Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Д. ПОЙА О НЕПРИВОДИМОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

ЛИЛЯНА К. ДЕСИМИРОВА

Доказаны теоремы о неприводимости целочисленных многочленов над полем Q рациональных чисел. Обобщены результаты Пойа (1919) и Брауэра (1934).

В работе рассматриваются целочисленные многочлены вида

$$(1)\qquad f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)+\varepsilon(x),\ |\varepsilon(x_i)|=p^k,\quad i=1,\ 2,\dots n,$$

где $\{x_i\}_1^n=\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}$—целые, $\varepsilon(x)$ — целочисленный многочлен степени не выше $n-1$, a_0 — целое, p — простое число, k — натуральное число, $(a_0, p)=1$. Пойа [1] (для $n>17$) и позднее Брауер [2] (для $n>6$) доказали, что при $k=1$ многочлены (1) неприводимы над Q, если не могут быть представлены в виде произведения двух целочисленных многочленов одной и той же степени.

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *Если* $\max\{|\varepsilon(x_i)|: i=1,\ 2,\dots,\ n\}\leqq x_n-x_1$, *то многочлен* (1) *неприводим над полем Q для $n>6$.*

Теорема 2. *Если хотя бы два из чисел $\{x_i\}_1^n$ сравнимы между собою по модулю p, то для $k=1$ и $n>6$ многочлен* (1) *неприводим над Q.*

В следующих четырех теоремах будем предполагать, что числа $\{x_i\}_1^n$ несравнимы между собой по модулю p.

Теорема 3. *Многочлен* (1) *нечетной степени $n>5$ неприводим над Q.*

Теорема 4. *Многочлен* (1) *четной степени $n>6$ приводим над Q только тогда, когда имеет представление вида $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, где*

$$\varphi(x)=b_0\prod_{r=1}^{n/2}(x-\xi_r)+\varepsilon_1(x)=b_0\prod_{j=1}^{n/2}(x-\eta_j)+\varepsilon_3(x),\ |\varepsilon_1(\xi_r)|_1^{n/2}=p^k,\ |\varepsilon_3(\eta_j)|_1^{n/2}=1,$$

$$\psi(x)=c_0\prod_{r=1}^{n/2}(x-\xi_r)+\varepsilon_2(x)=c_0\prod_{j=1}^{n/2}(x-\eta_j)+\varepsilon_4(x),\ |\varepsilon_2(\xi_r)|_{r=1}^{n/2}=1,\ |\varepsilon_4(\eta_j)|_{j=1}^{n/2}=p^k$$

$$(2)\qquad \{\xi_r\}_1^{n/2}\cup\{\eta_j\}_1^{n/2}=\{x_i\}_1^n,\ \{\xi_r\}_1^{n/2}\cap\{\eta_j\}_1^{n/2}=\varnothing.$$

Для $n>8$ выполнены даже равенства $|\varepsilon_1(x)|=|\varepsilon_4(x)|\equiv p^k,\ |\varepsilon_2(x)|=|\varepsilon_3(x)|\equiv 1$.

Теорема 5. *Если многочлен* (1) *четной степени $n>8$ приводим над Q, то он имеет только вещественные и простые нули, находящиеся в интервале (x_1, x_n). В случае $n=8$ многочлен имеет в этом интервале не менее, чем четыре вещественных и простых нулей.*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с, 143—148.

Теорема 6. *Многочлены* (1) *степени* $n>6$, $n\neq 8$, 10, 16, 18, 20 *и* 24 *неприводимы над* Q.

При доказательстве этих теорем воспользуемся следующими известными утверждениями:

Теорема A [3, стр. 60]. *Если сравнение n-той степени* $g(x)\equiv 0 \pmod p$ *имеет более чем n решений, то все коэффициенты целочисленного многочлена* $g(x)$ *делятся на p*.

