Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ЖЕСТКОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗНАКОПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ОДНОЗНАЧНО ПРОЕКТИРУЮЩИХСЯ НА ПЛОСКОСТЬ

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Сформулированы достаточные условия жесткости одного класса поверхностей. При помощи этих условий исследованы некоторые геометрические задачи из теории бесконечно малых изгибаний поверхностей. Рассмотрены три примера.

1. Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой получены достаточные условия жесткости одного класса однозначно проектирующихся на плоскость поверхностей. Так как изложение в [1] весьма сжато, то здесь в пунктах 2 и 3 даются некоторые разъяснения и дополнения к полученным там результатам. В пункте 4 рассматриваются несколько геометрических задач из теории бесконечно малых (б. м.) изгибаний, решение которых вытекает из результатов в [1]. Пункт 5 посвящен двум примерам. В пункте 6 даются достаточные условия жесткости одной конкретной поверхности, которая не принадлежит рассматриваемому в [1] классу. Вопросы, исследуемые в этой работе, появились в результате одной беседы с И. Х. Сабитовым в июне 1978 года, которому, пользуясь случаем, выражаю благодарность.

2. Для уравнения

$$a^{11}(x,y)\zeta_{xx}+2a^{12}(x,y)\zeta_{xy}+a^{22}(x,y)\zeta_{yy}=g(x,y), \tag{1}$$

где $a^{ij}\in C^1(\overline{G})$, $i,j=1,2$, $g\in C(\overline{G})$, G — ограниченная конечно-связная область, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G ($D=a^{11}a^{22}-a^{12^2}$, может менять свой знак), при условиях

$$a^{12}_x=-a^{22}_y,\ a^{12}_y=-a^{11}_x \quad \text{на } \overline{G}, \tag{2}$$

$$a^{11}_y>0,\quad a^{11}_ya^{22}_y-(a^{11}_x)^2>0 \quad \text{на } \overline{G}, \tag{3}$$

в работе [1] поставлены две краевые задачи — задача (3), (11) и задача (3) (11′) (см. обозначения в [1]). Ниже эти задачи будем обозначать соответственно Z и Z'. Для задач Z и Z' доказана теорема единственности решения $\zeta(x,y)\in C^1(\overline{G})\cap C^2(G)$ (см. [1, теорема 1 и замечание 1]). Доказательство этой теоремы проводится при помощи известного метода „a, b, c". В задаче Z' функции α,β,γ выбраны следующим образом: $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\beta_1x+\beta_2>0$, где β_1 — фиксированная постоянная, β_2 — достаточно большая положительная постоянная. Тогда квадратичная форма $A(\zeta_x,\zeta_y)$ (см. [1, (5)]) положительно определена в $\overline{G}$, а квадратичная форма $B(\zeta_x,\zeta_y)$ (см. [1, (6)]) имеет представление

(4) $$B(\zeta_x, \zeta_y)=\frac{\beta}{n_2}\,[-a^{11}(\zeta_x n_2-\zeta_y n_1)^2+H\zeta_y^2] \quad \text{при } n_2\neq 0,$$

(5) $$B(\zeta_x, \zeta_y)=2\beta n_1(a^{11}\zeta_x\zeta_y+a^{12}\zeta_y^2) \quad \text{при } n^2=0,$$

где n — единичный вектор внешней нормали к гладкой части Γ границы ∂G. Из (4), (5) и [1] видно, что условия (2) и (3) обеспечивают единственность решения краевой задачи Z'. Более того, она имеет место (см. [1, замечание 2]) и когда условия (3) выполнены на множестве $\widehat{G}<\overline{G}$, всюду плотном в $\overline{G}$ (для этого надо выбрать $\beta_1=0$).

Иначе обстоит дело с единственностью решения задачи Z. Там $\gamma\equiv 0$, $\alpha=\alpha_1 x+\alpha_2$, $\beta=-\lambda\alpha$, где α_1 — фиксированная постоянная, α_2 — такая отрицательная постоянная, что $\alpha<0$ в $\overline{G}$ и λ—достаточно большая положительная постоянная. В ходе доказательства предположено (см. [1, стр. 506]), что $\lambda>\sup(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где λ_1 и λ_2 — корни квадратного трехчлена $a^{11}\lambda^2+2a^{12}\lambda+a^{22}$ в произвольной гиперболической точке $(x, y)\in\partial G$, в которой $a^{11}\neq 0$, а λ_3 — корень этого трехчлена в произвольной точке $(x, y)\in\partial G$, в которой $a^{11}=0$, $a^{12}\neq 0$. Это предположение накладывает следующие ограничения на коэффициенты a^{ij}, $i, j=1, 2$:

а) на части ∂G_1 границы ∂G, которая состоит из всех гиперболических точек, в которых $a^{11}\neq 0$, функции $\lambda_{1,2}=(-a^{12}\pm[a^{12^2}-a^{11}a^{22}]^{1/2})/a^{11}$ должны быть ограниченными сверху;

б) на части ∂G_2 границы ∂G, состоящей из всех гиперболических точек, в которых $a^{11}=0$, $a^{12}\neq 0$, функция $\lambda_3=-a^{22}/(2a^{12})$ должна быть ограничена сверху.

Обозначим ∂G_{11} (∂G_{21}) множество этих точек границы ∂G_1 (∂G_2), в которых хотя бы одно из характеристических направлений имеет отрицательный угловой коэффициент. Ограничение а) геометрически означает, что в каждой точке границы ∂G_{11} острый угол φ_1, образуемый направлением оси Oy с каждым характеристическим направлением в этой точке, которое имеет отрицательный угловой коэффициент (такими могут быть и оба характеристических направления), должен быть отделен от нуля, т. е. должно иметь место неравенство $\varphi_1|_{\partial G_{11}}\geqq\alpha_0>0$, $\alpha_0=\text{const}$. Аналогично, ограничение б) означает, что в точках границы ∂G_{21} острый угол φ_2 между двумя характеристическими направлениями тоже должен быть отделен от нуля, т. е. должно иметь место неравенство $\varphi_2|_{\partial G_{21}}\geqq\beta_0>0$, $\beta_0=\text{const}$ (в случае б)—одно из характеристических направлений совпадает с направлением оси Oy).

В ходе доказательства единственности задачи Z предположено еще, что константу λ можно выбрать столь большой, что $n_1-\lambda n_2\neq 0$ и $\operatorname{sgn}(n_1-\lambda n_2)=-\operatorname{sgn}(n_2)$ при $n_2\neq 0$. Это предположение накладывает на границу ∂G следующее ограничение:

в) в тех гладких точках ∂G, где $n_2\neq 0$ и $\operatorname{sgn}(n_1)=\operatorname{sgn}(n_2)$, граница должна быть такой, что $|n_2|\geqq c>0$, $c=\text{const}$.

Таким образом единственность решения задачи Z имеет место при условиях (2), (3) и ограничениях а), б) и в).

Замечание 1. Разбиения множества Γ гладких точек границы ∂G для задач Z и Z' различные — $\Gamma=\cup_{i=1}^4\Gamma^i$ для Z и $\Gamma=\cup_{i=1}^4\widetilde{\Gamma}^i$ для Z' (см. [1, стр. 507—508]). Устанавливается, что $\Gamma^1\supset\widetilde{\Gamma}^1$, $\Gamma^3\supset\widetilde{\Gamma}^3$, $\widetilde{\Gamma}^2\supset\Gamma^2$, $\widetilde{\Gamma}^4\supset\Gamma^4$.

