Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ВЕТВЯЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

ПЕНКА И. МАЙСТЕР

Известно, что асимптотическое поведение ветвящихся диффузионных процессов существенно зависит от спектральных свойств линейного оператора M_t, соответствующего математическому ожиданию числа частиц в области. Если фазовое пространство диффузионного процесса есть ограниченная область эвклидового пространства, граница достаточно гладкая и имеют место классические граничные условия, то весь спектр оператора M_t чисто дискретный. Но в случае неограниченной области спектр оператора M_t может не иметь изолированных собственных значений. Автором были найдены достаточные условия существования изолированного собственного значения. Здесь будут рассмотрены подробно несколько примеров, когда область неограничена, но спектр чисто дискретный или состоит из изолированного значения и непрерывной части и когда весь спектр непрерывный.

1. Описание модели и основные обозначения. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ есть измеримое пространство, (x_t, P_x) — диффузионный процесс в $\mathscr{X}$. Предположим, что переходной вероятности P_x диффузионного процесса соответствует полугруппа линейных ограниченных операторов T_t, $t>0$, в пространстве непрерывных на $\mathscr{X}$ функции. Обозначим через x_t^0 обрывающийся диффузионный процесс с плотностью вероятностей обрыва $k(x)$, т. е. x_t^0 есть $\exp\{-\int_0^t k(x_s)ds\}$ — подпроцесс для процесса x_t, полугруппа $T_t^0 f(x) = \mathsf{E}_x f(x_t)\exp\{-\int_0^t k(x_s)ds\}$. Будем предполагать, что $k(x)$ есть неотрицательная непрерывная функция на $\mathscr{X}$ (при $|x|\to\infty$ возможно $k(x)\to\infty$). Рассмотрим еще целочисленную случайную меру $\eta_x(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$, $x\in\mathscr{X}$. В работе [1] дано конструктивное определение ветвящегося диффузионного процесса $(\tilde{X}_t, \tilde{\mathsf{P}}_{\tilde{x}})$, соответствующего величинам $\{x_t, k(x), \eta_x\}$ Хорошо известна и интуитивная интерпретация модели, в которой траектории диффузионного процесса x_t рассматриваются как траектории блуждающей частицы. Если в момент времени t частица находилась в точке x, то во временном интервале $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $k(x)\Delta t+o(\Delta t)$ она умрет и превратится в некоторое случайное множество частиц, которое определяется мерой $\eta_x(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$. Каждая частица движется и делится независимо от других. Если после превращения получилась одна частица и она осталась в той же точке, где произошло деление, то считаем, что не было превращения. Считаем, что превращение происходит мгновенно. Введем еще случайную меру μ_{xt} такую, что для любого $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$ случайная величина $\mu_{xt}(\mathscr{U})$ равна числу частиц в множестве $\mathscr{U}$ в момент времени t, если в начальный момент времени была одна частица и она находилась в точке $x\in\mathscr{X}$. Ветвящийся процесс $(\tilde{X}_t, \tilde{\mathsf{P}}_{\tilde{x}})$ есть непрерывный справа строго марковский процесс на пространстве $(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathscr{B}})$, где $\tilde{\mathscr{X}}=\cup_{n=0}^{\infty}\mathscr{X}^{(n)}\cup\{\Delta\}$, $\mathscr{X}^{(n)}$ есть n-кратное симметризованное декартовое произведение пространства $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}^{(0)}$ есть изолированная точка. Так как $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{X}^{(n)}$ локально компактно, но не компактно, то через $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{X}^{(n)}\cup\{\Delta\}$ обозначено его одноточечное компактное расширение. $\widetilde{\mathscr{B}}$ есть σ-алгебра на $\widetilde{\mathscr{X}}$ индуцированной борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}$ на $\mathscr{X}$. Переходной вероятности $\widetilde{\mathsf{P}}_{\tilde{x}}$ соответствует полугруппа $\widetilde{T}_t$ линейных ограниченных операторов в пространстве функции $\widehat{f}(\tilde{x})\in\widehat{B}_1(\widetilde{\mathscr{X}})$, где

$$\widehat{f}(\tilde{x})=\begin{cases} 1 & \text{, если } \tilde{x}\in\mathscr{X}^{(0)},\\ f(x_1)\ \dots\ f(x_n), & \text{если } \tilde{x}=\langle x_1,\ x_2,\dots,x_n\rangle\in\mathscr{X}^{(n)},\\ 0 & \text{, если } \tilde{x}\in\{\Delta\},\end{cases}$$

