$). Точнее, пусть $\omega=\exp 2\pi i/n$, тогда $\Gamma(n)=\{\omega^k I \mid k=0, 1, \ldots, n-1\}$, [1, гл. 11, § 65, пример 108, стр. 501].

Пусть $m$ — натуральное число, удовлетворяющее (2.4). Проверим, что факторгруппа $U(n)/_{\Gamma(m)}$ изоморфна группе $U(n)$.

Пусть $\Gamma=\pi^{-1}(\Gamma(m))$. Легко проверить, что $\Gamma=\{(\omega^k I, \theta^l \omega^{-k}) \mid k=0, 1, \ldots, n-1, l=0, 1, \ldots, m-1\}$ и что факторгруппа $U(n)/_{\Gamma(m)}$ изоморфна факторгруппе $SU(n) \times S^1/_{\Gamma}$.

Пусть $p(\Gamma)=\{I, \theta^l) \mid l=0, 1, \ldots, m-1\}$.

Через $f_m$ обозначим гомоморфизм $S^1$ в себя:

$$f_m(\lambda)=\begin{cases} \lambda^m & m \equiv 1 \mod n \\ \lambda^{-m} & m \equiv -1 \mod n \end{cases}$$

(ядро $f_m$ — $\operatorname{Ker} f_m=\{\theta^k \mid k=0, 1, \ldots, m-1\}$).

Рассмотрим гомоморфизм

$$\tilde{f}_m = \mathrm{id} \times f_m : SU(n) \times S^1 \longrightarrow SU(n) \times S^1. \tag{3.1}$$

Из (3.1) получаем $\tilde{f}_m(\pi^{-1}(\Gamma(m))) = \{(\omega^k I, \ \omega^{-k}) \mid k = 0, \ 1, \ldots, n-1\}$. Пусть

$$K = \{(\omega^k I \mid k = 0, \ldots, n-1\} \tag{3.2}$$

и $\varphi : K \longrightarrow S^1$, $\varphi(\omega^k I) = \omega^{-k}$.

Тогда, если $(K, \varphi) = \{(g, \varphi(g)) \mid g \in K\}$, то $\tilde{f}_m(\pi^{-1}(\Gamma(m))) = (K, \varphi)$.

С другой стороны, для ядра $\operatorname{Ker} \pi$ гомоморфизма $\pi$ имеем

$$\operatorname{Ker} \pi = \{(\omega^k I, \ \omega^{-k}) \mid k = 0, \ 1, \ldots, n-1\}. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) имеем, что $\operatorname{Ker} \pi = (K, \varphi)$. Следовательно факторгруппа $U(n)/\Gamma(m)$ изоморфна группе $U(n)$.

Дальше будем считать, что для $(U(n), A)$-группы

$$p(k+1, k)(X) = \pi \tilde{f}_m \pi^{-1}(X). \tag{3.4}$$

Пусть $X \in SU(n)$, тогда

$$p(k+1, k)(X) = \pi \tilde{f}_m \pi^{-1}(X) = \pi \tilde{f}_m(\omega^k X, \ \omega^{-k}) = \pi(\omega^k X, \ \omega^{-k}) = X,$$

т. е. имеем

$$p(k+1, k)(X) = X, \text{ для } X \in SU(n). \tag{3.5}$$

Пусть $\lambda I \in C_n$, см. (2.2), тогда $p(k+1, k)(\lambda I) = \pi \tilde{f}_m(I, \ \lambda) = \pi(I, \ f_m(\lambda)) = f_m(\lambda) I$, т. е. имеем

$$p(k+1, \ k)(\lambda I) = f_m(\lambda) I, \text{ для } \lambda I \in C_n. \tag{3.6}$$

**4. Эквивалентные последовательности натуральных чисел.** Определение 4.1 ([10]). *Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — последовательности натуральных чисел. Будем говорить, что $B$ — фактор $A$, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и натуральные числа $i_0$, $s_k$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что для любого $k$ выполнено*

$$a_1 a_2 \ldots a_{m_k} = s_k b_{i_0} b_{i_0+1} \ldots b_{i_0+k}. \tag{4.1}$$

Определение 4.2 ([10]). *Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — последовательности натуральных чисел. Будем говорить, что $A$ и $B$ эквивалентны, если $A$ — фактор $B$ и $B$ — фактор $A$.*

Если $C = \{c_1, \ c_2, \ldots\}$ — последовательность натуральных чисел, то через $\mathsf{Q}(C)$ будем обозначать аддитивную группу рациональных чисел $\{m/\bar{c}_k\}$, где $m$ — целое число, а $\bar{c}_k = c_1 \ldots c_k$. Через $\Sigma(C)$ будем обозначать предел проективной системы

$$\underline{\Sigma}(C) = \{S^1, \ \sigma(k+1, \ k), \quad k \in N\}, \tag{4.2}$$

где $S^1 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathsf{C}, \ \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, $\sigma(k+1, \ k)(\lambda) = \lambda^{c_k}$.

В дальнейшем нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 4.1 ([11]). *Пусть $\underline{\mathsf{Z}}(C) = \{\mathsf{Z}, \ \alpha(k, \ k+1), \ \ k \in N\}$ — индуктивная система, $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — последовательность целых чисел, и $\alpha(k, k+1)(1) = c_k$. Тогда индуктивный предел $\underline{\mathsf{Z}}(C)$ изоморфен группе $\mathsf{Q}(C)$.*

Из леммы 4.1 следует, что справедлива

Лемма 4.2 $H^1(\Sigma(C), \mathsf{Z}) = \mathsf{Q}(C)$.

Другими словами, группы $\Sigma(C)$ и $\mathsf{Q}(C)$ двойственны.

Здесь и в дальнейшем будем использовать только когомологии Александрова — Чеха.

Лемма 4.3. *Пусть $A=\{a_k\}$ и $B=\{b_k\}$ — последовательности натуральных чисел. Последовательности $A$ и $B$ эквивалентны тогда и только тогда, когда группы $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$ изоморфны.*

Эта лемма тоже известна. Ее можно получить следующим образом.

Пусть $A$ и $B$ — эквивалентны. Из теоремы 6 и 9 из [10] следует, что соленоиды $\Sigma(A)$ и $\Sigma(B)$ — гомеоморфны. Так как $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$ — группы характеров $\Sigma(A)$ и $\Sigma(B)$, соответственно, то $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$ изоморфны. Обратно, предположим, что $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$ изоморфны. Так как $\Sigma(A)$ и $\Sigma(B)$ — группы характеров $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$, соответственно, то $\Sigma(A)$ и $\Sigma(B)$ — изоморфные компактные группы. Тогда из [10, теорема 8] получаем, что $A$ и $B$ эквивалентны (см. также [12, теорема 17], [13, § 2] и [14, теор. 1.2]).

Лемма 4.4 *$A$ и $B$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм группы $\mathsf{Q}(A)$ на $\mathsf{Q}(B)$.*

Действительно, из [14] знаем, что если существует эпиморфизм $\mathsf{Q}(A)$ на $\mathsf{Q}(B)$, то эти группы изоморфны.

Рассмотрим $\mathsf{Z}(n) = \{\omega^k \mid k=0, \ldots, n-1,\ \omega = \exp 2\pi i/n\}$. Если $A=\{a_k \mid k=1, 2, \ldots\}$ и $a_k \equiv \pm 1 \bmod n$, то тогда $\sigma(k+1, k)_C = \sigma(k+1, k) \mid \mathsf{Z}(n)$ — изоморфизм группы $\mathsf{Z}(n)$ на себя. Рассмотрим проективную систему $\Gamma_n = \{\mathsf{Z}(n)$ $\sigma(k+1, k)_C,\ k \in N\}$. Предел этого спектра есть подгруппа (обозначим ее через $\Gamma_n(A)$) в $\Sigma(A)$, изоморфная $\mathsf{Z}(n)$. Будем отождествлять $\Gamma_n(A)$ и $\mathsf{Z}(n)$.