Теорема B [4]. *Если* $g(x)$ — *целочисленный многочлен степени* $n\geq 4$, *то уравнение* $|g(x)|=1$ *имеет не более, чем n различных целых решений. Если* $n<4$, *исключение составляют только многочлены*

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & F_1(x)=(x-x_0+2)(x-x_0+1)(x-x_0-1)+1,\ F_2=(x-x_0)(x-x_0-1)-1,\\
& F_3(x)=2(x-x_0-1)(x-x_0+1)+1,\ F_4(x)=2(x-x_0)-1,\ F_5(x)=x-x_0
\end{aligned}
$$

(x_0 — *произвольное целое число), которые удовлетворяют равенствам*

$$|F_1(x)|=1,\ \text{для}\ x=x_0-2,\ x_0-1,\ x_0,\ x_0+1;$$

$$|F_2(x)|=1,\ \text{для}\ x=x_0-1,\ x_0,\ x_0+1,\ x_0+2;$$

$$|F_3(x)|=1,\ \text{для}\ x=x_0-1,\ x_0,\ x_0+1;$$

$$|F_4(x)|=1,\ \text{для}\ x=x_0,\ x_0+1;$$

$$|F_5(x)|=1,\ \text{для}\ x=x_0-1,\ x_0+1,$$

и все многочлены, которые получаются из $\{F_i(x)\}_1^5$ *подстановками* $z=x$ *и* $z=-x$.

Непосредственно видно, что все корни многочленов $\{F_i(x)\}_1^5$ вещественные, простые и все находятся соответственно внутри интервала решений уравнения $|F_i(x)|_1^5=1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$.

Теорема C [5]. *Все нули многочленов вида* (1) *при* $|\varepsilon(x)|\equiv 1$ *и* $n>4$ *вещественные и простые, притом не менее* $n-2$ *из них находятся в интервале* (x_1, x_n).

Теорема D [5]. *Для любого многочлена* $\varphi(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$ *и для чисел* $\{x_i\}_1^n=\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}$, *где* $n-[n/2]\leqq m\leqq n-1$, *выполняется неравенство*

$$\max\{|\varphi(x_i)|:\ i=1, 2, \ldots, n\}\geqq |b_0|2^{-m}(2m+1-n)!\,(2m+3-n)\ldots(n-3)(x_n-x_1).$$

Теорема E [7]. *Для любого многочлена* $\varphi(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$ *и для чисел* $\{x_i\}_1^n=\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}$ *выполняется неравенство*

$$\max\{|\varphi(x_i):\ i=1,\ 2, \ldots, n\}\geq |b_0|2^{-m}D(1)D(2)\ldots D(m),\ D(k)=\min(x_{k+1}-x_i),$$
$$i=1, \ldots, m-k+1.$$

Теорема F [8]. *Если целочисленный многочлен* $f(x)$ *степени n принимает значения* p^k (p — *простое) в целых точках* $x_1<x_2<\cdots<x_t$, *не сравнимых между собой по модулю p, где* $t>4n/5$, *то* $f(x)$ *либо неприводим над* Q, *либо разлагается на множители, степень которых может быть равной* 4, 5, 8, 9, 10 *или* 12.

Для доказательства теорем 1—6, нам понадобятся еще следующие леммы:

Лемма 1. *Многочлены* $F_i(x)$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ *могут принимать соответственно вне интервалов* $\Delta_1=[x_0-2,\ x_0+1]$, $\Delta_2=[x_0-1,\ x_0+2]$, $\Delta_3=[x_0-1,\ x_0+1]$, $\Delta_4=[x_0,\ x_0+1]$, $\Delta_5=[x_0-1,\ x_0+1]$ *одинаковые по абсолютной величине значения не более, чем в двух точках.*

Доказательство. Для многочлена $F_1(x)$ равенство $|F_1(x)|=1$ выполняется для последовательных целых чисел x_0-2, x_0-1, x_0, x_0+1. Очевидно, что экстремумы $F_1(x)$ находятся внутри интервала Δ_1. Вне этого интервала $F_1(x)$ строго монотонен, и, следовательно, для любого целого значения $X_1\notin\Delta_1$ можно найти не более, чем одно целое число $X_2\neq X_1$, для которого $|F_1(X_1)|=|F_1(X_2)|$. Этим лемма и доказана, ввиду того, что для многочленов $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ и $F_5(x)$ утверждение леммы очевидно.

