Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ II. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ФАН ДЫК ЧАУ

В работе доказывается существование сильного решения одной краевой задачи для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения.

Эта работа является непосредственным продолжением работы [6]. В ней доказывается существование сильного решения задачи B.

Краткое изложение полученных результатов опубликовано в заметках [4; 5].

1. В ограниченной или неограниченной области $D\subset R^2$ рассматривается уравнение

$$Lu = k(x)u_{xx}+m(y)u_{yy}+\alpha(x, y)u_x+\beta(x, y)u_y=f(x, y), \tag{1}$$

где $k(x)$ и $m(y)\in C^2(\bar{D})$, причем $xk(x)>0$ для $x\neq 0$, $ym(y)>0$ для $y\neq 0$, $0<K_0\leqq k'(x)\leqq K_1$, $0<K_0\leqq m'(y)\leqq K_1$, $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)\in C^1(\bar{D})$.

Пусть $u\in C^2(\bar{D})$. Если положим $u_1=\partial_1 u$, $u_2=\partial_2 u$ $(\partial_1=\partial/\partial x,\ \partial_2=\partial/\partial y)$, то уравнение (1) сводится к системе

$$\widehat{A}_1\partial_1\widehat{u}+\widehat{A}_2\partial_2\widehat{u}+\widehat{B}\,\widehat{u}=\widehat{F},$$

где $\widehat{u}=(u_1, u_2)$, $\widehat{F}=(0, f)$, $\widehat{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ k & 0\end{pmatrix}$, $\widehat{A}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$, $\widehat{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$. Умножая эту систему слева на матрицу $E=\begin{pmatrix}k & b\\ -mb & 1\end{pmatrix}$, получим симметричную систему

$$\widehat{L}\,\widehat{u} = A_1\partial_1\widehat{u}+A_2\partial_2\widehat{u}+B\widehat{u}=F, \tag{2}$$

где $F=(bf, f)$,

$$A_1=\begin{pmatrix}kb & k\\ k & -mb\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-k & mb\\ mb & m\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b\alpha & b\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix},$$

$$b(x, y)=\begin{cases} b_1 & \text{при}\quad x\leqq 0,\ y>0,\\ b_1+(b_2-b_1)\,x/(x+y) & \text{при}\quad x>0,\ y>0,\\ b_2 & \text{при}\quad x\geqq 0,\ y\leqq 0,\end{cases}$$

где b_1 и b_2 постоянные, причем $b_1 > k'(0)/m'(0) > b_2$. Если выполняется условие (P) (см. [6, п. 2]), то система (2) будет положительно симметрична в $R^2 \setminus \{x<0,\ y<0\}$. Существует область $R^* \subset R^2 \setminus \{x<0,\ y<0\}$ такая, что: а) система (2) положительно симметрична в R^*, б) выражение $\det E = k(x) + b^2(x, y) m(y) \geqq cr$, где $c = \text{const} > 0$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, в) в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ характеристика уравнения (1), проходящая через $(0, 0)$, содержится в R^*. Дальше будем рассматривать только области $D \subset R^*$.

Пусть граница $S = \partial D$ кусочно гладкая. Обозначим $S_0 = S \cap \{H \geqq 0,\ bn_1 + n_2 \geqq 0\}$, $S_{00} = S \cap \{H < 0,\ bn_1 + n_2 > 0\}$, $S' = S \cap \{H > 0,\ bn_1 + n_2 < 0\}$, $S_{\sim} = S \cap \{H \leqq 0,\ bn_1 + n_2 < 0\}$, где $H = kn_1^2 + mn_2^2$, $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к S. Тогда $S = S_0 \cup S_{00} \cup S' \cup S_{\sim}$. Пусть $F \in L_2(D)$.