для любой $f(x)$ принадлежащей единичному шару $B_1(\mathscr{X})$ пространства ограниченных измеримых функций на $\mathscr{X}$ с sup нормы. Очевидно, события $\{\widetilde{X}_t\in\mathscr{X}^{(0)}\}$, $\{\widetilde{X}_t=\langle x_1, x_2,\dots,x_n\rangle\in\mathscr{X}^{(n)}\}$ и $\{\widetilde{X}_t\in\Delta\}$ совпадают соответственно с событиями $\{\mu_{xt}(\mathscr{X})=0\}$, $\{\mu_{xt}(\mathscr{X})=n$, причем $\mu_{xt}(\mathscr{U})=\Sigma_{j=1}^{n}\chi_{\mathscr{U}}(x_j)\}$ и $\{\mu_{xt}(\mathscr{X})=\infty\}$.

Сужение полугруппы $\widetilde{T}_t$ на $B_1(\mathscr{X})$ является производящим оператором случайной меры μ_{xt}, т. е.

$$(\widetilde{T}_t\widehat{f})\,|_{\mathscr{X}}(x)=F_t f(x)=\mathsf{E}\exp\int_{\mathscr{X}}\log f(z)\mu_{xt}(dz).$$

Независимость эволюции отдельных частиц выражается так называемым ветвящимся свойством полугруппы: $\widetilde{T}_t\widehat{f}(\tilde{x})=\widehat{F_t f}(\tilde{x})$. Основное соотношение между величинами x_t, $k(x)$, η_x дается следующим уравнением:

$$F_t f(x)=T_t^0 f(x)+\alpha(t, x)+\int_0^t T_s^0(kHF_{t-s}f)(x)\,ds, \tag{1}$$

где

$$Hf(x)=\mathsf{E}\exp\int_{\mathscr{X}}\log f(z)\eta_x(dz),\qquad \alpha(t, x)=1-T_1^0 1(x)-\int_0^t T_s^0 k(x)ds,$$

см. [1]. Если $\mathscr{X}=R^m$, то $\alpha(t, x)=0$. Будем предполагать, что мера η_x сосредоточена в точке x, т. е. $\eta_x(\mathscr{U})=\eta_x(\langle x\dots x\rangle)$ для любого $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$. Тогда N является оператором суперпозиции. Пусть $Hf(x)=h(x, f(x))$. Кроме того, если f принадлежит области $\mathscr{D}(\mathscr{J})$ определения инфинитезимального оператора $\mathscr{L}$ диффузионного процеса x_t, то $u(t, x)=F_t f(x)$ есть минимальное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathscr{L}u(t, x)+k(x)\,[h(x, u)-u(t, x)],\quad x\in\mathscr{X},\quad u(0, x)=f(x),\quad f\in\mathscr{D}(\mathscr{L}). \tag{2}$$

Математическому ожиданию меры μ_{xt} соответствует линейный оператор $M_t f(x)=\int_{\mathscr{X}} f(z)\,\mathsf{E}\,\mu_{xt}(dz)$. Функция $w(t, x)=M_t f(x)$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}=\mathscr{J}w(t, x)+k(x)\,[a(x)-1]w(t, x),\quad x\in\mathscr{X},\ w(0, x)=f(x),\quad f\in\mathscr{D}(\mathscr{L}), \tag{3}$$

где $a(x) = \mathsf{E}\,\eta_x(\mathscr{X}) = \left.\frac{\partial h(x, u)}{\partial u}\right|_{u=1}$, $\mathscr{L}$ есть инфинитезимальный оператор диффузионного процесса x_t. При довольно общих условиях семейство операторов M_t, $t>0$ есть полугруппа того же класса, что и T_t, с инфинитезимальным оператором $\mathscr{M} = \mathscr{L} + k(a-1)$ и областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{M}) = \mathscr{D}(\mathscr{L})$.