Лемма 2. *Многочлен* (1) *примитивен.*

Доказательство. Так как $\varepsilon(x)$ в (1) целочисленный многочлен степени $\leqq n-1$, из равенства $|\varepsilon(x_i)|_1^n=p^k$ следуют сравнения $\varepsilon(x_i)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Из теоремы А следует, что $\varepsilon(x)=p\,\varepsilon_{(1)}(x)$, где $\varepsilon_{(r)}(x)$ многочлен степени $\varepsilon(x)$. Из $|\varepsilon(x_i)|=p\,|\varepsilon_1(x_i)|=p^k$ получаем $|\varepsilon_{(1)}(x_i)|_1^n=p^{k-1}$ и для $\varepsilon_{(1)}(x)$ выполняются сравнения $\varepsilon_{(1)}(x_i)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$. Теорема А приводит к $\varepsilon_{(1)}(x)=p\,\varepsilon_2(x)$ и т. д. Для $\varepsilon_{(k-1)}(x)$ получаем $\varepsilon_{(k-1)}(x)=p\,\varepsilon_{(k)}(x)$. Следовательно, многочлен $\varepsilon(x)$ можно записать в виде $\varepsilon(x)=p^k\,\varepsilon_{(k)}(x)$.

Покажем теперь, что многочлен имеет форму

$$(1') \qquad f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)+\varepsilon\,p^k,\quad \varepsilon=\pm 1$$

в случаях: а) $n\geqq 5$; б) $\varepsilon_{(k)}(x)\notin\{F_i(x)\}_1^5$.

Пусть $\varepsilon_{(k)}(x)\notin\{F_i(x)\}_1^5$. Из равенства $|\varepsilon(x_i)|=p^k=p^k\,|\varepsilon_{(k)}(x_i)|$, $i=1, 2, \ldots, n$ следует, что $|\varepsilon_{(k)}(x_i)|=1$ для $i=1, 2, \ldots, n$. Вследствие теоремы В это возможно только тогда, когда $\varepsilon_k(x)=\varepsilon$. Если $n\geqq 5$, из равенства $|\varepsilon_k(x_i)|=1$ и теоремы В следует, что $\varepsilon_k(x)=\varepsilon$. Ввиду условия $(a_0, p)=1$ получаем, что многочлен (1) примитивен.

Пусть $n<5$ и $\varepsilon_k(x)\subset\{F_i(x)\}_1^5$. Предположим, что в этом случае многочлен (1) не является примитивным, т. е. $f(x)=b_0(c_0\prod_{i=1}^n(x-x_i)+p^k\,\overline{\varepsilon_{(k)}}(x))$, где $a_0=b_0c_0$ и $\varepsilon_{(k)}(x)=b_0\overline{\varepsilon_{(k)}}(x)$. Из равенства $|p^kb_0\,\overline{\varepsilon_{(k)}}(x)|=p^k$ следует, что $|b_0\overline{\varepsilon_{(k)}}(x_i)|=1$. Но это возможно только в случае $|b_0|=1$, так как многочлен $\overline{\varepsilon_{(k)}}(x)$ целочисленный. Получаем, что и в этом случае многочлен (1) примитивен. Этим доказательство леммы 2 и завершено.

Лемма 3. *Если многочлен* (1) *степени* $n>6$ *можно представить в виде* $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, *где* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *целочисленные многочлены, то многочлены* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *имеют вид* (2).

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x)$ — целочисленный многочлен степени $m\neq 0$, $\psi(x)$ — соответственно степени $n-m$. Из (1) получаем $f(x_i)|_1^n=|\varphi(x_i)|_1^n|\psi(x_i)|_1^n=p^k$. Тогда очевидно $|\varphi(x_i)|_1^n=p^{s_i}$, $0\leqq s_i\leqq k$. Обозначим через $\{\xi_r\}$ множество тех значений $x\in\{x_i\}_1^n$, для которых $|\varphi(x_i)|=p^{s_i}$ $s_i\neq 0$ и через $\{\eta_j\}$ — множество тех значений $x\in\{x_i\}_1^n$, для которых $|\varphi(x_i)|=1$, т. е. $\{\xi_r\}_1^{m_1}\subset\{x_i\}_1^n$, $\{\eta_j\}_1^{m_2}\subset\{x_i\}_1^n$, $\{\xi_r\}_1^{m_1}\cup\{\eta_j\}_1^{m_2}=\{x_i\}_1^n$, $\{\xi_r\}_1^{m_1}\cap\{\eta_j\}_1^{m_2}=\varnothing$ $m_1+m_2=n$. Все это приводит к равенствам $|\varphi(\xi_r)|_1^{m_1}=p^{s_r}$, $|\varphi(\eta_j)|_1^{m_2}=1$, $|\psi(\eta_j)|_1^{m_1}=p^k$.