В [6] рассмотрена следующая

Задача А. *Найти решение системы* (2), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$(3) \qquad \begin{aligned} &n_1 u_2 - n_2 u_1 = 0 \quad \text{на} \quad S_0; \quad u_1 = u_2 = 0 \quad \text{на} \quad S_{00};\\ &bu_1 + u_2 \quad = 0 \quad \text{на} \quad S'; \quad u \sim \qquad\quad \text{на} \quad S_{\sim}. \end{aligned}$$

Обозначим $S_{\sim}^* = \{(x, y) \in S : H \leqq 0,\ bn_1 + n_2 > 0\}$. Пусть $S_{\sim} = \cup \Gamma_i^1$, $S_{\sim}^* = \cup \Gamma_i^2$, $S \setminus (S_{\sim} \cup S_{\sim}^*) = \cup \Gamma_i^3$. Здесь Γ_i^k — замкнутые, связные кривые. Через $\sphericalangle(\Gamma_i, \Gamma_j)$ будем обозначать угол, образованный при пересечении Γ_i и Γ_j, рассмотренный со стороны области. Предположим, что

a1. $\Gamma_i^1 \in C^1$, $\Gamma_i^2 \in C^1$, $\Gamma_i^3 \in C^2$; если $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^2 \neq \varnothing$ то или $\Gamma_i^1 \in C^2$, или $\Gamma_j^2 \in C^2$

a2. $0 < \sphericalangle(\Gamma_i^k, \Gamma_j^l) < \pi$ для $k \neq l$ и для $k = l = 3$, $i \neq j$; $(0, 0) \notin S_0 \cap S_{00} \cup S'$;

a3. Множество тех точек на Γ_j^3, в которых выражение $bn_1 + n_2$ меняет знак, не имеет конечных точек сгущения.

В работе [6] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть область $D \cup R^*$ удовлетворяет условиям* a1—a3. *Тогда для каждой функции $F = (f_1, f_2) \in L_2(D)$ существует одно и только одно сильное решение задачи.* А. *Для всех кусочно гладких $\widehat{u}$ удовлетворяющих* (3) *с ограниченными носителями, выполняется оценка* $\|\widehat{u}\| \leqq c \|\widehat{L}\widehat{u}\|$.

Как в [1], можно доказать, что имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполняются предположения* a1—a3, *область $D \subset R^*$ и носитель функции F ограничен. Тогда существует последовательность кусочно гладких функций $\widehat{u}_k$, удовлетворяющих* (3) *такие, что*

$\operatorname{supp} \widehat{u}_k \subset \{r \leqq 2^{k+1}\}$, $\|\widehat{u}_k - \widehat{w}\| \to 0$ *при* $k \to \infty$, $\|\widehat{L}\widehat{u}_k - F\| \leqq c\,(k \ln k)^{-1/2}$, *где* $\widehat{w}$ — *сильное решение задачи А.*

2. Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1), соответствующей задачи А.

Задача В. *Найти решение уравнения* (1) *в области $B \subset R^*$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$(4) \qquad u = 0 \ \text{на} \ S_0; \ u = \partial u/\partial n = 0 \ \text{на} \ S_{00}; \ bu_x + u_y = 0, \ \text{на} \ S'.$$

Пусть $D \subset R^*$. Предположим, что:

в1. Область D можно записать в виде $\bar{D} = \{x_1 \leqq x \leqq x_2,\ y_-(x) \leqq y \leqq y_+(x)\}$, и в виде $\bar{D} = \{y_1 \leqq y \leqq y_2,\ x_-(y) \leqq x \leqq x_+(y)\}$;

в2. $S=S^0\cup S^1$; $S^0\neq\emptyset$; $(0,0)\notin S^0$;
в3. S^1 — связная часть; $S^1\subset\{(x,y):xy\leqq 0\}$; $S^1\cap\{n_1>0\}\subset\{(x,y):x\leqq 0, y\geqq 0\}$.

Имеет место следующая теорема [6].

Теорема 2. *Пусть область $D\subset R^*$ удовлетворяет условиям* в1—в3 *и ограниченная область G содержится в D. Тогда существуют ограниченная область $G'\subset D$ и постоянная $c(G')$ такие, что для всех функций $u\in C^1(\bar D)$ выполняется оценка*

$$\|u/\sqrt{1+x^2y^2}\|_{L_2(G)}\leqq c_0(\|u_x\|_{L_2(G')}+\|u_y\|_{L_2(G')})+c\max_{S^0\cup G'}|u|.$$

Здесь постоянная c_0 зависит только от D. Если $\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|_{L_2(D)}<\infty$, постоянная c тоже зависит только от D, а в противном случае $c(G')$ возрастает, как $\|(1+x^2+y^2)^{-1/2}\|_{L_2(G')}$.