Пусть $\sigma(M_t)$ есть спектр оператора M_t (t фиксирано). Тогда $\sigma(M_t)$ содержит множество точек $\{\mu = e^{\lambda t},\ \lambda \in \sigma(\mathscr{M})\}$. При этом точечный спектр $\sigma_p(M_t) = \{e^{\lambda t},\ \lambda \in \sigma_p(\mathscr{M})\}$ плюс, может быть, точка $\mu = 0$. Если $\mu \in \sigma_p(M_t)$ при фиксированном t, $\mu \neq 0$, и если $\{\lambda_j\}$ есть множество корней уравнения $e^{\lambda t} = \mu$, то по крайней мере одна из точек λ_j заключена в $\sigma_p(\mathscr{M})$. Остаточный спектр $\sigma_r(M_t)$ обладает следующим свойством: если $\mu \in \sigma_r(M_t)$ при некотором фиксированном $t>0$, $\mu \neq 0$, то по крайней мере одно решение уравнения $e^{\lambda t} = \mu$ заключено в $\sigma_r(\mathscr{M})$ и ни одно из решений не может содержаться в $\sigma_p(\mathscr{M})$. Кроме того, μ принадлежит точечному спектру сопряженной полугруппы. Но непрерывный спектр оператора M_t не определяется полностью заданием спектра инфинитезимального оператора $\mathscr{M}$. Число $\mu \neq 0$ может принадлежать непрерывному спектру $\sigma_c(M_t)$ полугруппы, когда все корни $\{\lambda_j\}$ уравнения $e^{\lambda t} = \mu$ заключены в резольвентном множестве оператора $\mathscr{M}$, даже μ может не принадлежать к замыканию множества $\exp\{t\,\sigma(\mathscr{M})\}$. Существуют примеры, когда спектр инфинитезимального оператора точечный, но спектр $\sigma(M_t)$ непрерывный (см. [2, гл. XVI]).

В работе [4] отмечены условия адекватности изображения спектров $\sigma(M_t)$ и $\sigma(\mathscr{M})$, основанные на спектральной теореме.

Таким образом, в исследовании ветвящихся диффузионных процессов следует отметить (разграничить) два вида полугрупп M_t:

а. Если в спектре оператора M_t существует максимальное изолированное собственное значение.

б. Если в спектре оператора M_t не существует максимального изолированного собственного значения.

В работе [7] на основе множества примеров введено определение ветвящихся диффузионных процессов точного типа и неточного типа. Это связано с совпадением или различием асимптотического поведения $\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{X})$ и $\mathsf{E}\mu_{xt}(\mathscr{U})$. Нетрудно заметить, что процессам точного типа соответствуют полугруппы математического ожидания вида а) процессам неточного типа — полугруппы вида б).

2. Пример 1: Уравнение гармонического осциллятора и ветвящиеся диффузионные процессы. Пусть $\mathscr{X} = R$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств на действительной прямой, x_t — одномерный винеровский процесс, $k(x) = x^2$, случайная мера η_x не зависит от x, т. е. $h(x, u) \equiv h(u)$, $a(x) \equiv a > 0$, $\eta_x = \eta$, для всех $x \in \mathscr{X}$.

Тогда уравнение (3) имеет вид

$$w'_t = w''_{xx}/2 + (a-1)x^2 w(t, x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad w(0, x) = f(x). \tag{4}$$

Если $a-1>0$, то фундаментальное решение $w(t, x, y)$ уравнения (4) равно

$$w(t, x, y) = \begin{cases} \dfrac{\exp\{-\operatorname{ctg}\theta\,[x^2 - 2xy\sec\theta + y^2]/\sqrt{2}\}}{[\pi\sqrt{2}\,\sin\theta]^{1/2}} & \text{при } t < \pi/\sqrt{2(a-1)}, \\ \infty & \text{при } t \geqq \pi/\sqrt{2(a-1)}, \end{cases}$$