Пусть $A=\{a_k \mid k=1, 2, \ldots\}$ и $B=\{b_k \mid k=1, 2, \ldots\}$ удовлетворяют условию (2.4). Группы $\Gamma_n(A)$ и $\Gamma_n(B)$ тождественно изоморфны группе $\mathsf{Z}(n)$.

Лемма 4.5. *Существует изоморфизм $\zeta: \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(B)$ такой, что $\zeta \mid \Gamma_n(A)$ — тождественный изоморфизм $\Gamma_n(A)$ на $\Gamma_n(B)$.*

Доказательство (следуем [10]). Пусть $\{n_k \mid k=1, 2, \ldots\}$, $i_0$ и $s_k$ такие натуральные числа, что выполнено (4.1). Через $\zeta_k$ обозначим отображение $S^1$ в $S^1$, где $\zeta_k(z) = z^{\varepsilon_k s_k}$, при этом $\varepsilon_k = (-1)^{n_k}$, а $n_k$ — число тех $a_s$, для которых $a_s \equiv -1 \bmod n$ и $m_k < s \leq m_{k+1}$. Непосредственно проверяется, что $\underline{\zeta} = \{\zeta_k\}$ — морфизм проективной системы $\{S^1, \sigma(m_{k+1}+1, m_{k+1}), k \in N\}$ в проективную систему $\{S^1, \tau(i_0+k+2, i_0+k+1), k \in N\}$, где $\sigma(m_{k+1}+1, m_{k+1})(\lambda) = \lambda^{\bar{a}_k}$, $\tau(i_0+k+2, i_0+k+1)(\lambda) = \lambda^{\bar{b}_k}$, $\bar{a}_k = a_{m_k} a_{m_k+1} \ldots a_{m_{k+1}}$, $\bar{b}_k = b_{i_0+k+1}$.

При этом $\zeta = \varprojlim \underline{\zeta}$ — изоморфизм.

Так как $a_k$ и $b_k$ удовлетворяют (2.4), то гомоморфизм $\zeta_k \mid \mathsf{Z}(n)$ — тождественен изоморфизму группы $\mathsf{Z}(n)$ на себя. Следовательно, $\zeta$ — искомый изоморфизм.

Сделаем еще и следующее замечание. Пусть $D=\{d_k \mid k=1, 2, \ldots\}$ — последовательность натуральных чисел и $\underline{\Sigma}(D) = \{S^1, d(k+1, k), k \in N\}$, $d(k+1, k)(\lambda) = \lambda^{d_k}$. Пусть также $\underline{\Sigma}(\tilde{D}) = \{S^1, \tilde{d}(k+1, k), k \in N\}$, $\tilde{d}(k+1, k)(\lambda) = \lambda^{\eta_k d_k}$, $\eta_k = \pm 1$.

Мы будем пользоваться тем, что группы $\Sigma(D) = \varprojlim \underline{\Sigma}(D)$ и $\Sigma(\hat{D}) = \varprojlim \underline{\Sigma}(\tilde{D})$ изоморфны. Действительно, если $\theta_k(\lambda) = \lambda^{\eta_k}$, то $\underline{\theta} = \{\theta_k \mid k=1, 2, \ldots\}$ — морфизм $\underline{\Sigma}(D)$ в $\underline{\Sigma}(\tilde{D})$, индуцирующий изоморфизм $\bar{\theta} = \varprojlim \underline{\theta}: \Sigma(D) \longrightarrow \Sigma(\tilde{D})$.

**5. Центр и коммутант** $(U(n), A)$**-группы.** Пусть $G$ есть $(U(n), A)$-группа, и (2.1) ее спектр Ли, $A=\{a_k \mid k=1, 2, \dots\}$ и $a_k$ удовлетворяют (2.4).

Рассмотрим гомоморфизм $p(k+1, k)_C=p(k+1, k) \mid C_n$ ($C_n$, (2.2) — центр группы $U(n)$).

Из (3.6) знаем, что $p(k+1, k)_C(\lambda)=f_{a_k}(\lambda)$.

Рассмотрим проективную систему $\underline{C}=\{C_n, p(k+1, k)_C, k \in N\}$.

Пусть $C$ — предел $\underline{C}$. Из (3.6) и замечания в конце п. 4 следует, что группа $C$ изоморфна $\Sigma(\overline{A})$.

Непосредственно проверяется

Лемма 5.1. *Центр* $(U(n), A)$*-группы* $G$ *изоморфен группе* $C$ *(стало быть,* $\Sigma(A)$*).*

Коммутант группы $U(n)$ совпадает с $SU(n)$. Пусть $p(k+1, k)'=p(k+1, k) \mid SU(n)$. Из (3.5) имеем, что $p(k+1, k)'(SU(n)=SU(n)$, и что

$$p(k+1, k)'=\mathrm{id}. \tag{5.1}$$

Стало быть имеем отображение

$$(p(k+1, k), \mathrm{id})\colon (U(n), SU(n)) \longrightarrow (U(n), SU(n)).$$

Это отображение индуцирует гомоморфизм $\bar{p}(k+1, k)$ факторгруппы $U(n)/SU(n)$ в себя. Очевидно, эта факторгруппа изоморфна $S^1$. Из (3.4) получаем $\bar{p}(k+1, k)(\lambda)=f_{a_k}(\lambda)$.

Из (5.1) следует, что существует каноническое вложение группы $SU(n)$ в группу $G$. Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 5.2. *Коммутант* $U(n)$*-группы изоморфен* $SU(n)$.

Из лемм 5.1, и 5.2 следует

Лемма 5.3. *Пересечение коммутанта* $(U(n), A)$*-группы и ее центра совпадает с группой* $\Gamma_n(A)$.

Из леммы 5.1, и 5.2 получаем также:

Лемма 5.4. $G=SU(n)\,.\,\Sigma(A)$, *т. е. любой элемент группы* $G$ *является произведением элемента из* $\Sigma(A)$ *(центра группы* $G$*) на элемент из* $SU(n)$ *(коммутанта группы* $G$*).*

Пусть $\pi(A)\colon SU(n)\times\Sigma(A) \longrightarrow G$ — естественная проекция. Эту проекцию можно определить и следующим образом.

Имеем

$$\pi \tilde{f}_{a_k}=p(k+1, k)\pi. \tag{5.2}$$

Группа $SU(n)\times\Sigma(A)$ является пределом проективной системы

$$\underline{S}=\{SU(n)\times S^1, \tilde{f}_{a_k}, k \in N\}. \tag{5.3}$$

Из (5.2) следует, что гомоморфизм $\pi$ индуцирует эпиморфизм проективной системы (5.3) на (2.1). Так как проективный предел — точный функтор в категории компактных групп [2, теорема 6.2, стр. 283], то отображение

$$\varprojlim \pi : SU(n)\times\Sigma(A) \longrightarrow G$$

будет эпиморфизмом, и легко проверить, что $\pi(A)=\varprojlim \pi$. Ясно, что ядро гомоморфизма $\pi(A)$ изоморфно ядру гомоморфизма $\pi$.

**6. $U(n)$-группы как главные расслоения над** $U(n)$. Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа, $A=\{a_k \mid k=1, 2, \ldots\}$, $a_k$ удовлетворяют (2.4), а $\underline{G}$ — спектр Ли (2.1) группы $G$. По определению $p(k+1, k): U(n) \longrightarrow U(n)$ совпадает с фактором отображения $U(n) \longrightarrow U(n)/A_k$, где $A_k=\{\lambda I \mid \lambda^{a_k}=1\}$, а $I$ — единичная матрица.

Пусть $F_k=p(1, k)\pi_1(U(n), I)$ — образ фундаментальной группы при гомоморфизме, индуцированном накрытием $p(1, k)=p(2, 1)p(3, 2)\ldots p(k, k-1)$.

Группа $A^i=F_1/F_i$ — изоморфна группе скольжений накрытия $p(1, k)$. Так как $F_{i+1}\subset F_i$, то имеем гомоморфизм $\alpha(i, i+1): A^{i+1} \longrightarrow A^i$.