Числа m_1 и m_2 удовлетворяют неравенства: $m_1 \leqq m_1$; $m_2 \leqq n-m$. Это утверждение непосредственно следует из теоремы А, равенства $|f(x_i)| = p^k$ и примитивности многочлена (1). Тем более, для чисел m_1 и m_2 выполняются равенства: $m_1 = m$; $m_2 = n-m$. Предположим, что $m_1 < m$. Из $m_2 = n - m_1$ и сделанного предположения следует, что $m_2 > n-m$. Это неравенство противоречит неравенству $m_2 \leqq n-m$. Следовательно, $m_1 = m$ и $m_2 = n-m$.

Из $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, $|\varphi(\xi_r)|_1^{m_1} = p^{s_r}$, $|\psi(\eta_j)|_1^{n-m} = 1$, $m_1 = m$, $m_2 = n-m$, следуют равенства:

$$(4) \qquad |\varphi(\xi_r)|_1^m = p^k, \ |\varphi(\eta_j)|_1^{n-m} = 1, \ |\psi(\eta_j)|_1^{n-m} = p^k, \ |\psi(\xi_r)|_1^m = 1.$$

Покажем, что $s_r = k$. Предположим, что $s_r < k$. Из теоремы А и равенства 4 следует, что $\psi(x)$ не является примитивными многочленом, и это противоречит тому, что $f(x)$ примитивен. Следовательно, получаем $s_r = k$.

Следствие 1. *Если* $\varphi(x) \in \{F_i(x)\}_1^5$, *то* $m = n-m$.

Предположим, что $m < n-m$. Из теоремы В и равенств (4) следует, что $|\varphi(x)| \equiv 1$, т. е. $f(x)$ является неприводимым, и это противоречит условию $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

Следствие 2. *Многочлен* (1) *степени* $n \geqq 8$ *не имеет делителей степени ниже* $n/2$.

Предположим, что $m < n-m$, тогда $n-m > 4$. Из теоремы В и равенств (4) следует, что $|\varphi(x)| \equiv 1$, но это противоречит условию $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

Следствие 3. *Представление* $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ *многочлена* (1) *нечетной степени невозможно, если* $n > 7$.

В случаях: $n = 7$; $m = 1$ и $n = 7$; $m = 2$ и $n > 7$, для $f(x)$ выполняется следствие 2. Если $m = 3$, $n = 7$ и $\varphi(x) \in \{F_i(x)\}_1^5$, т. е. когда $\varphi(x) = F_1(x)$, пусть выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Тогда $|\varphi(\eta_j)|_1^4 = 1$, $|\psi(\eta_j)|_1^4 = p^k$, $|\psi(\xi_r)|_1^3 = 1$ и, следовательно, $|\varphi(\xi_r)|_1^3 = p^k$. Это равенство однако противоречит лемме 1 Таким образом следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Для многочлена* (1) *степени* $n = 5$ *представление* $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ *возможно только, если он имеет делитель* $F_2(x)$ *или* $F_3(x)$, *а для* $n = 3$ *соответственно* — $F_4(x)$ *или* $F_5(x)$.

Из следствия 1 получаем, что представление $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ многочлена (1) нечетной степени возможно только тогда, когда $\varphi(x) \in \{F_i(x)\}_1^5$. Для $n = 5$ утверждение следует из леммы 1, а для $n = 3$ является очевидным.

Примечание. Из примечания к теореме В и следствия 2 следует, что все приводимые многочлены вида (1) нечетной степени имеют вещественные нули внутри интервала (x_1, x_n).

Следствие 5. *Если степень* $n > 6$ *четная, то* $m = n-m$.