где $\theta = t\sqrt{2(a-1)}$. Тогда среднее число частиц во всей области равно

$$\mathsf{E}\,\mu_{xt}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, x, y)\,dy = \begin{cases} \sqrt{\sec}\exp\{-x^2 \operatorname{tg}(\theta\sqrt{2})\}, & t < \pi/2\sqrt{2(a-1)}, \\ \infty, & t \geqq \pi/2\sqrt{2(a-1)} \end{cases}$$

(см. [3, стр. 254]). Это означает, что если при $|x| \to \infty$ частицы очень часто делятся и в среднем получается больше, чем одна частица, то после момента времени $t = \pi/2\sqrt{2(a-1)}$ математическое ожидание числа частиц во всей области равно ∞, а после момента $t = \pi/\sqrt{2(a-1)}$ и в каждой точке области в среднем будет бесконечно много частиц. Но, несмотря но это, вероятность взрыва равна нулю (см. [3, стр. 255]). Заметим, что в этом случае спектр оператора $\mathscr{M} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a-1)x^2$ непрерывный и заполняет всю ось $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

Если $k(x) = |x|^\gamma$, $\gamma > 2$, то спектр оператора $\mathscr{M} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a-1)|x|^\gamma$ дискретный и заполняет всю ось $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ (см. [5]). Тогда $\|M_t\|$ растет быстрее любой экспоненты, и вероятность взрыва равна 1.

Если $a = 1$, то $M_t f(x) = T_t f(x)$. Математическое ожидание числа частиц в борелевском множестве $\mathscr{U}$ равно вероятности попадения винеровской траектории в этом множестве. Спектр $\sigma(\mathscr{M})$ непрерывный и заполняет полуось $\lambda \in (-\infty, 0]$. $\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{U}) \to 0$ при $t \to \infty$, хотя $\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{X}) = 1$.

Если $a < 1$, то уравнение (4) с точностью до множителя совпадает с уравнением гармонического осциллятора. Хорошо известно, что в этом случае спектр оператора $\mathscr{M} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a-1)x^2$ состоит из счетного числа собственных значений. Имеем в силу спектральной теоремы для самосопряженных операторов

$$M_t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\varphi_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(y) f(y)\,dy,$$

где $\lambda_n = -\sqrt{2(1-a)}(n+1/2)$, $\varphi_n(x) = \exp\{-\sqrt{2(1-a)}x^2/2\}H_n(x)$, $H_n(x)$ — полиномы Чебышева—Эрмита, т. е. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x, \ldots$

Следовательно, для любого фиксированного x при $t \to \infty$

$$M_t f(x) = \exp\{-\sqrt{(1-a)/2}\,(t + x^2)\}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\exp\{-y^2\sqrt{(1-a)/2}\}\,dy + o(e^{-\varrho t}),$$

$$\varrho > \sqrt{(1-a)/2}.$$

Асимптотическое поведение математического ожидания при $t \to \infty$ определяется первым собственным значением и соответствующей ему собственной функцией. В таком случае ветвящийся диффузионный процесс $(\tilde{X}_t, \mathsf{P}_{\tilde{x}})$ называется докритическим, если $\lambda_0 < 0$. Следовательно, в первом примере, если $a < 1$, имеет место следующая предельная теорема:

Теорема 1. *Если $a < 1$ и $\mathsf{E}\,\eta\log\eta < \infty$, то конечномерные распределения условной случайной меры μ_{xt} при условии, что $\mu_{xt}(\mathscr{X}) > 0$, схо-*

дятся к конечномерным распределениям фиксированной случайной меры μ^*, чей производящий функционал $\psi^*(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta\psi^*[s;\ \mathscr{L}s+k(h(\cdot,s)-s)]=-\lambda_0(1-\psi^*(s)).$$

Математическое ожидание $\mathsf{E}\,\mu^*(\mathscr{U})=\varphi_0^*(x_{\mathscr{U}}(\cdot))/\nu^*(0)$, *где* $\nu^*(0)=\lim_{t\to\infty}\varphi_0^*([1-F_t0]/e^{\lambda_0 t})$.