Пусть $\underline{A}=\{A^i, \alpha(i, i+1), i\in N\}$ — проективная система, и $A_\infty=\varprojlim \underline{A}$ ($A_\infty$ — это множество $A$-адических чисел). Знаем, что $A_\infty$ — вполне-несвязное, компактное кольцо. В [13, теорема 5.6] доказано, что $g=(G, p_1, U(n), A_\infty)$ — главное расслоение со структурной группой $A_\infty$, базой $U(n)$ и пространством расслоения $G$. Здесь $p_1: G \longrightarrow U(n)$ — естественная проекция группы $G$ на первый член спектра $\underline{G}$. Аддитивная группа $A_\infty$ — подгруппа центра $G$, она действует в $G$ (сдвигами) и $p_1$ — естественная проекция $G$ на факторпространство $G/A_\infty=U(n)$.

Кольцо $A_\infty$ будем называть кольцом $A$-адических чисел, ассоциированным с $G$.

С $(U(n), B)$-группой $\tilde{G}$ ассоциировано кольцо $B$-адических чисел $B_\infty$.

Непосредственно из определений получается

Лемма 6.1. *Кольца $A_\infty$ и $B_\infty$ тогда и только тогда изоморфны, когда $A$ и $B$ эквивалентны.*

**7. Шейповая классификация $(U(n), A)$-групп.** Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа, $\tilde{G}$—$(U(n), B)$-группа, $A=\{a_k \mid k=1, 2, \ldots\}$, $B=\{b_k \mid k=1, 2, \ldots\}$, $s=\dim U(n)$ $=\dim G=\dim\tilde{G}$ ($a_k$, $b_k$ — удовлетворяют (2.4)).

Лемма 7.1. *Группы $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда изоморфны, когда $A$ и $B$ эквивалентны.*

Доказательство. а) пусть $G$ и $\tilde{G}$ изоморфны. Тогда $H^s(G, \mathrm{Z})$ и $H^s(\tilde{G}, \mathrm{Z})$ тоже изоморфны. Знаем, что $H^s(G, \mathrm{Z})=\mathrm{Q}(A)$ и $H^s(\tilde{Q}, \mathrm{Z})=\mathrm{Q}(B)$ (лемма 4.2). Из леммы 4.3 получаем, что $A$ и $B$ эквивалентны.

б) Пусть $A$ и $B$ эквивалентны. Из замечаний в конце п. 4 знаем, что существует изоморфизм $\zeta: \Sigma(A) — \Sigma(B)$ такой, что $\zeta_n=\zeta|\Gamma_n(A): \Gamma_n(A) \longrightarrow \Gamma_n(A)$ является тождественным изоморфизмом. Тогда, если

$$\tilde{\alpha}=\mathrm{id}\times\alpha: SU(n)\times\Sigma(A) \longrightarrow SU(n)\times\Sigma(B),$$

то $\tilde{\alpha}$ — изоморфизм и индуцирует гомоморфизм $\beta: G \longrightarrow \tilde{G}$ такой, что

$$\beta\pi(A)=\pi(B)\tilde{\alpha}. \tag{7.1}$$

Из (7.1) следует, что $\beta$ — изоморфизм.

Лемма 7.2. *$B$ — фактор $A$ тогда и только тогда, когда $\tilde{G}$ является факторгруппой $G$.*

Доказательство. а. Пусть $B$ — фактор $A$. Тогда применяя конструкции Х. Кука из [10], получаем эпиморфизм $\gamma: \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(B)$, такой, что на группе $\Gamma_n(A)$ он тождествен. Тогда искомый эпиморфизм индуцируется гомоморфизмом

$$\tilde{\gamma}=\mathrm{id}\times\gamma: SU(n)\times\Sigma(A) \longrightarrow SU(n)\times\Sigma(B).$$

б. Преположим, что существует эпиморфизм $\psi: G \longrightarrow \tilde{G}$. Покажем, что гомоморфизм $\psi$ изображает центр группы $G$ на центр группы $\tilde{G}$.

Обозначим центр группы $G$ через $C$, а центр $\tilde{G}$ через $\tilde{C}$. Очевидно, $\psi(C) \subset \tilde{C}$. Предположим, что $\psi(C)$ — собственный подконтинуум в $\psi(\tilde{C})$. Известно, что собственные континуумы в $\tilde{C}$ — это только точки и дуги (напомним, что $\tilde{C}=\Sigma(B)$). Следовательно, $\psi(C)$ — группа Ли (в случае — либо точка, либо окружность). Так как $\tilde{C}$ не содержит окружности, то $\psi(C)=e$ ($e$ — единица). Пусть $D=\pi(A)^{-1}(\mathrm{Ker}\,\psi)$. Ясно, что $SU(n)\times\Sigma(A)/D$ — группа Ли, но, с другой стороны, эта группа изоморфна $\tilde{G}$. Получили противоречие. Следовательно, $\psi(C)=\tilde{C}$. Так как группа $C$ изоморфна группе $\Sigma(A)$, а $\tilde{C}$ — группе $\Sigma(B)$, то из [10] получаем, что $B$ есть фактор $A$.

Теорема. 7.3. *Пусть $G$ и $\tilde{G}$ — $U(n)$-группы. Следующие условия эквивалентны: $G$ и $\tilde{G}$*

1. *изоморфные топологические группы,*
2. *гомеоморфные пространства,*
3. *гомотопически эквивалентные пространства,*
4. $\mathrm{Sh}(G)=\mathrm{Sh}(\tilde{G})$,
5. $\mathrm{Sh}(G)\geq\mathrm{Sh}(\tilde{G})$.

Доказательство. Очевидно импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ выполнены. Достаточно проверить $5 \Rightarrow 1$. Если $G$ — $(U(n), A)$-группа, а $\tilde{G}$ — $(U(n), B)$-группа и $\mathrm{Sh}(G)\geq\mathrm{Sh}(\tilde{G})$, то по определению существуют шейповые морфизмы $\underline{f}: G \longrightarrow \tilde{G}$ и $\underline{g}: \tilde{G} \longrightarrow G$ такие, что $\mathrm{Sh}(\underline{f}\,\underline{g}) = \mathrm{Sh}\ (\mathrm{id})$. Если $\underline{f}^s$, $\underline{g}^s$ — гомоморфизмы в $s$-мерных целочисленных когомологиях Александра — Чеха, индуцированные $\underline{f}$ и $\underline{g}$, то тогда $\underline{g}^s\,\underline{f}^s=\mathrm{id}$. Следовательно, гомоморфизм

$$\underline{g}^s : \mathbf{Q}(B) \longrightarrow \mathbf{Q}(A)$$

есть эпиморфизм.

Из леммы 4.4 следует, что $A$ и $B$ эквивалентны, а из леммы 7.1, что $G$ и $\tilde{G}$ изоморфны.

Так как центр $(U(n), A)$-группы изоморфен $\Sigma(A)$, то из теоремы 7.3 получаем следующую теорему.

Теорема 7.4. *$U(n)$-группы $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда имеют одинаковый шейп, когда их центры имеют одинаковый шейп.*

Из леммы 7.1 вытекает

Теорема 7.5. *$U(n)$-группы $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда изоморфны, когда $G$ есть факторгруппа $\tilde{G}$, а $\tilde{G}$ — факторгруппа $G$.*

Из леммы 6.1 следует

Теорема 7.6. *$U(n)$-группы $G$ и $\tilde{G}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ассоциированные с ними кольца $A_\infty$ и $B_\infty$.*

**8. Характеры $U(n)$-групп.** Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа.

Лемма 8.1. $\mathrm{Char}\,G=\mathrm{Char}\,G/G'$.

Здесь $G'$ — коммутант $G$.

Рассмотрим группу $G/G'$. Так как проективный предел компактных групп — точный функтор, то

$$G/G' = \lim\{U(n)/SU(n),\ \tilde{p}(k+1,\ k),\ k \in N\}.$$

Знаем, что $p(k+1,\ k)\,|\,SU(n) = \mathrm{id}$ (см. (5.1)). Из (3.4) непосредственно получаем $\tilde{p}(k+1,\ k)(\lambda) = f_{a_k}(\lambda)(\tilde{p}(k+1,\ k);\ S^1 \longrightarrow S^1)$. Следовательно, имеет место

Лемма 8.2. *Группа $G/G'$ изоморфна $\Sigma(A)$.*

Из лемм 8.1. 8.2. следует

Лемма 8.3. *Группа характеров $G/G'$ изоморфна* $\mathbf{Q}(A)$.