Предположим, что $m < n-m$ и $n > 8$. Ввиду того, что $m < n/2$, выполняется неравенство $n - n/2 < n-m$, т. е. $n-m > 4$ или для $f(x)$ выполняется следствие 2. Если $n = 8$, непосредственно видно, что в случае $\varphi(x) \notin \{F_i(x)\}_1^5$ для $f(x)$ имеет место следствие 1, а в случае $\varphi(x) \in \{F_i(x)\}_1^5$ — следствие 2. Следовательно, многочлены четной степени $n > 6$ могут быть представлены в виде $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ только, если $m = n-m$. В этом случае $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют равенствам (4) для $r = 1, 2, \ldots n/2$, $j = 1, 2, \ldots, n/2$. Отсюда следует, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют форму (2). Этим доказательство леммы 3 завершено.

Следствие 6. *Если $n \geqq 8$, то $\varepsilon_2(x)$ и $\varepsilon_3(x)$ имеют вид* (2) *и по абсолютной величине равняются единице, а $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_4(x)$ по абсолютной величине соответственно равняются p^k.*

Действительно, если $n \geqq 10$, утвърждение верно для многочлена (1) в силу следствия 3 и 5 и (1′). Из $n/2 \geqq 5$ следует, что для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ выполняются (2) и (1′). Ввиду примитивности (1) получаем искомое. Если $n=8$, применяя теоремуВ, получаем, что $|\varepsilon_1(x)| \neq p^k$, $|\varepsilon_2(x)| \neq 1$, $|\varepsilon_3(x)| \neq 1$, $|\varepsilon_4(x)| \neq p^k$ тогда и только тогда, когда $\overline{\varepsilon_1(x)} \in \{F_i(x)\}_1^5$, $\overline{\varepsilon_4(x)} \in \{F_i(x)\}_1^5$, $\varepsilon_1(x) = p^k\,\overline{\varepsilon_1(x)}$ и $\varepsilon_4(x) = p^k\,\overline{\varepsilon_4(x)}$. Имея ввиду свойства многочленов (3), условие $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ и равенства (2), во всех случаях получаем противоречие. Следствие 6 доказано.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Phi(x) = a_0\Pi_{i=1}^n(x-x_i) + \varepsilon(x)$ приводим над Q, $n \geqq 9$ и $\max\{|\varepsilon(x_i)|;\ i=1,2,\ldots,n\} \leqq x_n - x$, $\max\{|\Phi(x_i)|;\ i=1,2,\ldots,n\} = \max\{|\varepsilon(x_1)|;\quad i=1,2,\ldots,n\}$, $\Phi(x) = \varphi(x)\psi(x)$, $\varphi(x)$ имеет степень $m \geqq n-[n/2]$. Очевидно выполняется неравенство $\max\{|\varepsilon(x_i)|\} \geqq \max\{|\varphi(x)|\}$. Вследствие теоремы E $\max\{|\varphi(x_i)|\} \geqq 2^{[n/2]-n}(n-3)!!\,(x_n - x_1)$ и для $n \geqq 9$ имеем $2^{[n/2]-n}(n-3)!! > 1$. Следовательно, $\max\{|\Phi(x_i)|, i=1,2,\ldots,n\} = \max\{|\varepsilon(x_i)|,\quad i=1,2,\ldots,n\} \geqq \max\{|\varphi(x_i)|,\quad i=1,\ldots,n\} > x_n - x_1$, что является противоречием. Этим теорема 1 и доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $k=1$ и хотя бы для двух из чисел x_k и x_l выполняется сравнение $x_l - x_k \equiv 0 \pmod p$. Очевидно $x_k \geqq x_1$ и $x_l \leqq x_n$. Следовательно, $x_n - x_1 \geqq p$. Для многочленов (1), если $|\varepsilon(x_i)| = p$ и $n > 8$, выполнена теорема 1. Пусть $n=8$. Вследствие теоремы Брауера [2], если многочлен (1) приводим, т. е. $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, то $\varphi(x)$ многочлен степени 4. Вследствие теоремы D: $\max\{|\varphi(x_i)|,\quad i=1,\ldots,8\} \geqq \max\{|\varphi(\xi_i)|, j=1,\ldots,5\} \geqq 2^{-4}D(1)D(2)D(3)D(4)$. Числа $\{\xi_j\}_1^5$ можно подобрать произвольным образом из чисел $\{x_i\}_1^8$. Полагаем $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_5$, $\xi_4 = x_7$, $\xi_5 = x_8$. Для $D^{(k)}$ получаем: $D(1) \geqq 1$, $D(2) \geqq 3$, $D(3) \geqq 6$, $D(4) \geqq p$. Следовательно, $\max\{|f(x_i)|, i=1,2,\ldots,8\} = p \geqq \max\{|\varphi(x_i)|,\quad i=1,2,\ldots,8\} \geqq 2^{-4}.3.6\,p$ или $p > p$. Это противоречие и доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что многочлен (1) приводим, $n = 2l-1$ и $n > 5$. Следствие 3 леммы 3 показывает, что это невозможно. Этим теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $n = 2l$, $l > 3$ и $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Из следствий 1, 2, 3, 5 леммы 3 видно, что это возможно только в случае $m = n/2$. Из равенства $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ и следствия 6 непосредственно следует равенство (2) и утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Предположим, что многочлен (1) приводим и нарушено хотя бы одно из условий теоремы 5. Из следствий 5, 6 и леммы 2 видно, что приводимые многочлены (1) удовлетворяют равенствам (2). Пусть $n \geqq 10$, из равенств (2) и теоремы C видно, что все нули многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вещественные, простые и по крайней море $n/2-2$ из них находятся в интервалах (ξ_1, ξ_l), (η_1, η_l). Если $n=8$, имея ввиду следствие 6, получаем, что многочлен (1) имеет не меньше $n-4$ вещественных и простых нулей, находящихся в интервалах (x_1, x_n). Этим доказательство теоремы 5 и закончено.