З а м е ч а н и е 2. Из краевых условий $\zeta_{|\Gamma^3}=\zeta_x-\lambda\zeta_{y|\Gamma^3}=0(\zeta_{|\tilde{\Gamma}^3}=\zeta_{y|\tilde{\Gamma}^3}=0)$ следуют условия $\zeta_{x|\Gamma^3}=\zeta_{y|\Gamma^3}=0$ $(\zeta_{x|\tilde{\Gamma}^3}=\zeta_{y|\tilde{\Gamma}^3}=0)$, так как $n_1-\lambda n_{2|\Gamma^3} \neq 0$ $(n_{2|\tilde{\Gamma}^3}\neq 0)$.

З а м е ч а н и е 3. Единственность решения $\zeta(x, y)$ задачи $Z(Z')$, когда (3) имеет место в $\bar{G}$, доказана в классе $\zeta < C_L \cap C^1(\Gamma^1 \cap \Gamma^3)$ $(\zeta \subset C_L \cap C^1(\tilde{\Gamma}^1 \cup \tilde{\Gamma}^3))$, поскольку из $\zeta=0$ вдоль $\Gamma^1 \cup \Gamma^3(\tilde{\Gamma}^1 \cup \tilde{\Gamma}^3)$ должно следовать $\zeta_x n_2-\zeta_y n_1=0$ вдоль $\Gamma^1 \cup \Gamma^3(\tilde{\Gamma}^1 \cup \tilde{\Gamma}^3)$.

З а м е ч а н и е 4. Теорема единственности имеет место и тогда, когда в задаче $Z(Z')$ краевые условия $\zeta_{|\Gamma^1}=\zeta_{|\Gamma^3}=\zeta_x-\lambda\zeta_{y|\Gamma^3}=0$ $(\zeta_{|\tilde{\Gamma}}=\zeta_{|\tilde{\Gamma}^3}=\zeta_{y|\tilde{\Gamma}}=0)$ заменены краевыми условиями $\zeta_{|\Gamma^1}=\mathrm{const}$, $\zeta_{|\Gamma^3}=\mathrm{const}$, $\zeta_x-\lambda\zeta_{y|\Gamma^3}=0$ $(\zeta_{|\tilde{\Gamma}^1}=\mathrm{const}$, $\zeta_{|\tilde{\Gamma}^3}=\mathrm{const}$, $\zeta_{y|\tilde{\Gamma}^3}=0)$ и $\Gamma^1 \cup \Gamma^3 \neq \varnothing$ $(\tilde{\Gamma}^1 \cup \tilde{\Gamma}^3 \neq \varnothing)$. На отдельных связных компонентах множеств Γ^1 и $\Gamma^3(\tilde{\Gamma}^1$ и $\tilde{\Gamma}^3)$ эти константы могут быть разными. В случае однородного уравнения (1) соответствующие задачи имеют единственное решение $\zeta=\mathrm{const}$, когда $\zeta_{|\Gamma^1}=\zeta_{|\Gamma^3}=\mathrm{const}$ $(\zeta_{|\tilde{\Gamma}^1}=\zeta_{|\tilde{\Gamma}^3}=\mathrm{const})$.

З а м е ч а н и е 5. Краевые условия $\zeta_x n_2-\zeta_y n_{1|\Gamma^3}=\mathrm{const}, \zeta_x-\lambda\zeta_{y|\Gamma^3}=0(\zeta_x n_2-\zeta_y n_{1|\tilde{\Gamma}^3}=0$ $\zeta_{y|\tilde{\Gamma}^3}=0)$ эквивалентны условиям $\zeta_{x|\Gamma^3}=\zeta_{y|\Gamma^3}=0$ $(\zeta_{x|\tilde{\Gamma}^3}=\zeta_{y|\tilde{\Gamma}}=0)$, так как $n_1-\lambda n_{2|\Gamma^3}\neq 0$ $(n_{2|\tilde{\Gamma}^3}\neq 0)$.

3. При помощи теоремы единственности решения задач Z и Z' в [1] получены некоторые достаточные условия жесткости поверхностей. Сформулируем только те условия, которые вытекают из задачи Z' и замечания **4.**

Пусть U — поле б. м. изгибания поверхности S, E — фиксированная плоскость, n_E — нормаль к E и ν — фиксированное направление в E.

Бесконечно малыми изгибаниями обобщенного скольжения поверхности S вдоль кривой $L \subset S$ относительно плоскости E будем называть такие б. м. изгибания поверхности, при которых $\zeta_{|L}=c_1=\mathrm{const}\neq 0$, где $\zeta=n_E U$. В частности б. м. изгибания, при которых $\zeta_{|L}=0$, т. е. когда точки кривой L не получают смещений ортогональной плоскости E, будем называть б. м. изгибаниями скольжения поверхности S вдоль L относительно E [2].

Бесконечно малые изгибания поверхности S (однозначно проектирующейся на плоскость E), при которых $\zeta_{\nu|L_1}=0$, где L_1 — проекция кривой L на E, будем называть ν-б. м. изгибаниями поверхности вдоль кривой $L \subset S$ относительно плоскости E (через ζ_ν обозначена производная функции ζ по направлению $\nu \mathbf{Z} E$).

Пусть поверхность S однозначно проектируется на плоскость E. Тогда ее уравнение имеет вид

$$z=f(x_1, y_1), \ (x_1, y_1) \in \bar{G} \subset E. \tag{6}$$

Предположим, что: G — ограниченная конечно-связная область, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G, $f(x_1, y_1) \in C^3(\bar{G})$ и в E существует направление $l(l_1, l_2)$ такое, что для него и для перпендикулярного ему направления $\bar{l}(l_2, -l_1)$ выполнены неравенства

$$f_{lll}>0, \ f_{lll} f_{\bar{l}\bar{l}\bar{l}}-f^2_{ll\bar{l}}>0 \tag{7}$$

на множестве $\tilde{G} \subset \bar{G}$, всюду плотном в $\bar{G}$. Пусть n — единичный вектор внешней нормали к Γ (Γ — гладкая часть ∂G) и $H=f_{ll}\cos^2\theta-2f_{\bar{l}l}\cos\theta\cos\bar{\theta}$

$+f_{\bar{l}\bar{l}}\cos^2\theta$, где $\theta=(l, n)_e$, $\bar{\theta}=(\bar{l}, n)_e$, $0\leqq\theta, \bar{\theta}\leqq\pi$. Представим границу Γ следующим образом: $\Gamma=\cup_{i=1}^{4}\tilde{\Gamma}^i$, $\tilde{\Gamma}^j\cap\tilde{\Gamma}^k=\emptyset$, $j\neq k$, где на множестве $\tilde{\Gamma}^1$— $H\cos\theta\geqq 0$, $f_{ll}\cos\theta>0$; на множестве $\tilde{\Gamma}^2$ — или а) $H\cos\theta<0$, $f_{ll}\cos\theta\leqq 0$ или б) $n=\varepsilon\bar{l}$, $\varepsilon=\pm 1$ и или $f_{ll}\neq 0$, или $f_{ll}=0$ и $\varepsilon f_{l\bar{l}}>0$; на множестве $\tilde{\Gamma}^3$—$H\cos\theta<0$, $f_{ll}\cos\theta>0$; на множестве $\tilde{\Gamma}^4$ — или а) $\theta\neq\pi/2$, $H\cos\theta\geqq 0$, $f_{ll}\cos\theta\leqq 0$ или б) $n=\varepsilon\bar{l}$, $\varepsilon=\pm 1$, $f_{ll}=0$, $\varepsilon f_{l\bar{l}}\leqq 0$.