Теорема 8.4. *Пусть $G$ и $\tilde{G}$ — $U(n)$-группы.* $\mathrm{Sh}(G) = \mathrm{Sh}(\tilde{G})$ *тогда и только тогда, когда группа* $\mathrm{Char}\, G$ *изоморфна* $\mathrm{Char}\, \tilde{G}$.

**9. Максимальная, связная, абелевая подгруппа $U(n)$-группы.** Максимальная, связная, абелевая подгруппа $U(n)$ (максимальный тор) — это

$$T(n) = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in U(n)\}.$$

Здесь $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, принадлежащая группе $U(n)$, с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по диагонали. Группа $T(n)$ изоморфна группе $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ($n$ раз).

Центр $C_n$ группы $U(n)$ — это группа $\{(\lambda, \ldots, \lambda) \in U(n)\}$. Эта группа изоморфна $S^1$ и является подгруппой $T(n)$. Тогда существует подгруппа $T_1$ в $T(n)$, изоморфная группе $T^{n-1}$, и такая, что $C_n \times T_1$ изоморфна $T(n)$.

Из (3.4) непосредственно следует, что $p(k+1,\ k)\,|\,T_1 = \mathrm{id}$. Рассмотрим проективную систему

$$\underline{G}(T) = \{C_n \times T_1\,|\,f_{a_k} \times \mathrm{id},\ k \in N\}. \tag{9.1}$$

Обозначим предел (9.1) через $G(T)$. Непосредственно проверяется

Лемма 9.1. *Группа $G(T)$ изоморфна максимальной, связной, абелевой группе $G$.*

Лемма 9.2. *Группа $G(T)$ изоморфна $\Sigma(A) \times T_1$.*

Из этих лемм, леммы 7.1 и теоремы 7.4 вытекает

Теорема 9.3. *Пусть $G$ и $\tilde{G}$ — $U(n)$-группы, а $G(T)$, $\tilde{G}(T)$ — их максимальные, связные подгруппы. В таком случае* $\mathrm{Sh}(G) = \mathrm{Sh}(\tilde{G})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sh}(G(T)) = \mathrm{Sh}(\tilde{G}(T))$.

**10. Группа Вейля $U(n)$-групп.** Пусть $T(n)$ — максимальная, связная, абелевая подгрупа и $N(n)$ — нормализатор $T(n)$ в $U(n)$. Известно, что $N(n)$ состоит из всех унитарных матриц, в любом столбце и ряде которых только один ненулевой элемент. Через $W(n)$ обозначим факторгруппу группы $N(n)$ по $T(n)$. Группа $W(n)$ называется группой Вейля группы $U(n)$. Если $S_n$ — симметрическая групппа (т. е. группа взаимно-однозначных отображений множества $(1, 2, \ldots, n)$ в себя), то $W(n)$ изоморфна группе $S_n$. При этом изоморфизм $i$ между $W(n)$ и $S_n$ задается следущим образом. Пусть $\mathbf{C}^n$ — $n$-мерное комплексное пространство и $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — базис пространства $\mathbf{C}^n$. Определим изоморфизм $i: S_n \longrightarrow W(n)$ так: $i(\alpha)(\vec{e}_k) = \vec{e}_{\alpha(k)}$ для $\alpha \in S_n$.

Непосредственно проверятся, что $p(k+1,\ k)(N(n)) \subset N(n)$, и, следовательно, $p(k+1,\ k)$ индуцирует гомоморфизм $p(k+1,\ k)_W: W(n) \longrightarrow W(n)$.

Пусть $\alpha \in S_n$, $g \in i(\alpha)$ и

$$g = (\lambda_1 \vec{e}_{\alpha^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_n \vec{e}_{\alpha^{-1}(n)})$$

($g$ — представитель элемента $i(\alpha)$).

Пусть $\lambda \in S^1$ такое, что $\lambda^n = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. Тогда из (3.4) получаем, что $p(k+1, k)(g)$ и $g$ определяют один и тот же класс в $W(n)$, т. е. имеет место

Лемма 10.1. $p(k+1, k)_W = \mathrm{id}$.

Если $G(T)$ — максимальная, связная, абелевая группа $G$, а $N(G)$ — ее нормализатор в $G$, то непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 10.2. *Группа $N(G)$ изоморнфа пределу проективного спектра $\{N(n), p(k+1, k \mid N(n), k \in N\}$.*

Если $W(G)$ — факторгруппа $N(G)$ по $G(T)$, то из леммы 10.1 следует

Лемма 10.3. *Группа $W(G)$ изоморчна симметрической группе $S_n$.*

**11. Почти-периодические функции и $U(n)$-группы.** Универсальная накрывающая пространства группы $U(n)$ это группа $SU(n) \times R^1$. Пусть

$$\varrho : SU(n) \times R^1 \longrightarrow U(n), \tag{11.1}$$

$\varrho(A, x) = \pi(A, \exp(2\pi i x))$ — универсальное накрытие.

Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа и (2.1) ее спектр Ли.

Существуют гомоморфизмы $\varrho_k : SU(n) \times R^1 \longrightarrow U(n)$ такие, что выполнено

$$p(k+1, k)\,\varrho_{k+1} = \varrho_k. \tag{11.2}$$

Тем самым имеем морфизм $\underline{\varrho} = \{\varrho_k\}$ пространства $SU(n) \times R^1$ в проективную систему $\underline{G}$. Пусть $\varrho_\infty = \lim \underline{\varrho}$, т. е. $\varrho_\infty(x) = \{\varrho_k(x)\}$.

Непосредственно проверяется, но это следует и из [13, теорема 5.8], что множество $\varrho_\infty(SU(n) \times R^1)$ (образ $\varrho_\infty$) совпадает с компонентой линейной связности единицы группы $G$. Из той же теоремы 5.8 [13] следует, что любая компонента линейной связности группы $G$ получается из компоненты связности единицы свигом на элемент из $A_\infty$. Кроме того, любая компонента связности группы $G$ — всюду плотное подмножество в $G$.

Из [13, теорема 5.12] знаем, что $\mathrm{Ker}\,\varrho_\infty = e$, так как $\bigcap_{k=1}^{\infty} p(1, k)\pi_1(U(n), I) = e$ ($e$ — единица группы $G$).

Следовательно, справедлива

Лемма 11.1. *$\varrho_\infty$ — мономорфизм и его образ всюду плотен в $G$.*

Если $X$ — компакт, через $C(X)$ будем обозначать кольцо всех непрерывных комплекснозначных функций на $X$. Если $Y$ — пространство, то через $C^*(Y)$ будем обозначать кольцо всех непрерывных ограниченных функций на $Y$.

Рассмотрим мономорфизм $\varrho_\infty(G) : SU(n) \times R^1 \longrightarrow G$. Пусть $\varrho_\infty(G)^*$ — гомоморфизм, индуцированный $\varrho_\infty(G)$:

$$\varrho_\infty(G)^* : C(G) \longrightarrow C^*(SU(n) \times R^1).$$

Очевидно $\varrho_\infty(G)^*$ — гомоморфизм алгебр и $\varrho_\infty(G)^*(\bar{f}) = \overline{\varrho_\infty(G)^*(f)}$ для $f \in C(G)$

Образ $\mathrm{Im}\,\varrho_\infty(G)^*$ обозначим через $C(SU(n) \times R^1, G)$. Кольцо $\mathrm{Im}\,\varrho_\infty(G)^*$ состоит из всех непрерывных функций на пространстве $\varrho_\infty(SU(n) \times R^1)$, которые могут быть продолжены в непрерывные функции на $G$. Так как множество $\varrho_\infty(SU(n) \times R^1)$ всюду плотно в $G$, то $\mathrm{Im}\,\varrho_\infty(G)^*$ совпадает с кольцом всех функций на $G$, ограниченных на $\varrho_\infty(SU(n) \times R^1)$, и, следовательно, кольца $C(G)$ и $C(SU(n) \times R^1, G)$ изоморфны. Очевидно это изоморфизм алгебр, коммутирующий с сопряжением функций.