Доказательство для общего случая дано в [4].

3. Пример 2. Пусть x_t есть одномерный винеровский процесс на $(0,\infty)$ с эластическим экраном в нуле; плотность вероятностей гибели постоянна: $k(x)\equiv k$, случайная мера η_x не зависит от x, т. е. $\eta_x\equiv\eta$, $h(x,u)\equiv h(u)$, $a(x)\equiv a$.

Тогда математическое ожидание $w(t,x)=M_t f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t'=w_{xx}''/2+k(a-1)w,\quad x\in(0,\infty),\quad w(0,x)=f(x),\quad w_x'(t,0)=-\theta w(t,0),\quad \theta>0.$$

Очевидно $M_t f(x)=e^{k(a-1)t}T_t f(x)$. Спектр инфинитезимального оператора $\mathscr{L}$ полугруппы T_t состоит из непрерывной части $\sigma_c(\mathscr{L})=(-\infty,0]$ и дискретной части $\sigma_p(\mathscr{L})$, состоящей из одной точки $\lambda_0=\theta^2$. Собственная функция $\varphi_0(x)$, соответствующая собственному значению λ_0, равна $\mathrm{const}\,e^{-\theta x}$ (см. [5]). Пронормируем ее так, чтобы $\|\varphi_0(x)\|_{L_2}(x)=1$. Тогда $\varphi_0(x)=2\theta\,e^{-\theta x}/\sqrt{\pi}$, $\varphi_0^*(f)=(2\theta/\sqrt{\pi})\int_0^\infty f(y)e^{-\theta y}\,dy$. Из общих теорем спектрального представления полугруппы следует, что $T_t f(x)=e^{\lambda_0 t}\varphi_0(x)\int_0^\infty\varphi_0(x)f(x)\,dx+o(e^{\varrho t})$, $\varrho<\lambda_0$. Подставим здесь $\lambda_0=\theta^2$, $\varphi_0(x)=2\theta e^{-\theta x}/\sqrt{\pi}$, т. е.

$$T_t f(x)=e^{\theta^2 t}\,\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\theta x}\int_0^\infty\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\theta x}f(x)\,dx+o(e^{\varrho t}).$$

Тогда математическое ожидание

$$M_t f(x)=\frac{4\theta^2}{\pi}\,e^{[\theta^2+k(a-1)]t-\theta x}\int_0^\infty e^{-\theta y}f(y)dy+o(e^{\varrho t}).\tag{5}$$

Следовательно ветвящийся процесс $(\tilde{X}_t,\ \tilde{\mathsf{P}}_x)$ будет докритическим, если $\theta^2+k(a-1)<0$, критическим, если $a=1-\theta^2/k$, надкритическим, если $a>1-\theta^2/k$.

Очевидно, если $\theta=0$, то x_t есть винеровский процесс на $(0,\infty)$ с отражением в нуле. Число частиц во всех областях $\mu_{xt}(\mathscr{X})$ есть процесс Галтона — Ватсона. Он будет докритическим, критическим или надкритическим в зависимости от того: $a<1$, $a=1$ или $a>1$. Но если будем интересоваться не только общим числом частиц в области, но и их расположением внутри области, то заметим, что асимптотическое поведение процесса $(\tilde{X}_t,\ \tilde{\mathsf{P}}_{\tilde{x}})$ имеет иной характер. Если $\theta=0$, спектр инфинитезимального оператора математического ожидания не имеет изолированного собственного значения. В связи с этим процесс $(\tilde{X}_t,\ \tilde{\mathsf{P}}_x)$ будет процессом точного типа, если $\theta>0$, и процессом неточного типа, если $\theta=0$. Все это показывает, что за счет эластичности экрана около нуля накапливается больше частиц, чем в других борелевских множествах $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$. Существование изолированного собственного значения позволяет доказать (при дополнительных условиях относительно моментов меры η) классические предельные теоремы для ветвящихся процессов. Приведем здесь формулировку для критического процесса:

Теорема 2. *Если* $\theta>0$, *и* $a=1-\theta^2/k$, $0<b=\mathrm{E}k\eta(\eta-1)<\infty$, *то для любого разбиения области* $\mathscr{X}=\bigcup_{j=1}^{e}\mathscr{U}_j$, $\mathscr{U}_j\in\mathscr{B}$, $\mathscr{U}_i\cap\mathscr{U}_j=\varnothing$ *при* $j\neq i$ *существует предел*

$$\lim_{t\to\infty}\{[\mu_{xt}(\mathscr{U}_j)/(2tb\varphi_0^*(x_{\mathscr{U}_j}(\cdot))]<z_j,\quad j=1,2,\ldots,l/\mu_{xt}(\mathscr{X})>0\}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если некоторое } z_j\leqq 0,\\ 1-\exp\{-\min\limits_j z_j\}, & \text{если все } z_j>0.\end{cases}$$

Доказательство для общего случая дано в [4].

4. Пример 3. Диффузия со сносом. Пусть x_t есть диффузионный процесс на $(0,\infty)$ с дисперсией σ^2, сносом $-\mu$ и поглощающим барьером в нуле. Опять-таки предполагаем, что размножение однородно, т. е. $\eta_x=\eta$, $a(x)\equiv a$, $k(x)\equiv k$. В этом примере T_tf вычисляется с помощью формулы Камерона—Мартина и принципом поглощения в нуле:

$$T_tf(x)=\int_0^\infty\frac{f(y)}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}}(\exp[-(x-\mu t-y)^2/2t\sigma^2]-\exp[-(x+\mu t+y)^2/2t\sigma^2])\,dy.$$

Тогда

$$M_tf(x)=\exp[(k(a-1)-\frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{\sigma^2})t]\int_0^\infty\frac{f(y)}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}}[\exp[-(x-y)^2+\mu(x-y)/2t\sigma^2]$$

$$-\exp[-(x+y)^2-\mu(x+y)/2t\sigma^2]]\,dy.$$

В этом примере ветвящийся диффузионный процесс $(\tilde{X},\tilde{\mathsf{P}}_{\tilde{x}})$ является процессом неточного типа, так как в спектре оператора $\mathscr{M}$ нет изолированного собственного значения.

В работе [6] дана следующая асимптотика для среднего числа частиц в области.

$$\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{X})\sim\begin{cases}t^{-3/2}\exp\{k(a-1)-\mu^2/2\sigma^2\}\,t, & \text{если}\quad \mu>0,\\ t^{-1/2}\exp\{k(a-1)t\}, & \text{если}\quad \mu=0,\\ \exp\{k(a-1)t\}, & \text{если}\quad \mu<0.\end{cases}$$

Кроме того, в критическом случае, когда $k(a-1)-\mu^2/2\sigma^2=0$, имеет место следующая оценка для вероятности вырождения:

$$x\exp\{\frac{\mu}{\sigma^2}\ x-c_1(\log t)^2\}$$

$$\leqq\mathsf{P}\{\mu_{xt}(\mathscr{X})>0\}\exp(3\mu^2\pi^2/2\sigma^2)^{1/3}t^{1/3}\leqq(1+x)\exp\{\mu x/\sigma^2+c_1(\log t)^2\},$$

где c_1 — некоторая константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe. Branching Markov processes, I, II, III, *J. Math. Kyoto Univ.*, **8**, 1968, 233—278, 265—410; **9**, 1969, 85—160.
2. Е. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Москва, 1964.
3. К. Ито, Г. Маккин. Диффузионные процессы и их траектории. Москва, 1968.
4. П. И. Майстер. Ветвящиеся диффузионные процессы в неограниченной области. *Мат. сб.* (в печати).
5. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Москва, 1963.
6. H. Kesten. Branching Brownian motion with absorption. *Stoch. Processes and Appl.*, **7**, 1978, 9—47.
7. Г. Л. Пасторе. Несколько теорем о марковских ветвящихся процессах. *Вест. Моск. ун-та. Мат. мех.*, 1978, № 4, 16—25.

Институт иностранных студентов, София

Поступила 17. 3. 1980