При помощи этого разбиения границы Γ для границы Γ_S поверхности S получаем $\Gamma_S=\cup_{i=1}^{4}{}^c\tilde{\Gamma}^i_S$, где ${}^c\tilde{\Gamma}^i_S$ — замыкание множества $\tilde{\Gamma}^i_S$, а $\tilde{\Gamma}^i_S$ — прообраз части $\tilde{\Gamma}^i$, $i=1, 2, 3, 4$, при проектировании поверхности S на плоскость E. (Отметим, что некоторые из множеств $\tilde{\Gamma}^i_S$, $i=1, 2, 3, 4$, могут быть пустыми.) Обозначим через $\tilde{\Gamma}^{2_1}_S$ ту часть границы $\tilde{\Gamma}^2_S$, которая проектируется на E в отрезки, параллельные направлению l.

Будем говорить, что поле U б. м. изгибания поверхности S принадлежит классу $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, если $\zeta\in C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$. Имеют место следующие теоремы (см. теоремы 2, 3 и замечание 3 в [1], и замечание 4 здесь):

Теорема 1. *Поверхность* (6), (7) *жестка относительно б. м. изгибаний класса* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, *которые: вдоль* $\tilde{\Gamma}^1_S$ *являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно плоскости* E; *вдоль* $\tilde{\Gamma}^2_S$ — l-*изгибаниями относительно* E; *вдоль* $\tilde{\Gamma}^3_S$ — *изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) и* l-*изгибаниями относительно* E, *а вдоль границы* $\tilde{\Gamma}^4_S$ *на изгибания не накладываются никакие условия.*

Теорема 2. *Поверхность* (6), (7), *имеющая границу* $\Gamma_S={}^c\tilde{\Gamma}^1_S\cup{}^c\tilde{\Gamma}^{2_1}_S\cup{}^c\tilde{\Gamma}^4_S$, *жестка относительно б. м. изгибаний класса* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, *которые вдоль* $\tilde{\Gamma}^1_S\cup\tilde{\Gamma}^{2_1}_S$ *являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно* E, *а вдоль границы* $\tilde{\Gamma}^4_S$ *на изгибания не накладываются никакие условия (см. п. 5, рис. 1, 2; там* $\tilde{\Gamma}^4$ *обозначена жирными линиями).*

Следствие 1. *Поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы 2, жестка относительно б. м. изгибаний класса* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, *если граница* $\tilde{\Gamma}^1_S\cup\tilde{\Gamma}^{2_1}_S$ *закреплена, а граница* $\tilde{\Gamma}^4_S$ *свободна.*

Как мы уже отметили, для доказательства этих утверждений существенно используется доказанная в [1] теорема единственности решения задачи Z'. Отметим только, что сначала надо заменить координатную систему Ox_1y_1z координатной системой $Oxyz$, где ось Ox определена через $\bar{l}$, а Oy — через l. Тогда поверхность S будет иметь уравнение $z=\bar{f}(x, y)$ и $f_{ll}=\bar{f}_{yy}=a^{11}$, $f_{\bar{l}\bar{l}}=\bar{f}_{xx}=a^{22}$, $f_{l\bar{l}}=\bar{f}_{xy}=-a^{12}$, где a^{ij}, $i, j=1, 2$ являются коэффициентами уравнения б. м. изгибаний

$$\bar{f}_{yy}\zeta_{xx}-2\bar{f}_{xy}\zeta_{xy}+\bar{f}_{xx}\zeta_{yy}=0, \tag{8}$$

т. е. уравнения (1), (2) при $g(x, y)\equiv 0$.

4. Теоремы 1, 2 дают достаточные условия жесткости только для поверхностей класса (6), (7). Вид краевых условий жесткости, т. е. краевых условий задачи Z', зависит от вида гладких точек границы Γ_S, т. е. от вида точек множества $\Gamma = \partial G / \cup_{i=1}^{k} A_i (A_i$ — точки нарушения гладкости). Разбиение границы Γ на множества $\tilde{\Gamma}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, а, следовательно, и разбиение границы Γ_S поверхности S соответственно на множества $\tilde{\Gamma}_S^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, делается при помощи знаков функций f_{ll} и H и вида угла $\theta = (n, l)_e$. Каждое множество $\tilde{\Gamma}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, может содержать только дуги и изолированные для него точки. Внимательное рассмотрение показывает, что:

1. Любая изолированная точка множества $\tilde{\Gamma}^1$ — либо гиперболическая, либо параболическая, и является общим концом двух дуг, принадлежащих множеству $\tilde{\Gamma}^3$.

2 а. Если точка $A \in \tilde{\Gamma}^2$ изолирована для $\tilde{\Gamma}^2$ и $n_{2|A} \neq 0$, то она либо гиперболическая, либо параболическая, и является общим концом двух дуг, принадлежащих множеству $\tilde{\Gamma}^3$; б) если точка $A \subset \tilde{\Gamma}^2$ изолирована для $\tilde{\Gamma}^2$ и $n_{2|A} = 0$, то она является концом дуги, принадлежащей либо $\tilde{\Gamma}^1$, либо $\tilde{\Gamma}^3$, либо $\tilde{\Gamma}^4$.

3. Множество $\tilde{\Gamma}^3$ не имеет изолированных точек.

4. Изолированные точки множества $\tilde{\Gamma}^4$ являются концами дуг, принадлежащих либо $\tilde{\Gamma}^1$, либо $\tilde{\Gamma}^2$, либо $\tilde{\Gamma}^3$.

Краевые условия задачи Z' выбираются так, чтобы квадратичная форма $B(\zeta_x, \zeta_y)$ была неотрицательна на Γ. Для точек множества $\tilde{\Gamma}^1$ всегда имеем краевое условие $\zeta = c_1 = \text{const}$, для точек $\tilde{\Gamma}^2$ — соответственно $\zeta_l = 0$, для точек $\tilde{\Gamma}^3$ — соответственно $\zeta = c_1 = \text{const}$ и $\zeta_l = 0$, а точки множества $\tilde{\Gamma}^4$ освобождаются от краевых условий. Из непрерывности квадратичной формы $B(\zeta_x, \zeta_y)$ на Γ следует, что достаточно задать краевые условия только на дугах множеств $\tilde{\Gamma}^i$, $i = 1, 2, 3$, чтобы $B(\zeta_x, \zeta_y) \geqq 0$ везде на Γ. Знак Гауссовой кривизны K во внутренних точках поверхности не влияет на краевые условия в теоремах 1, 2, но так как рассматриваемые поверхности должны удовлетворять условиям (7), то очевидно K не может менять произвольно свой знак. Несмотря на это, полученные достаточные условия охватывают весьма широкий класс поверхностей и позволяет решить ряд геометрических задач. Рассмотрим несколько таких задач.