Пусть $\tilde{G}$ — тоже $U(n)$-группа. Известно (см. [3, теорема 26, стр. 32]), что пространства $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда гомеоморфны, когда алгебры $C(G)$ и $C(\tilde{G})$ изоморфны, и изоморфизм коммутирует с комплексным сопряжением функции. Следовательно, $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда гомеоморфны, когда алгебры $C(SU(n)\times R^1, G)$ и $C(SU(n)\times R^1, \tilde{G})$ изоморфны указанным способом.

Так как $G$ и $\tilde{G}$ — компактные группы, то в пространствах $C(G)$ и $C(\tilde{G})$ всюду плотны линейные подпространства, порожденные матричными элементами неприводимых представлений $G$ и $\tilde{G}$ соответственно [1, теорема 32, стр. 233]. Стало быть, функции из $C(SU(n)\times R^1, G)$ и $C(SU(n)\times R^1, \tilde{G})$ равномерно аппроксимируются этими матричными элементами и по определению функции из $C(SU(n)\times R^1, G)$ и $C(SU(n)\times R^1, \tilde{G})$ называются почти-периодическими функциями на $SU(n)\times R^1$, индуцированными $G$ и $\tilde{G}$. Тем самым группа $G$ с точностью до гомеоморфизма определяется алгеброй почти-периодических функций на $SU(n)\times R^1$, индуцированных $G$.

Опишем алгебру $C(SU(n)\times R^1, G)$ другим способом. Известно, что непрерывная, комплекснозначная функция $f$ на $SU(n)\times R^1$ тогда и только тогда почти-периодична, когда для любого $x\in SU(n)$ функция $\varphi(y)=f(x,y)$ почти-периодична на $R^1$ [4]. Напомним, что любая почти-периодическая функция на $R^1$ однозначно определяется своим рядом Фурье [15, гл. I, § 4, стр. 27, теорема единственности], а ряд Фурье любой почти-периодической функции на $R^1$ определяется ненулевыми экспонентами Фурье функции. Точнее, если $\psi(y)$ — почти-периодическая функция на $R^1$, то пусть

$$\alpha(\lambda)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^u \psi(y)\exp(-i\lambda y)dy.$$

Те $\lambda$, для которых $\alpha(\lambda)\neq 0$, называются экспонентами Фурье функции $\psi(y)$ Известно, что экспоненты Фурье функции $\psi$ — только счетное число [15], стр. 18], и пусть они заданы последовательностью $\{\Lambda_k,\ k=1, 2, \dots\}$, а $\alpha_k=\alpha(\Lambda_k)$. Тогда ряд $\Sigma_{k=1}^{\infty}\alpha_k\exp(i\Lambda_k y)$ называется рядом Фурье функции $\psi$.

Итак, для любого фиксированного $x\in SU(n)$ функция $\varphi(y)=f(x, y)$ почти-периодическа на $R^1$. Так как $f(x, y)$ продолжается на $G$, то $\varphi(y)$ продолжается на $\Sigma(A)$.

Лемма 11.2. *Почти-периодическая на $R^1$ функция тогда и только тогда продолжается на $\Sigma(A)$, когда ее экспоненты Фурье принадлежат $Q(A)$.*

Эта лемма неросредственно следует из следующих утверждений.

Лемма 11.3. $\mathrm{Char}\,\Sigma(A)=Q(A)$.

Лемма 11.4. *Если $\pi_k:\Sigma(A)\longrightarrow S^1$ — естественная проекция, то характеры $\pi_k$ являются образующими группы* $\mathrm{Char}\,\Sigma(A)$.

Лемма 11.5. *Любая почти-периодическая на $R^1$ функция, которая продолжается на $\Sigma(A)$, аппроксимируется равномерно отображениями $\pi_k\varrho_\infty=\varrho_k$.*

Лемма 11.6. *Экспоненты Фурье функции $\varphi(y)$ содержатся в множестве экспонент Фурье функций $\varrho_k$.*

Эти леммы проверяются непосредственно.

Тем самым, мы знаем, что группа $Q(A)$ однозначно определяет алгебру $C(SU(n)\times R^1, G)$, а тем самым и группу $G$.

Заметим, что так как $\mathsf{Q}(A)$ — множество рациональных чисел, то функции из $C(SU(n)\times\mathsf{R}^1, G)$ являются предельно-периодическими.

Из теоремы единственности для рядов Фурье почти-периодических функций следует, что если $\mathsf{Q}(A)$ и $\mathsf{Q}(B)$ — изоморфные группы, то алгебры $C(SU(n)\times\mathsf{R}^1, G)$ и $C(SU(n)\times\mathsf{R}^1, \tilde{G})$ изоморфны при помощи изоморфизма, коммутирующего с комплексным сопряжением. Тем самым снова получаем, что $G$ и $\tilde{G}$ гомеоморфны. Если воспользуемся результатами о почти-периодических расширениях, то получим, что $G$ и $\tilde{G}$ изоморфны. Тем самым мы указали другой способ для получения основных результатов о классификации $U(n)$-групп.

**12. Квазигомеоморфные $U(n)$ группы.** Пусть $X$ и $Y$ — компакты, а $d_1$ и $d_2$ — метрики пространств $X$ и $Y$ соответственно. Отображение $f$ пространства $X$ на пространство $Y$ называется $\varepsilon$-отображением, если для любой точки $y\in Y$ диаметр множества $f^{-1}(y)$ меньше $\varepsilon$: $\operatorname{diam} f^{-1}(y)<\varepsilon$.

Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа, а $\tilde{G}$ — $(U(n), B)$-группа и $s=\dim G=\dim\tilde{G}$.

Лемма 12.1. *Существует положительное число $\varepsilon_0$, такое что если $f$ есть $\varepsilon_0$-отображение $G$ на $\tilde{G}$, то гомоморфизм $f^s: H^s(\tilde{G}, \mathsf{Z})\longrightarrow H^s(G,\mathsf{Z})$ ненулевой.*

*Гомоморфизм $f^s$ индуцирован отображением $f$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что для любого $\varepsilon$ существует $\varepsilon$-отображенние $f(\varepsilon)$ пространства $G$ на $\tilde{G}$, такое, что гомоморфизм $f^s(\varepsilon): H^s(\tilde{G}, \mathsf{Z})\longrightarrow H^s(G, \mathsf{Z})$ нулевой.

Для любого $\varepsilon$ фиксируем такое $\varepsilon$-отображение $f(\varepsilon)$.

Если $f^s(\varepsilon, Q)$ — гомоморфизм в когомологиях с рациональными коэффициентами, индуцированный отображением $f(\varepsilon)$, то $f^s(\varepsilon, Q)=0$, так как, $f^s(\varepsilon)=0$,

Напомним, что $H^s(G, Q)=Q$, $H^s(\tilde{G}, Q)=Q$ — одномерные линейные пространства над полем $Q$[7].

Воспользуемся конструкцией Мардешича и Сегала из [16] и построим проективную систему $\underline{X}=\{U(n), \pi(k+1, k), k\in N\}$ такую, что:

1. $G=\varprojlim \underline{X}$;

2. Естественные проекции $\pi_k: G\longrightarrow U(n)$ индуцируют нулевой гомоморфизм

$$\pi_k^s(Q): H^s(U(n), Q)\longrightarrow H^s(G, Q)$$

в рациональных когомологиях.

Из этого потом легко получим противоречие.

Фиксируем метрики $d$, $\tilde{d}$ и $\varrho$ на пространствах $G$, $\tilde{G}$ и $U(n)$ соответственно. Пусть $G$ имеет спектр Ли (2.1), а $\tilde{G}$ — спектр $\underline{\tilde{G}} = \{U(n), q(k+1, k), k\in N\}$, и предположим, что естественные проекции $\bar{q}_k: \tilde{G} \longrightarrow U(n)$ суть $1/k$-отображения.