Доказательство теоремы 6 следует непосредственно из теорем 2, 3 и 4.

Из наших теорем 2, 3, 4 и из теоремы F Рейнолдса [8] в качестве непосредственного следствия можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 7. *Целочисленный примитивный многочлен $f(x)$ степени n, который для n различных целых чисел $\{x_i\}_1^n$ принимает по абсолютной величине одно и то же простое число p, неприводим над полем рациональных чисел Q, если:* а) $n>24$; б) $n>6$ *и хотя бы две из чисел* $\{x_i\}_1^n$ *сравнимы между собою по модулю* p; в) $n>6$ *и* $n \neq 8$, 10, 16, 18, 20 *и* 24; г) $n>6$ *и* $n=8$, 10, 16, 18, 20 *и* 24, *если не имеет целочисленные множители вида* (2); д) *если не все нули многочлена* $f(x)$ *вещественные и простые.*

Теорема 7 обобщает и усиливает теоремы Пойа [1] и Брауера [2].

В виде непосредственного следствия из наших теорем 3, 4, 5 и 7 в случае $n \geqq 3$ можно получить теорему 1 из [9; 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya. Verschieddene Bemerkungen zur Zahlentheorie. *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* **28**, 1919, 31—40.
2. A. Brauer. Bemerkungen zu einem Satze von Hern Polya. *Jahresber. Deutch. Math. Ver.*, **43**, 1934, 124—125.
3. И. Виноградов. Основы теории чисел. Москва, 1949.
4. W. Brouwn, R. Graham. An irreducibility criterium for polynomials over the integers. *Amer. Math. Monthly*, **76**, 1969, 795—797.
5. Л. Десимирова. Върху разпределението на реалните нули на една класа функции с отделено ядро. *Годишник ВТУЗ, Мат.*, **13**, 1977, кн. 3, 17—30.
6. Л. Десимирова. Некоторые теоремы о неприводимости целочисленных многочленов, *Сердика*, **5**, 1979, 340—343.
7. T. Tatuzawa. Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15**, 1939, 253—255.
8. J. O. Peynolds. On the irreducibility of certain polynomials. *J. Elisa Mitchell Sci. Soc.*, **63**, 1947, 120—132.
9. Д. Пиргов, Е. Кантарджиева. Теоремы за неразложимост на целочислени полиноми в полето на рац. числа, които приемат стойности степени на просто число. *Известия Мат. инст. БАН*, 11, 1969, 2, 273—278.
10. Д. Пиргов, Д. Токарев. Теореми за неразложимост на целочислени полиноми в полето на рац. числа. *Годишник ВТУЗ, Мат.*, **4**, 1967, кн. 2, 11—17.

Высший химико-технологический институт, София

Поступила 11. 12. 1978