А. Пусть граница Γ_S поверхности S класса (6), (7) содержит не более чем конечное число параболических точек, а все остальные ее точки эллиптические. Из способа разбиения границы Γ_S (см. п. 3) видно, что каждая эллиптическая точка гладкой части границы Γ_S принадлежит либо $\tilde{\Gamma}_S^1$, либо $\tilde{\Gamma}_S^2$. Таким образом множество $\tilde{\Gamma}_S^1 \cup \tilde{\Gamma}_S^2 \cup_{i=1}^{k} B_i$, где B_i — гладкие параболические точки границы, составляет всю гладкую часть границы Γ_S. Точки B_i и изолированные точки (если такие имеются) множества $\tilde{\Gamma}_S^2$ разбивают $\tilde{\Gamma}_S^1$ и $\tilde{\Gamma}_S^2$ на открытые дуги, каждая из которых принадлежит $\tilde{\Gamma}_S^1$ или $\tilde{\Gamma}_S^2$. Тогда из теоремы 1, 2 следует, что поверхность S будет жестка относительно б. м. изгибаний, которые: вдоль дуг $\tilde{\Gamma}_S^1 \cup \tilde{\Gamma}_S^2$ являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно E (и в частности, когда эта часть границы зафиксирована), а вдоль остальных дуг $\tilde{\Gamma}_S^2$, состоящих их эллиптических точек — l-изгибаниями относительно E.

Рассмотрим два конкретных случая:

а. Пусть все точки Γ_S эллиптические. Тогда везде вдоль Γ_S имеем или $a^{11}>0$, или $a^{11}<0 (a^{11}=\overline{f}_{yy}=f_{ll})$. Если $a^{11}>0 (a^{11}<0)$, то S будет жестка, когда вдоль гладких дуг границы, где $0 \leqq \theta < \pi/2$ $(\pi/2 < \theta \leqq \pi)$ и вдоль гладких дуг, где $\theta=\pi/2$, поле U удовлетворяет граничному условию $\zeta=\text{const}$ (и, в частности, когда вся эта часть границы зафиксирована), а на всех остальных гладких дугах границы — $\zeta_l=0$.

б. Пусть на S имеется простая линия L, вдоль которой $K=0$, $a^{11}=0$, а все остальные точки поверхности — эллиптические. Пусть концы L лежат на Γ_S и проекция L_1 линии L на E однозначно проектируется на прямую с направлением $\overline{l}$. Обозначим через G_+ (G_-) совокупность тех точек $\overline{G} \setminus L_1$, которые расположены с той стороны L_1, куда направлен вектор $l(-l)$. Из (7) вытекает, что L составлена из точек уплощения, т. е. $a^{11}|_{L_1}=a^{22}|_{L_1}=a^{12}|_{L_1}=0$ и $a^{11}|_{G-}<0$, $a^{22}|_{G-}<0$, $a^{11}|_{G_+}>0$, $a^{22}|_{G_+}>0$ $(a^{11}=\overline{f}_{yy}=f_{ll}$, $a^{22}=\overline{f}_{xx}=f_{\overline{l}\,\overline{l}}$, $a^{12}=-\overline{f}_{xy}=f_{l\overline{l}})$. Пусть граница Γ_S такова, что ее проекция Γ на E составлена из отрезков, параллельных направлению l, и из таких гладких дуг, что там, где $a^{11}<0$, имеем $\pi/2<\theta\leqq\pi$, а там, где $a^{11}>0$ — соответственно $0\leqq\theta<\pi/2$. Тогда поверхность S жестка, если поле U удовлетворяет граничному условию $\zeta=\text{const}$ вдоль Γ_S (и в частности, когда вся граница Γ_S зафиксирована).

Б. Пусть граница Γ_S поверхности S класса (6), (7) содержит не более, чем конечное число параболических точек, а все остальные ее точки гиперболические. Из способа разбиения границы Γ_S (см. п. 3) видно, что все четыре множества $\tilde{\Gamma}_S^i$ могут содержать гиперболические и параболические точки. Пусть Γ_S составлена из асимптотических линий и линий c_i, $i=1, \ldots, m$, вдоль которых $\theta=\pi/2$. Пусть среди гладких гиперболических точек границы, которые не принадлежат линиям c_i, $i=1, \ldots, m$, имеется не более чем конечное число точек A_j', $j=1, \ldots, k$, в которых $a^{11}=0$, $\theta=\pi/2$. Для точек линий c_i, $i=1, \ldots, m$, имеем: те, в которых $a^{11}\neq 0$, принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^2$, и те, в которых $a^{11}=0$ — $\tilde{\Gamma}_S^4$ или $\tilde{\Gamma}_S^2$. Для остальных гладких гиперболических точек границы имеем: точки, в которых $a^{11}\cos\theta\leqq 0$, $\theta\neq\pi/2$, принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^4$; точки, в которых $a^{11}\cos\theta>0$ — $\tilde{\Gamma}_S^1$, точки A_j', $j=1, \ldots, k$, — $\tilde{\Gamma}_S^2$ или $\tilde{\Gamma}_S^4$. Из теорем 1 и 2 следует, что поверхность S будет жестка относительно б. м. изгибаний, которые вдоль асимптотических гладких дуг, состоящих из гиперболических точек и принадлежащих $\tilde{\Gamma}_S^1$, и которые вдоль дуг линий c_i, принадлежащих $\tilde{\Gamma}_S^2$, являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно E (и в частности, когда эта часть границы зафиксирована), а вдоль остальной части границы на изгибания не накладываются никакие краевые условия.

Рассмотрим конкретный случай. Пусть Γ_S, содержащая только гиперболические точки, составлена из дуг асимптотических линий и из линий c_i, $i=1, \ldots, m$, вдоль которых $\theta=\pi/2$. Пусть $a^{11}_{|\Gamma_S}<0$ $(a^{11}_{|\Gamma_S}>0)$. Тогда поверхность S жестка, если вдоль c_i, $i=1, \ldots, m$, и вдоль гладких дуг границы, где $\pi/2<\theta\leqq\pi$ $(0\leqq\theta<\pi/2)$, поле U удовлетворяет условию $\zeta=\text{const}$ (и, в частности, когда упомянутая часть границы зафиксирована), а вдоль остальной части границы на изгибания не накладывать никаких краевых условий.