Следствие. *Для всех функций $u\in C^1(\bar D)$, $u=0$ на S^0, выполняется оценка*

$$\|u/\sqrt{1+x^2+y^2}\|_{L_2(D)}\leqq c_0(\|u_x\|_{L_2(D)}+\|u_y\|_{L_2(D)}).$$

Определение 1. *Функция $u(x,y)$ называется слабым решением задачи* В, *если $(u, L^*v)=(f,v)$ для каждой функции $v\in C^2(\bar D)$ с ограниченным носителем, удовлетворяющей сопряженным краевым условиям.*

Через W обозначим гильбертово пространство с нормой $\|u\|_W=\|u/\sqrt{1+x^2+y^2}\|_{L_2(D)}$.

Определение 2. *Функция $u(x,y)$ называется сильным решением задачи* В, *если существует последовательность функций $u_k\in C^2(\bar D)$ с ограниченными носителями, удовлетворяющих условиям* (4) *и $\|u_k-u\|_W\to 0$, $\|Lu_k-f\|_{L_2(D)}-1\to 0$ при $k\to\infty$.*

Рассматривая задачу В, предполагаем, что $S^0=S_0\cup S_{00}$, $S'=S_\sim$, $S'=\emptyset$. Тогда имеет место следующая теорема [6].

Теорема 3. *Пусть область $D\subset R^*$ удовлетворяет условиям* в1—в3. *Тогда задача* В *может иметь не более одного сильного решения $u\in W$, и вополняется оценка*

$$\|u\|_W+\|u_x\|_{L_2(D)}+\|u_y\|_{L_2(D)}\leqq c\|Lu\|_{L_2(D)}, \tag{5}$$

для всех функций $u\in C^2(\bar D)$ с ограниченным носителем, удовлетворяющих краевым условиям (4).

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть функции $v_k\in L(D)$ имеют ограниченные носители и $\|rv_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда*

$$\Big\|\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt\Big\|\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Доказательство. Пусть $0\neq x\in(x_1,x_2)$. Тогда

$$J_k=\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}\Big[\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt\Big]^2dy$$

$$=-y_-(x)\,[\int\limits_{y_+(x)}^{y_-(x)} v_k(x,t)dt]^2-2\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} yv_k(x,y)\,[\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x,t)dt]\,dy=J_{1k}+J_{2k},$$

$$J_{2k}\leqq 2\,\{\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}(rv_k)^2dy\}^{1/2}\cdot\{\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}[\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x,t)dt]^2dy\}^{1/2}.$$

Имеем $J_{1k}\leqq 0$ для $\{x: y_-(x)\geqq 0\}$. Если $y_-(x)<0$, то $|y_-(x)|\leqq qx$ (см. доказательство теоремы 2]6]). Отсюда получаем

$$J_{1k}\leqq |y_-(x)|\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}\frac{dt}{x^2+t^2}\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}(rv_k)dt\leqq\left|\frac{y_-(x)}{x}\right|2\pi\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)}(rv_k)^2dt.$$

Следовательно,

$$\|\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_kdt\|^2=\int\limits_{x_1}^{x_2}J_kdx\leqq 2\pi q\,\|rv_k\|^2+2\,\|rv_k\|\,\|\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_kdt\|.$$

Лемма 2 доказана.

Имеет место аналогичная

Лемма 2'. *Пусть функции $v_k\in L_2(D)$ имеют ограниченные носители и $\|rv_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда*

$$\|\int\limits_{x_+(y)}^{x} v_k(t,y)dt\|\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Дополнительно будем предполагать, что выполняется ещё следующее условие:

в4. Если $S_\smile\cap\{n_2>0\}\neq\emptyset$ неограничена и $S_\smile\cap\{n_1>0\}\neq\emptyset$, то $S_\smile\cap\{n_1>0\}$ ограничена.

Теорема 4. *Пусть область $D\subset R^*$ и выполняются условия* а1—а3, в1—в4. *Тогда для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует сильное решение $u\in W$ задачи* В, *причем $u_x\in L_2(D)$, $u_y\in L_2(D)$.*

Доказательство. Докажем существование сильного решения задачи В для некоторого множества функций f, всюду плотного в $L_2(D)$. Пусть функция $f\in L_2(D)$ имеет ограниченный носитель. Рассмотрим 3 случая:

Случай 1. $S_\smile\cap\{n_2>0\}=\emptyset$;

Случай 2. $S_\smile\cap\{n_2>0\}\neq\emptyset$ и ограничена;

Случай 3. $S_\smile\cap\{n_2>0\}\neq\emptyset$ и неограничена.