Так как $U(n)$ — компактное $ANR$ пространство, то существует положительное число $\tilde{\varepsilon}_1$ такое, что для любого компакта $X$ всякие две отображения $g, h: X\longrightarrow U(n)$, для которых $\varrho(g, h) < \tilde{\varepsilon}_1$, гомотопны.

Пусть $\varepsilon_1=\min(1, \tilde{\varepsilon}_1)$ и $n_1$ — столь большое натуральное число, что отображение $\varphi_1=q_n f(1/n_1): G\longrightarrow U(n)$ является $\varepsilon_1$-отображением.

Пусть $\delta_1'$ — такое положительное число, что если $x,\ x' \in G$ и $d(x,\ x') \geqq 2\varepsilon_1$, то $\varrho(\varphi_1(x),\ \varphi_1(x')) > 2\delta_1'$ и $\delta_1 = \min(\varepsilon_1,\ \delta_1')$.

Предположим, что построены отображения $\pi(i,\ j): U(n) \longrightarrow U(n)$ и выбраны числа $\varepsilon_i,\ \delta_i, i \leqq j < k-1$, и натуральные числа $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, так что:

1. $\varphi_i = q_{n_i} f(1/n_i)$ — $\varepsilon_i$-отображения, $i = 1, \ldots, k-1$;
2. для любого подмножества $N_j$ множества $U(n)$, имеющего диаметр, не превышающий $\delta_j$, имеем $\operatorname{diam} \pi(i,\ j)(N_j) \leqq \delta_i / 2^{j-i}$ для $i < j < k-1$;
3. для $x,\ x' \in G$, для которых $d(x,\ x') \geqq 2\varepsilon_i$, имеем $\varrho(\varphi_i(x),\ \varphi_i(x')) > 2\delta_i$;
4. $\varrho(\varphi_i,\ \pi(i+1,\ i)\ \varphi_{i+1}) \leqq \delta_i/2$;
5. $\delta_i \leqq \varepsilon_i \leqq 1/i,\quad i = 1, \ldots, k-1$

(см. [16, лемма 5, стр. 152]).

Рассмотрим отображения $\varphi_{k-1}: G \longrightarrow U(n)$ и числа $\varepsilon_{k-1},\ \delta_{k-1}/2$. Из [16, лемма 4] следует, что существует положительное число $\varepsilon_k$, такое, что для любого $\varepsilon_k$-отображения $\psi$ пространства $G$ на $U(n)$ существует отображение $\pi$ пространства $U(n)$ на $U(n)$ такое, что выполнено $\varrho(\varphi_{k-1},\ \pi\psi) \leqq \delta_{k-1}/2$. Без ограничения общности можем считать, что $\varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}$.

Пусть натуральное число $n_k$ — столь большое, что отображение $\varphi_k = q_{n_k} f(1/n_k)$ является $\varepsilon_k$-отображением (будем предполагать что $n_k > n_{k-1}$). Тогда из сделанного выше замечания можем утверждать, что существует отображение $\pi(k,\ k-1): U(n) \longrightarrow U(n)$, такое, что $\varrho(\varphi_{k-1},\ \pi(k,\ k-1)\varphi_k) \leqq \delta_{k-1}/2$. Пусть $\delta_k$ такое, что из $x,\ x' \in G$ и $d(x,\ x') \geqq 2\varepsilon_k$ следует $\varrho(\varphi_k(x),\ \varphi_k(x')) > 2\delta_k$ (будем предполагать, что $\delta_k < \varepsilon_k$).

Рассмотрим проективную систему $\underline{X} = \{U(n),\ \pi(k+1,\ k),\ k \in N\}$.

Из [16, лемма 5] следует, что пространство $G$ гомеоморфно пределу $\varprojlim \underline{X}$. Будем считать, что $G = \varprojlim \underline{X}$. При этом проекции $\pi_k: G \longrightarrow X$ определяются следующим образом [16, (21)]: $\pi_k(x) = \lim_{j\to\infty} \pi_{k_j} \varphi_j(x)$. Из [16, (22)] получаем $\varrho(\varphi_k,\ \pi_k) \leqq \tilde{\varepsilon}_1$.

Следовательно, отображения $\varphi_k$ и $\pi_k$ гомотопны и индуцируют одинаковые гомоморфизмы $\varphi_k^s(Q)$ и $\pi_k^s(G)$ в когомологиях с рациональными коэффициентами. Но $\varphi_k^s(Q) = f^s(1/n_k)(Q) q_{n_k}^s(Q) = 0$, так как $f^s(1/n_k)(Q) = 0$, т. е. получили, что $\pi_k^s(Q) = 0$.

Проверим, что это невозможно. Имеем $H^s(G,\ Q) = \varprojlim \{H^s(U(n),\ Q),\ \pi(k+1,\ k)^s(Q),\ k \in N\}$. Но $H^s(G,\ Q)$ и $H^s(U(n),\ Q)$ — одномерные $Q$-линейные пространства, а отображения $\pi^s(k+1,\ k)^s(Q)$ — $Q$-линейные отображения. Стало быть, $\pi(k+1,\ k)^s(Q)$ — либо нулевой гомоморфизм, либо изоморфизм. Так как $H^s(G,\ Q)$ — ненулевое пространство, то $\pi(k+1,\ k)^s(Q) \neq 0$ для достаточно больших $k$. Следовательно, $\pi(k+1,\ k)^s(Q)$ — изоморфизм. Но тогда и $\pi_k^s(Q)$ — также изоморфизм для больших $k$, а мы знаем, что $\pi_k^c(Q) = 0$. Получили противоречие. Лемма 12.1 доказана.

Напомним, что компакт $X$ называется $Y$-подобным, если для любого $\varepsilon$ существует $\varepsilon$-отображение пространства $X$ на $Y$ [5, гл. 4, § 11, VII].

Лемма 12.2 *Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа а $\tilde{G}$ — $(U(n),\ B)$-группа. Если $G$ — $\tilde{G}$-подобно, то $B$ — фактор $A$.*

Доказательство. Из леммы 12.1 знаем, что существует отображение $f$ пространства $G$ на $\tilde{G}$ такое, что гомоморфизм $f^s: H^s(\tilde{G}, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^s(G, \mathbf{Z})$ ненулевой.

Из теоремы в [18] следует, что существуют отображения $f_k: U(n) \longrightarrow U(n)$, такие, что $\underline{f}=\{f_k\}$ — морфизм спектра $\underline{G}'=\{U(n),\ p(n_{k+1},\ n_k),\ \ k\in N\}$ в спектр $\underline{\tilde{G}}$ и отображение $\varphi=\varprojlim \underline{f}$ — гомотопно отображению $f$. Следовательно, гомоморфизм $\varphi^s; H^s(\tilde{G}, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^s(G, \mathbf{Z})$ ненулевой.

Рассмотрим морфизм

$\underline{f}^s=\{f^s_k\}:\{H^s(U(n), \mathbf{Z}),\ \ q(k+1,\ k)^s,\ \ k\in N\} \longrightarrow \{H^s(U(n),\ \mathbf{Z}),\ p(n_{k+1},\ n_k)^s,\ k\in N\}$.

Так как $\varphi^s=\varprojlim f^s_k$, то для достаточно больших $k$ имеем $f^s_k\neq 0$. Пусть ${}^s_k(1)=m_k$ (1-образующая группы $H^s(U(n),\ \mathbf{Z})$).

Так как

$$p(n_{k+1},\ n_k)^s\ p(n_k,\ n_{k-1})^s \ldots p(n_2,\ n_1)^s=\varphi^s_{k+1}\ q(k+1,\ k)^s \ldots q(2,\ 1)^s\ \varphi^s_1$$

и $p(n_{k+1},\ n_k)^s(1)=a_{n_k}a_{n_k+1}\ldots, a_{n_{k+1}+1}, q(k+1,k)^s(1)=b_k$, то $a_{n_1}, a_{n_1+1}\ldots a_{n_{k+1}-1}=m_1m_{k+1}b_1\ldots b_k$, тем самым доказано, что $B$ — фактор $A$.