В. Пусть граница Γ_S поверхности (6), (7) составлена: из линий, которые содержат только эллиптические точки, из линий, которые содержат только гиперболические точки, и имеет не более, чем конечное число параболических точек. Пусть эти части Γ_S, которые содержат только гиперболические точки, составлены из асимптотических линий, для которых выполнены те же самые предположения как в Б, и из линий c_i, $i=1,\ldots,m$, вдоль которых $\theta=\pi/2$. Тогда все гиперболические гладкие точки границы принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^1\cup\tilde{\Gamma}_S^2\cup\tilde{\Gamma}_S^4$ (см. Б). С другой стороны, как уже было отмечено, все гладкие эллиптические точки Γ_S принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^1\cup\tilde{\Gamma}_S^2$. Из теорем 1 и 2 следует, что поверхность S жестка относительно б. м. изгибаний, которые: 1) как вдоль тех дуг асимптотических линий, принадлежащих $\tilde{\Gamma}_S^1$, и вдоль тех дуг линий c_i которые принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^2$, так и вдоль тех дуг, составленных из эллиптических точек, которые или принадлежат $\tilde{\Gamma}_S^1$ или $\tilde{\Gamma}_S^{2}$, являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно E (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована); 2) вдоль остальных гладких дуг, составленных из эллиптических точек, являются l-изгибаниями относительно E и 3) вдоль остальной части границы на изгибания не накладываются никакие краевые условия.

Рассмотрим два конкретных случая.

а. Пусть поверхность S имеет простую параболическую линию L, концы которой лежат на Γ_S, и пусть она не имеет других параболических точек. Обозначим через $S^1(S^2)$ ту часть поверхности, которая составлена только из гиперболических (эллиптических) точек. Пусть $a^{11}>0$ на S и граница $\Gamma_S\cup S^1$ составлена из дуг асимптотических линий и из дуг, вдоль котоных $\theta=\pi/2$, а граница $\Gamma_S\cup S^2$ — из дуг, вдоль которых $0\leqq\theta<\pi/2$, и из дуг, вдоль которых $\theta=\pi/2$. Поверхность S жестка, если $\zeta=\text{const}$ вдоль гладких дуг $\Gamma_S\cup S^2$ и вдоль гладких дуг $\Gamma_S\cup S^1$, в которых $a^{11}\cos\theta>0$ или $\theta=\pi/2$ (и, в частности, когда эти дуги зафиксированы), а вдоль остальной части границы Γ_S на изгибания не накладывать никаких краевых условий.

б. Пусть поверхность S имеет две простые линии L' и L'', которые составлены только из параболических точек, имеют одну общую точку и их концы лежат на Γ_S. Пусть S не имеет других параболических точек и при переходе как через L', так и через L'' Гауссова кривизна меняет свой знак. Обозначим через $S^1(S^2)$ ту часть поверхности S, которая составлена только из гиперболических (эллиптических) точек. Пусть гладкая часть границы $\Gamma_S\cap S^1$ составлена из дуг асимптотических линий, вдоль которых $a^{11}\neq 0$, и из дуг асимптотических линий, вдоль которых $a^{11}=0$ и $\theta\neq\pi/2$, а $\Gamma_S\cap S^2$ — из дуг, вдоль которых выполнено $a^{11}\cos\theta>0$. Поверхность S жестка, если $\zeta=\text{const}$ вдоль $\Gamma_S\cup S^2$ и вдоль тех дуг, принадлежащих $\Gamma_S\cap S^1$, в которых $a^{11}\cos\theta>0$ (и, в частности, когда вся эта часть границы зафиксирована), а вдоль остальной части границы Γ_S на изгибания не накладывать никаких краевых условий (см. рис. 1, 2).

5. В этом пункте рассмотрим два примера.

1. Поверхность S_1: $z=x^2y+xy^2+y^3$ принадлежит классу (6), (7), так как $a^{11}_y=6$, $a^{11}_y a^{22}_y - a^{11^2}_x=8$ (для нее направление l совпадает с осью Oy) и имеет Гауссову кривизну $K=[4(y-x)(2y+x)]/(1+z_x^2+z_y^2)^2$. Линии L_1 и L_2 поверхности S_1, которые проектируются на плоскость Oxy соответственно в прямые g_1: $y-x=0$ и g_2: $2y+x=0$, составлены только из параболических точек, кроме начала координат (являющееся точкой уплощения). При пере-

ходе через L_i, $i=1, 2$, Гауссова кривизна меняет свой знак. Уравнение (8) б. м. изгибаний поверхности S_1 имеет вид

$$(8_1) \qquad y\zeta_{yy}-2(x+y)\zeta_{xy}+(3y+x)\zeta_{xx}=0,$$

а дифференциальные уравнения обеих систем асимптотических линий (обеих систем характеристик уравнения (8_1)) —

$$\lambda_1: \frac{dy}{dx}=\frac{-(x+y)+[(x+y)^2-y(3y+x)]^{1/2}}{3y+x}, \quad \lambda_2: \frac{dy}{dx}=\frac{-(x+y)-[(x+y)^2-y(3y+x)]^{1/2}}{3y+x}.$$

Рассмотрим часть S_{11} поверхности S_1, граница ∂S_{11} которой имеет проекцию $\partial G_{11}=\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}_1\cup\overline{A_1B}_1\cup\overline{B_1C}_1\cup\overline{C_1D}_1\cup\overline{D_1A}$ (см. рис. 1), где: 1) $\overline{AD}_1$ и $\overline{A_1D}$ — кусочно-гладкие линии (все точки AD_1 и A_1D эллиптические) и $0\leqq\theta<\pi/2$ вдоль AD_1, $\pi/2<\theta\leqq\pi$ вдоль $\overline{A_1D}$; 2) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{B_1C}_1$ являются частями характеристик системы λ_2; 3) $\overline{BC}$, $\overline{A_1B}_1$, $\overline{C_1D}_1$ — частями характеристик системы λ_1 (притом $y_B<0$, $y_{B_1}>0$). Так как $\tilde{\Gamma}^1_{11}=AB\cup CD\cup(DA_1\cup_{i=1}^{k}P_i)\cup A_1B_1\cup C_1D_1\cup(D_1A\setminus\cup_{j=1}^{m}R_j)$, где P_i и R_j — точки нарушения гладкости соответственно DA_1 и A_1D, а $\tilde{\Gamma}^4_{11}=BC\cup B_1C_1$ и $\Gamma_{11}=\tilde{\Gamma}^1_{11}\cup\tilde{\Gamma}^4_{11}$, то из теоремы 2 следует, что поверхность S_{11} жестка, если $\zeta=\mathrm{const}$ вдоль $\tilde{\Gamma}^1(S_{11})$ (и, в частности, когда $\tilde{\Gamma}^1(S_{11})$ зафиксирована), а вдоль границы $\tilde{\Gamma}^4(S_{11})$

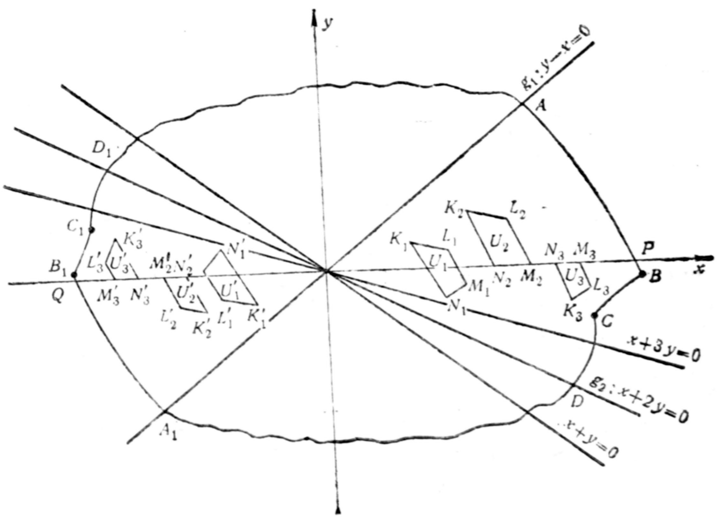

Рис. 1

$=BC(S_{11})\cup B_1C_1(S_{11})$ на изгибания не накладывать никаких условий ($\tilde{\Gamma}^i(S_{11})$ г/т прообраз множества $\tilde{\Gamma}^i_{11}$ при проектировании поверхности S_{11} на Oxy).