Теорема 12.3. *Пусть $G$ и $\tilde{G}$ — $U(n)$-группы. Группы $G$ и $\tilde{G}$ тогда и только тогда квазигомеоморфны, когда они изоморфны.*

Напомним, что пространства $G$ и $\tilde{G}$ называются квазигомеоморфными если $G$ — $\tilde{G}$-подобно, и $\tilde{G}$ — $G$-подобно.

Эта теорема следует из лемм 12.2 и 7.1.

**13. Другое естественное представление $U(n)$-групп.** Пусть $G$ — $(U(n), A)$-группа и $A=\{a_k \mid k=1,\ 2, \ldots\}$. Пусть $\underline{\Sigma}(A)=\{S^1, \pi(k+1,k),\ k\in N\}$—проективная система, такая, что $\pi(k+1,\ k)(\lambda)=\lambda^{a_k}$.

Через $\Sigma(A)$ обозначим проективный предел $\underline{\Sigma}(A)$. Пусть $\mathbf{Z}(\bar{a}_k)=\{\lambda\in S^1 | \lambda^{\bar{a}_k}=1\}$ и $\underline{\mathbf{Z}}(A)=\{(\mathbf{Z}\bar{a}_k)\, z(k+1,\ k),\ \ k\in N\},\ z(k+1,\ k)=\pi(k+1,\ k)|(\mathbf{Z}(\bar{a}_{k+1})$.

Через $\mathbf{Z}(A)$ обозначим предел $\underline{\mathbf{Z}}(A)$. Для любого $n$ рассмотрим гомоморфизмы $j_n: \mathbf{R}^1 \longrightarrow S^1$, где $j_n(t)=\exp 2\pi it/\bar{a}_n$.

Получаем морфизм $\underline{j}; \mathbf{Z}^1 \longrightarrow \underline{\Sigma}(A)$, где $\underline{j}(t)=\{j_n(t),\ n=1,\ 2, \ldots\}$.

Пусть $j$ — предел морфизма $\underline{j}$; $j$ — гомоморфизм $\mathbf{R}^1$ в $\Sigma(A)$. Множество $j(\mathbf{R}^1)$ — компонента линейной связности единицы группы $\Sigma(A)$, и оно всюду плотно в $\Sigma(A)$.

Имеем естественное вложение $i: \mathbf{Z}(A) \longrightarrow \Sigma(A)$.

Рассмотрим гомоморфизм $k=i\times j: \mathbf{Z}(A)\times \mathbf{R}^1 \longrightarrow \Sigma(A)$, где $k(x,\ t)=i(x)+j(t)$ для $x\in Z(A),\ t\in \mathbf{R}^1$ (операция сложения — групповая операция в $\Sigma\ (A)$). Легко убедиться, что $\operatorname{Ker} k=\{(x,\ t)\in \mathbf{Z}(A)\times \mathbf{R}^1 \mid t$ — целое$\}$.

Пусть $r: SU(n) \longrightarrow G$ — естественное вложение $SU(n)$ в коммутант группы $G$ и $s$ — единственный гомоморфизм, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} SU(n)\times \mathbf{Z}(A)\times \mathbf{R}^1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times k"'] & G \arrow[d, equal] \\ SU(n)\times \Sigma(A) \arrow[r, "\widehat{\pi}"'] & G \end{tikzcd}$$

Легко убедиться, что

$$\Gamma=\operatorname{Ker} s=\{(\lambda I,\ \lambda^{-1}\exp(-2\pi il/\bar{a}_k),\ l),\ \lambda^n=1,\ l \text{ — целое}\}.$$

Итак, доказана

Лемма 13.1. *Группа $G$ — факторгруппа группы $SU(n)\times \mathbf{Z}(A)\times \mathbf{R}^1$ по подгруппе $\Gamma$.*

**14. Непосредственное доказательство достаточности в лемме 7.2.** Предположим, что $B=\{b_k,\ k=1, 2, \dots\}$ — фактор $A=\{a_k,\ k=1, 2, \dots\}$, и что $G$ — $(U(n),\ A)$-группа, а $\tilde{G}$ — $(U(n),\ B)$-группа. Следовательно, по определению, существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_k,\ k=1, 2, \dots\}$, последовательность целых чисел $\{s_k,\ k=1, 2, \dots\}$ и натуральное число $i_0$, такие, что выполняется (4.1).

Пусть (2.1) — спектр Ли группы $G$, а $\underline{\tilde{G}}=\{U(n), q(k+1, k)\in N\}$—спектр Ли группы $\tilde{G}$.

Рассмотрим проективные системы $\underline{M}=\{U(n),\ p(m_{k+1}+1,\ \ m_k+1),\ k\in N\}$ и $\underline{\tilde{M}}=\{U(n),\ q(i_0+k+2,\ i_0+k+1),\ k\in N\}$.

Очевидно, $\underline{M}$ — подсистема проективной системы (2.1), а $\underline{\tilde{M}}$ —подсистема системы $\underline{\tilde{G}}$. Следовательно, $G=\varprojlim \underline{M}$ и $\tilde{G}=\varprojlim \underline{\tilde{M}}$.

Пусть $\Gamma(s_k)=\{\lambda I \mid \lambda\in \mathbf{C},\ \ \lambda^{s_k}=1\}$ и $\zeta_k: U(n) \longrightarrow U(n)/\Gamma(s_k)$ — естественная проекция.

Так как $a_k\equiv \pm 1 \mod n$ и $b_k\equiv \pm 1 \mod n$, то из (4.1) получаем $s_k\equiv \pm 1 \mod n$. Следовательно, группа $U(n)/\Gamma(s_k)$ изоморфна группе $U(n)$, [9].

Непосредственно проверяется, что выполнено

$$\zeta_k p(m_{k+1}+1,\ m_k+1)=q(i_0+k+2,\ \ i_0+k+1)\zeta_{k+1}. \tag{14.1}$$

Из (14.1) имеем, что $\underline{\zeta}=\{\zeta_k,\ k\in N\}$ — морфизм $\underline{M}$ в $\underline{\tilde{M}}$. Пусть $\zeta=\varprojlim \underline{\zeta}$— это гомоморфизм $G$ в $\tilde{G}$. Из того, что проективный передел — точный функтор в категории компактных групп [2, теорема 6.2. стр. 283], следует, что $\zeta$ — эпиморфизм, т. е. $\tilde{G}$ — факторгруппа $G$.

**15. Замечания.** 1. Теории шейпов топологических групп посвящены работы [11; 14] С. Годлевского. Ей также отводится место в основополагающей работе Мардешича — Сигала [12]. Затем следуют многочисленные и интересные исследования Дж. Кислинга [19—24]. К этим вопросам относятся также работы [25] и [8].

Квазигомеоморфные пространства начали изучаться в [26] (см. [5, гл. 4, § 11, VII]). Хорошо известно, что квазигомеоморфные пространства не обязаны быть гомеоморфными. Более того, К. Борсуком было установлено, что существуют квазигомеоморфные компакты с различным шейпом [27].

2. Здесь докажем лемму 1.7. Пусть $T^l$ — $l$-мерный тор, а $D_1$ и $D_2$ — изоморфные, конечные подгруппы $T^l$. Докажем, что существует изоморфизм $\beta: T^l \longrightarrow T^l$, такой, что $\beta(D_1)=D_2$. Через $p$ обозначим универсальное накрывающее отображение $p:\mathbf{R}^l \longrightarrow T^l$, здесь $\mathbf{R}^l$ — $l$-мерное эвклидово пространство $(p(t_1, \dots, t_l)=(\exp(2\pi i t_1), \dots, \exp(2\pi i t_l)))$.

Пусть группы $D_1$ и $D_2$ изоморфны группе $\mathbf{Z}(p_1^{s_1})\oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}(p_{p_k}^{s_k})$, где $p_1, \dots, p_k$ — простые числа. Пусть $C=\operatorname{Ker} p$ и $\tilde{D}_i=p^{-1}(D_i)$, $i=1,\ 2$.

Знаем, что существуют базисы пространства $\mathbf{R}^l: E=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$, $F=\{f_1, f_2, \dots, f_l\}$, такие, что $\{g_1, \dots, g_l\}$ — образующие группы $\tilde{D}_1$, а $\{f_1 \dots, f_l\}$ — образующие $\tilde{D}_2$, и $\{p_1^{s_1} g_1,\ p_2^{s_2} g_2, \dots, p_k^{s_k} g_k,\ g_{k+1}, \dots, g_l\}$ и $\{p_1^{s_1} f_1, \dots,$

$p_k^{s_k}f_k, f_{k+1}, \ldots, f_l\}$ — образующие группы $C$. Пусть $\alpha: \mathrm{R}^l \longrightarrow \mathrm{R}^l$ — линейное отображение, определенное через $\alpha(g_i)=f_i$. Тогда $\alpha: (\mathrm{R}^l, \tilde{D}_1, C) \longrightarrow (\mathrm{R}^l, \tilde{D}_2, C)$ — отображение троек и, следовательно, оно индуцирует изоморфизм $\tilde{\alpha}: (\mathrm{R}^l/C, \tilde{D}_1/C) \longrightarrow (\mathrm{R}^l/C, \tilde{D}_2/C)$. Но $\mathrm{R}^l/C = T^l$ и $\tilde{D}_i/C = D_i$. Лемма 1.7 доказана.

3. При доказательстве леммы 1. 3, п. 1 мы воспользовались следующим предложением: Пусть $T^l$ — $l$-тор, $D$ — конечная подгруппа группы $T^l$ и $\alpha: T^l \longrightarrow T^l$ — изоморфизм, который тождествен на $D$. Тогда $\alpha$ индуцирует изоморфизм $\beta: T^l/D \longrightarrow T^l/D$. Группа $T^l/D$ изоморфна тору $T^l$. Стало быть, имеем гомоморфизм $\beta: T^l \longrightarrow T^l$. Мы проверим, что гомоморфизм $\beta$ тот же гомоморфизм $\alpha$.

Сделаем одно общее замечание. Пусть $p: \mathrm{R}^l \longrightarrow T^l$ — универсально накрывающее. Любой гомоморфизм $\varphi: T^l \longrightarrow T^l$ представляется следующим образом. Отображение $\varphi_p: \mathrm{R}^l \longrightarrow T^l$ пропускается через $\mathrm{R}^l$, т. е. существует линейное отображение $\tilde{\varphi}: \mathrm{R}^l \longrightarrow \mathrm{R}^l$, такое, что $p\tilde{\varphi} = \varphi p$. Если $C = \mathrm{Ker}\, p$, а $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$ — такой базис $\mathrm{R}^l$, что $F$ — система образующих $C$, то $\tilde{\varphi}$ изображает $C$ в $C$. Рассматривая линейное отображение $\tilde{\varphi}$ в базисе $F$, получаем целочисленную матрицу $\hat{\varphi}$. Теперь, если $\psi: T^l \longrightarrow T^l$ — другой гомоморфизм, то считаем, что $\varphi$ и $\psi$ не различны, если существует изморфизм $\delta: T^l \longrightarrow T^l$ такой, что $\delta\varphi = \psi\delta$. Предположим, что $\tilde{\psi}: \mathrm{R}^l \longrightarrow \mathrm{R}^l$ — такое линейное отоображение, что $p\tilde{\psi} = \psi p$, и что мы нашли базис $E = \{g_1, \ldots, g_l\}$ пространства $\mathrm{R}^l$, такой, что $E$ — система образующих $C$, и при этом $\tilde{\psi}$ изображает $C$ в $C$. Пусть $\hat{\psi}$ — матрица отображения $\tilde{\psi}$ в базисе $E$. Если $\hat{\psi} = \hat{\varphi}$, то пусть $\tilde{\delta}: \mathrm{R}^l \longrightarrow \mathrm{R}^l$ — следующий изоморфизм: $\tilde{\delta}(g_i) = f_i$, $i = 1, \ldots, l$. Изоморфизм $\tilde{\delta}$ индуцирует изоморфизм $\delta: T^l \longrightarrow T^l$. Так как матрицы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ совпадают то $\tilde{\psi}\tilde{\delta} = \tilde{\delta}\tilde{\varphi}$. Отсюда получаем, что $\delta\varphi = \psi\delta$.

Теперь применим это к гомоморфизмам $\alpha$ и $\beta$. Пусть $\gamma: T^l \longrightarrow T^l/D$ — естественная проекция. Тогда $\gamma p: \mathrm{R}^l \longrightarrow T^l/D$ — универсальное накрытие. Пусть $\tilde{\alpha}: \mathrm{R}^l \longrightarrow \mathrm{R}^l$ — такое линейное отображение, что $p\tilde{\alpha} = \alpha p$. Очевидно имеем $\gamma p\tilde{\alpha} = \beta\gamma p$. Тем самым $\alpha$ и $\beta$ накрываются одним и тем же линейным отображением $\tilde{\alpha}$. Из сделанного выше замечания следует, что существует изоморфизм $\xi: T^l \longrightarrow T^l$, такой, что $\xi\alpha = \beta\xi$, т. е. $\alpha$ и $\beta$ не различны.

4. Основные результаты этой заметки анонсированы в [6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, 1973.
2. Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. Москва, 1958.
3. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы, I. Москва. 1962.
4. А. Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применения. Москва, 1950.
5. К. Куратовский, Топология, II. Москва, 1969.
6. Г. Скордев. Шейп компактных, связных и конечномерных групп. *Доклады БАН*, **31**. 1978, 1517—1518.
7. Г. Скордев. Неподвижные точки отображений компактных, связных групп. *Доклады БАН*, **28**, 1975, 437—440.
8. Г. Скордев. Шейп соленоидальных пространств. *Доклады БАН*, 31, 1978, 1101—1102.
9. P. Baum. Local isomorphism of compact connected Lie groups. *Pacif. J. Math.*, **22**, 1967. 197—204.

10. H. Cook, Upper-semicontinuous continuum valued mappings onto circle like continua., *Fund.Math.*, **60**, 1967, 233—239.
11. S. Godlewski. Homomorphisms of cohomotopy groups induced by fundamental classes. *Bull. Polon. Acad. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, **17**, 1969, 277—283.
12. S. Mardesic, J. Segal. Shape of compacta and ANR systems. *Fund. Math.*, **72**, 1971, 41—59.
13. M. McCord. Inverse limit sequences with covering maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114**, 1965, 197—214.
14. S. Godlewski. Solenoids of comparable shapes are homeomorphic. *Bull. Polon. Acad. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, **18**, 1970, 565—566.
15. A. Besicovitch. Almost periodic functions. New York, 1954.
16. S. Mardesic, J. Segal. $\varepsilon$-mapping onto polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109**, 1963, 146—164.
17. K. Borsuk. Theory of shape. Warszawa, 1975.
18. M. Fort, M. McCord. Approximation of maps of inverse limit spaces by induced maps. *Fund. Math.*, **59**, 1966, 323—329.
19. S. Godlewski. On shapes of solenoids. *Bull.Polon. Acad. Sci. Ser. Sci., Math. Astron. Phys.*, **17**, 1969, 623—628.
20. J. Keesling. On the shape of torus-like continua and compact connected topological groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **40**, 1973, 297—302.
21. J. Keesling. Continuous functions induced by shape morphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**, 1973, 315—320.
22. J. Keesling. An algebraic property of the Čech cohomology groups which prevents local connectivity and muvability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **190**, 1974, 151—162.
23. J. Keesling. Shape theory and compact connected abelian topological groups. Trans., Amer. Math. Soc., **194**, 1974, 349—358.
24. J. Keesling. Shape theory and topological groups. Lecture Notes in Math., **378**, 233—242.
25. C. Eberhard, G. Gordth. The shape classification of torus-like and ($n$-sphere)-like continua. *General Topology and Appl.*, **4**, 1974, 85—94.
26. K. Kuratowski, S. Ulam. Sur un coefficient lie aux transformations continues d'ensembles. *Fund. Math.*, **20**, 1933, 244—253.
27. K. Borsuk. A note on the shape of quasi-homeomorphic compacta. *Ann. Soc. Math. Polon. Ser.* I, **14**, 1970, 25—30.

*Единый центр математики и механики*
*1090 София П. Я. 373*

*Поступила 7. 10. 1978*