Пусть поверхность S_{12} получена из S_{11} при помощи конечного числа дырок, проекции которых на Oxy имеют вид U_i или U'_i, $i=1, 2, 3$ (см. рис. 1), где: 1) $\overline{K_iL_i}$, $\overline{M_iN_i}$, $i=1, 2, 3$, являются частями характеристик системы λ_1 (некоторые из концов K_i, $i=1, 2$, могут лежать на g_1); 2) L_iM_i, $\overline{K_iN_i}$, $i=1, 2, 3$, являются частями характеристик системы λ_2; 3) $\overline{K'_iL'_i}$. $\overline{M'_iN'_i}$ являются частями характеристик λ_2 (некоторые из концов K'_i, $i=1, 2$, могут лежать на g_1) и 4) $\overline{L'_iM'_i}$, $\overline{K'_iN'_i}$, $=1, 2, 3$, являются частями характеристик системы λ_1. Теперь $\tilde{\Gamma}^1_{12}=\gamma_1 \cup \tilde{\Gamma}^1_{11}$, $\tilde{\Gamma}^4_{12}=\gamma_2 \cup \tilde{\Gamma}^4_{11}$, где $\gamma_1=N_1M_1 \cup K_1N_1 \cup N_2M_2 \cup K_2N_2 \cup N_3K_3 \cup K_3L_3 \cup N'_1M'_1 \cup K'_1N'_1 \cup N'_2M'_2 \cup K'_2N'_2 \cup N'_3K'_3 \cup K'_3L'_3$, $\gamma_2=K_1L_1 \cup L_1M_1 \cup K_2L_2 \cup L_2M_2 \cup L_3M_3 \cup M_3N_3 \cup K'_1L'_1 \cup L'_1M'_1 \cup K'_2L'_2 \cup L'_2M'_2 \cup L'_3M'_3 \cup M'_3N'_3$ и $\Gamma_{12}=\tilde{\Gamma}^1_{12} \cup \tilde{\Gamma}^4_{12}$. Из теоремы 2 следует, что поверхность S_{12} жестка, если $\zeta=\mathrm{const}$ вдоль $\tilde{\Gamma}^1(S_{12})$ (и, в частности, когда $\tilde{\Gamma}^1(S_{12})$ зафиксирована), а вдоль $\tilde{\Gamma}^4(S_{12})$ на изгибания не накладывать никаких краевых условий.

Заметим, что если рассматривать только ту часть поверхности S_{11}, которая проектируется на полуплоскость $y>0$ $(y<0)$, то она будет жестка, если вдоль $OP \cup B_1C_1(S_{11})$ $(OQ \cup BC(S_{11}))$ не накладывать никаких краевых условий, а вдоль остальной части границы — $\zeta=\mathrm{const}$ (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована).

2. Поверхность S_2: $z=x^2y+0,1\,y^5$ принадлежит классу (6), (7) (для нее направление l тоже совпадает с осью Oy) и имеет Гауссову кривизну $K=4(y^4-x^2)/(1+z_x^2+z_y^2)^2$. Параболы l_1: $y^2-x=0$, l_2: $y^2+x=0$ являются проекциями соответственно линий L_1 и L_2 поверхности S_2, все точки которых параболические, кроме начала координат (являющееся точкой уплотнения). При переходе через L_i, $i=1, 2$, K меняет свой знак. Теперь: $a_y^{11}=6y^2>0$, $a_y^{11}a_y^{22}-a_x^{11^2}=12y^2>0$ при $y \neq 0$;

$$y_3\zeta_{xx}-2x\zeta_{xy}+y\zeta_{yy}=0 \tag{8$_2$}$$

— уравнение б. м. изгибаний поверхности S_2, а

$$\lambda_1: \frac{dy}{dx}=\frac{-x+[x^2-y^4]^{1/2}}{y^3}, \quad \lambda_2: \frac{dy}{dx}=\frac{-x-[x^2-y^4]^{1/2}}{y^3}$$

— дифференциальные уравнения обеих систем асимптотических линий поверхности (обеих систем характеристик уравнения (8_2)).

Рассмотрим часть S_{21} поверхности S_2, граница ∂S_{21} которой имеет проекцию $\partial G_{21}=\overline{A_1B_1} \cup \overline{B_1A_2} \cup \overline{A_2B_2} \cup B_2A_1$ (см. рис. 2), где: 1) $\overline{A_1B_2}$ и $\overline{A_2B_1}$ — кусочно-гладкие линии (все точки A_1B_2 и A_2B_1 — эллиптические) и $0 \leq \theta < \pi/2$ вдоль $\overline{A_1B_2}$, $\pi/2<\theta \leq \pi$ вдоль $\overline{A_2B_1}$; 2) $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ — характеристики соответственно систем λ_2 и λ_1. Так как $\Gamma_{21}=\tilde{\Gamma}^1_{21}=A_1B_1 \cup (B_1A_2 \setminus \cup_{i=1}^{p} P_i) \cup A_2B_2 \cup (B_2A_1 \setminus \cup_{j=1}^{q} R_j)$, где P_i и R_j — точки нарушения гладкости соответственно частей B_1A_2 и B_2A_1, то поверхность S_{21} жестка, если $\zeta=\mathrm{const}$ вдоль границы ∂S_{21} (и, в частности, когда вся граница зафиксирована).

Пусть поверхность S_{22} получена из S_{21} при помощи конечного числа дырок, проекции которых на Oxy имеют вид U_1 или U_2 (см. рис. 2), где $\overline{L_1M_1}N_1$ и $\overline{L_2M_2}N_2$ являются частями характеристик соответственно систем λ_2 и λ_1 (некоторые из концов L_1, N_1 и L_2, N_2 могут лежать соответственно на l_1 и l_2). Теперь $\tilde{\Gamma}^1_{22}=\Gamma_{21}$, $\tilde{\Gamma}^2_{22}=L_1N_1 \cup L_2N_2$, $\tilde{\Gamma}^4_{22}=L_1M_1N_1 \cup L_2M_2N_2$ и $\Gamma_{22}=\tilde{\Gamma}^1_{22} \cup \tilde{\Gamma}^2_{22} \cup \tilde{\Gamma}^4_{22}$. Так как отрезки L_1N_1 и L_2N_2 параллельны оси Oy, то из теоремы 2 следует, что поверхность S_{22} жестка, если вдоль $\widetilde{\Gamma}^1(S_{22})=L_1M_1N_1(S_{22}) \cup L_2M_2N_2(S_{22})$ не накладывать никаких краевых условий, а вдоль остальной части границы — $\zeta=\mathrm{const}$ (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована).

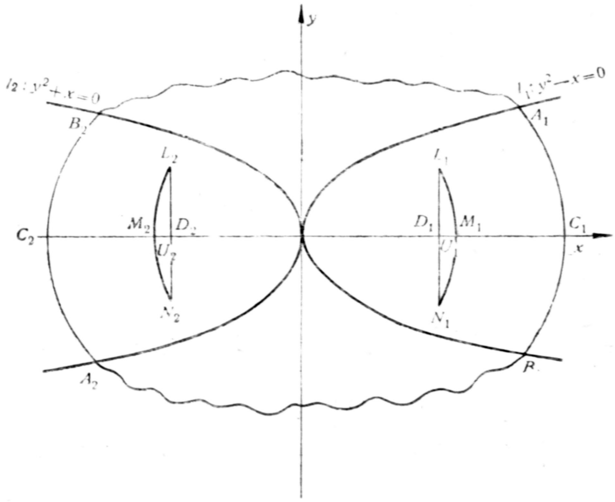

Рис. 2

Заметим, что если рассмотрим только ту часть поверхности $S_{21}(S_{22})$, которая проектируется на полуплоскость $y>0$, соответственно на полуплоскость $y<0$, то она будет жестка, если вдоль $C_1C_2(C_1M_1 \cup M_1L_1 \cup D_1D_2 \cup L_2M_2 \cup M_2C_2)$, соответственно вдоль $C_1C_2(C_1M_1 \cup M_1N_1 \cup D_1D_2 \cup N_2M_2 \cup M_2C_2)$, не накладывать никаких краевых условий, а вдоль остальной части границы — $\zeta=\mathrm{const}$ (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована).

6. Рассмотрим поверхность S_3: $z=x^5y+xy^5$. Теперь Гауссова кривизна $K=-25[(x^4+y^4)^2-16x^4y^4]/(1+z_x^2+z_y^2)^2$. Поверхность S_3 имеет четыре параболических линии L_i, $i=1, 2, 3, 4$, проекции которых на плоскость Oxy являются прямыми:

$$g_1:\ x-y\sqrt{2+\sqrt{3}}=0,\ g_2:\ x+y\sqrt{2+\sqrt{3}}=0,\ g_3:\ x-y\sqrt{2-\sqrt{3}}=0,$$

$$g_4: x+y\sqrt{2-\sqrt{3}}=0.$$

Точка пересечения линий L_i, $i=1, 2, 3, 4$ — начало координат — является точкой уплотнения. При переходе через L_i, $i=1, 2, 3, 4$, кривизна K меняет свой знак. Если $l(l_1, l_2)$ — произвольное направление в плоскости Oxy, то легко подсчитать, что $z_{lll}=60(l_1y+l_2x)(l_1^2x^2+l_2^2y^2)$, откуда следует, что вся поверхность S_3, а также любая ее часть, содержащая точку O, не принадлежит классу (6), (7). Легко проверить, что та часть поверхности S_3, проекция которой лежит внутри угла, ограниченного прямыми m_1: $\sqrt[4]{3}x-y=0$, m_2: $\sqrt[4]{3}x+y=0$ и содержащего ось Ox, $x>0$, принадлежит классу (6), (7) (для нее направление l совпадает с осью Oy). Следовательно, для кусков, принадлежащих этой части, можно применить достаточные условия жесткости из теорем 1, 2. Интересно будет найти достаточные условия жесткости для частей, содержащих точку уплотнения в своей внутренности (относительно этой точки поверхность S_3 симметрично расположена). Следуя тому же методу как в работе [1], теперь найдем такие достаточные условия.

Уравнение б. м. изгибаний поверхности S_3 имеет вид

$$(8_3)\qquad 2xy^3\zeta_{xx}-(x^4+y^4)\zeta_{xy}+2x^3y\zeta_{yy}=0.$$

Для него применим метод „a, b, c". Пусть $(x, y)\in G$, где G — ограниченная область плоскости Oxy, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G. Если выбрать $\alpha=\alpha_1 y$, $\beta=\alpha_1 x$, $\gamma=0$, где α_1 — положительная константа, то формула (4) из [1] принимает вид

$$(9)\qquad 2\alpha_1\int_G(y\zeta_x+x\zeta_y)L\zeta\,dx\,dy=\int_G A(\zeta_x, \zeta_y)\,dx\,dy+\int_{\partial G}B(\zeta_x, \zeta_y)\,ds,$$

где $L\zeta$ — левая часть уравнения (8_3), а

$$(10)\quad A(\zeta_x, \zeta_y)=10\alpha_1[(x^4+3y^4+6x^2y^2)\zeta_x^2+(y^4+3x^4+6x^2y^2)\zeta_y^2-8(x^3y+xy^3)\zeta_x\zeta_y]$$

и

$$(11)\quad B(\zeta_x, \zeta_y)=10\alpha_1 y[2n_1xy^3-n_2(x^4+y^4)-2n_2x^2y^2]\zeta_x^2+40\alpha_1x^2y^2(n_2x+n_1y)\zeta_x\zeta_y$$
$$+10\alpha_1x[2n_2x^3y-n_1(x^4+y^4)-2n_1x^2y^2]\zeta_y^2.$$

Обозначим через A^{ij}, $i, j=1, 2$, коэффициенты квадратичной формы $A(\zeta_x, \zeta_y)$ Из (10) получаем

$$A^{11}=10\alpha_1(6x^2y^2+3y^4+x^4),$$
$$A^{11}A^{22}-A^{12^2}=100\alpha_1^2[3x^8+3y^8+14x^4y^4+8x^2y^6+8x^6y^2],$$

откуда следует, что квадратичная форма $A(\zeta_x, \zeta_y)$ положительно определена всюду, кроме точки $O(0, 0)$. Из (11) легко получаем

$$(12)\quad B(\zeta_x, \zeta_y)=\frac{\alpha_1}{n_2x+n_1y}\{H(y\zeta_x+x\zeta_y)^2-10xy[x^4+y^4+4x^2y^2](\zeta_xn_2-\zeta_yn_1)^2\}$$
$$\text{при } n_2x+n_1y\neq 0,$$

где $n(n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ(Γ — гладкая часть ∂G), а $H=10[2n_1^2xy^3+2n_2^2x^3y-n_1n_2(x^4+y^4)]$.

Рассмотрим часть S_{31} поверхности S_3, граница ∂S_{31} которой имеет проекцию (см. рис. 3) $\partial G_{31}=\overline{A_1A_2}\cup\overline{A_2A_4'}\cup\overline{A_4'N_1}\cup\overline{N_1M_1}\cup\overline{M_1A_3'}\cup\overline{A_3'A_1'}\cup\overline{A_1'A_2'}\cup\overline{A_2'A_4}\cup\overline{A_4M}\cup\overline{MN}\cup\overline{NA_3}\cup\overline{A_3A_1}$, где: 1) $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4'}$, $\overline{A_3'A_1'}$, $\overline{A_2'A_4}$ — кусочно-гладкие линии, такие, что $n_2x+n_1y>0$ вдоль A_1A_3 и $A_1'A_3'$, $n_2x+n_1y<0$ вдоль A_2A_4' и $A_2'A_4$; 2) $\overline{MN}$ и $\overline{M_1N_1}$ — отрезки, параллельные оси Ox; 3) $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1'A_2'}$, $\overline{A_3N}$,

$\overline{A_4M}$, $\overline{A_3'M_1}$, $\overline{A_4'N_1}$ — дуги характеристик, принадлежащих системе λ_1, имеющей дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{-(x^4+y^4)-[(x^4+y^4)^2-16x^4y^4]^{1/2}}{4xy^3}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что вдоль границы ∂G_{31} на кусках характеристик везде, кроме точек $A(x>0, y=0)$ и $A'(x<0, y=0)$, выполнено неравенство $n_2x+n_1y\neq 0$. Также легко видно, что на отрезках MN и M_1N_1 везде, кроме точек $B(x=0, y>0)$ и $B_1(x=0, y<0)$, имеет место неравенство $n_2x+n_1y\neq 0$. Из (11) получаем

$$B(\zeta_x, \zeta_y)|_{A,A'} = -10\alpha_1 n_1 x^5 \zeta_y^2, \quad B(\zeta_x, \zeta_y)|_{B,B'} = -10\alpha_1 n_2 y^5 \zeta_x^2. \tag{14}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу

А. Найти решение $\zeta\in C^1(\bar G)\cap C^2(G)$ уравнения (8_3) в области G, которое удовлетворяет краевому условию

$$\zeta|_{\Gamma_{31}} = c_1 = \text{const}, \tag{15}$$

где Γ_{31} — гладкая часть границы ∂G_{31}.

Имеет место следующее

Утверждение 1. *Задача* A_1 *имеет единственное решение* $\zeta=\text{const}$.

Доказательство. Отметим сначала, что из (15) следует $\zeta_x n_2-\zeta_y n_1|_\Gamma=0$ и, следовательно, $\zeta_y|_{A,A'}=0$, $\zeta_x|_{B,B'}=0$. Тогда из (12) и (14) видно, что квадратичная форма $B(\zeta_x, \zeta_y)$ неотрицательна на Γ_{31}. Пусть ζ_1 и ζ_2 — две решения задачи A_1. Тогда $\bar\zeta=\zeta_1-\zeta_2$ — решение уравнения (8_3) при краевом условии $\bar\zeta|_{\Gamma_{31}}=0$. Подставим его в равенство (9). В силу положительной определенности квадратичной формы $A(\zeta_x, \zeta_y)$ в $\bar G\setminus O$ получаем $\bar\zeta_x=\bar\zeta_y=0$ в $\bar G$, т. е. $\bar\zeta=0$, откуда следует утверждение 1.

Утверждение 2. *Поверхность* S_{31} *жестка относительно б. м. изгибаний, которые являются б. м. изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) вдоль ее границы относительно плоскости* Oxy *(и, в частности, когда ее граница зафиксирована).*

Доказательство утверждения 2 следует из утверждения 1 и из того, что поле U тривиально тогда и только тогда, когда $\zeta(x, y)$ — линейная функция [3].

Рассмотрим поверхность S_{32}, которая получена из S_{31} при помощи конечного числа дырок, проекции которых имеют вид U или U' (см. рис. 3), где $\overline{CED}$ и $\overline{C'E'D'}$ являются характеристиками системы (13), а $\overline{CD}$ и $\overline{C'D'}$ — отрезки, параллельные оси Oy (концы C, C', D, D' могут и не лежать на $g_1(g_2)$). Теперь $\tilde\Gamma^1_{32}=\Gamma_{31}\cup CD\cup C'D'$, $\tilde\Gamma^4_{32}=CED\cup C'E'D'$ и $\Gamma_{32}=\tilde\Gamma^1_{32}\cup\tilde\Gamma^4_{32}$.

Утверждение 3. *Поверхность* S_{32} *жестка относительно б. м. изгибаний, которые вдоль* $\tilde\Gamma^1(S_{32})$ *являются б. м. изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно плоскости* Oxy *(и, в частности, когда* $\tilde\Gamma^1(S_{32})$ *зафиксирована), а вдоль* $\tilde\Gamma^4(S_{32})=CED(S_{32})\cup C'E'D'(S_{32})$ *на изгибания не накладываются никакие краевые условия.*

Рассмотрим: а) часть S_{33} поверхности S_{31}, которая проектируется на полуплоскость $y>0(x>0)$, соответственно на полуплоскость $y<0(x<0)$; б) поверхность $S_{34}=S_{31}\setminus(S_{33}(x>0)\cap S_{33}(y>0))$, соответственно $S_{35}=S_{33}(x>0)$

$\cap S_{33}(y>0)$ $(S_{34}=S_{31})\diagdown(S_{33}(x>0)\cap S_{33}(y<0))$, соответственно $S_{35}=S_{33}(x>0)$ $\cap S_{33}(y<0))$, $(S_{34}=S_{31}\diagdown(S_{33}(x<0)\cap S_{33}(y<0))$, соответственно $S_{35}=S_{33}(x<0)$ $\cap S_{33}(y<0))$, $(S_{34}=S_{31}\diagdown(S_{33}(x<0)\cap S_{33}(y>0))$, соответственно $S_{35}=S_{33}(x<0)$ $\cap S_{33}(y>0)$.

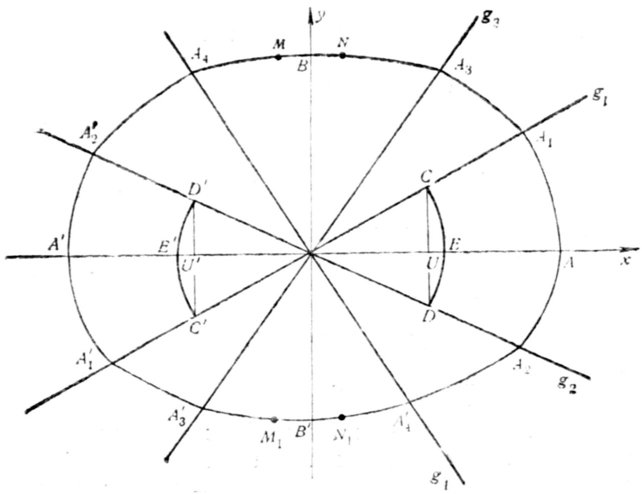

Рис. 3

Утверждение 4. а) *поверхность S_{33} жестка относительно б. м. изгибаний, на которые вдоль $AA'(BB')$ не накладываются никакие краевые условия, а вдоль остальной части границы эти изгибания являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно Oxy (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована)*; б) *поверхность S_{34}, соответственно S_{35}, жестка относительно б. м. изгибаний, на которые вдоль $OA\cup OB(OA\cup OB')$, $(OB'\cup OA')$, $(OA'\cup OB)$ не накладываются никакие краевые условия, а вдоль остальной части границы эти б. м. изгибания являются изгибаниями скольжения (обобщенного скольжения) относительно Oxy (и, в частности, когда эта часть границы зафиксирована).*

На доказательстве утверждений 3 и 4 не будем останавливаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Иванова-Каратопраклиева. О жесткости поверхностей смешанной кривизны. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 505—508.
2. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959.
3. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. *Успехи мат. наук*, **3**, 1948, № 2, 47—158.

Единый центр математики и механики
1090 София н. я. 373

Поступила 21. 2. 1979;
В переработанном виде 17. 11. 1980