Рассмотрим случай 1. Через Γ обозначим множество тех точек $\{(x,y): y=y_+(x)\}$, где $y_+(x)<+\infty\}$. Так как $S_\smile\cap\{n_2>0\}=\emptyset$, то $\Gamma\subset S_0\cup S_{00}=S^0$. Пусть $\widehat{u}=(u_1,u_2)$ — сильное решение задачи А. Из леммы 1 следует, что существуют функции $\widehat{u}_k=(u_{1k},u_{2k})$ такие, что

$$\operatorname{supp} u_{ik}\subset\{r\leqq 2^{k+1}\};\ \|u_{ij}-u_i\|\to 0 \text{ при } k\to\infty\ (i=1,2);$$

$$\left\|\begin{pmatrix}k & b\\ -mb & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1u_{2k}-\partial_2u_{1k}\\ k\partial_1u_{1k}+m\partial_2u_{2k}+\alpha u_{1k}+\beta u_{2k}-f\end{pmatrix}\right\|\leqq(k\ln k)^{-1/2}.$$

Кроме того, имеем

(6) $$n_1u_{2k}-n_2u_{1k}=0 \text{ на } S_0:\ u_{1k}=u_{2k}=0 \text{ на } S_{00}.$$

Так как $k(x)+b^2(x, y)n(y)\geqq cr(x, y)$ в R^*, то

$$\|r(\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k})\|\leqq c(k\ln k)^{-1/2}, \tag{7}$$

$$\|k\partial_1 u_{1k}+m\partial_2 u_{2k}+\alpha u_{1k}+\beta u_{2k}-f\|\to 0 \text{ при } k\to\infty$$

Для $(x, y)\in\bar{D}$ определяем

$$\psi_k(x, y)=\int_{y_+(x)}^{y} u_{2k}(x, t)dt. \tag{8}$$

Так как носители u_{2k} ограничены, носители ψ_k тоже ограничены. Из (6) имеем

$$\partial_1\psi_k-u_{1k}=\int_{y_+(x)}^{y}[\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k}]dt. \tag{9}$$

Используя лемму 2, из (9) получаем $\|\partial_1\psi_k-u_1\|\to 0$ при $k\to\infty$. Ясно, что $\|\partial_2\psi_k-u_2\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Рассмотрим краевые условия. S^0 состоит из трех частей: $S^0\cap\{n_2>0\}$ $S_0\cap\{n_2<0\}$ и $S^0\cap\{n_2=0\}$. Очевидно $\psi_k=0$ на $S^0\cap\{n_2>0\}$. На $S_0\cap\{n_2=0\}$ имеем $u_{2k}=0$, т. е. $\psi_k=C$. Если $S_0\cap\{n_2=0\}$ примыкает к $S^0\cap\{n_2>0\}$, то $C=0$, т. е. $\psi_k=0$. Если $S_0\cap\{n_2=0\}$ неограничена, то так как носитель ψ_k ограничен, имеем $C=0$, т. е. $\psi_k=0$. Остаются случаи: $S_0\cap\{n_2<0\}$ и $S^0\{n_2=0\}$, оба конца которых примыкают к $\{y=y_-(x)\}$. Так как S_- связная, это множество является объединением не более двух связных частей. Пусть $(x(s), y(s))$ — точка принадлежит одной из них. Тогда

$$\frac{d\psi_k}{ds}(x(s), y(s))=\frac{dx}{ds}\int_{y_+(x(s))}^{y(s)}[\partial_2 u_{1k}-\partial_1 u_{2k}]dt,$$

так, что

$$\psi_k(x(s), y(s))=\psi_k(s_1), y(s_1))=-\int_{x(s_1)}^{x(s)}\int_{y_-(x)}^{y_+(x)}[\partial_2 u_{1k}-\partial_1 u_{2k}]dt.$$

Если рассматриваемая часть ограничена, то найдется точка, в которой эта часть примыкает к $S^0\cap\{n_2>0\}$. Если эта часть неограничена, то из ограниченности носителя функции ψ_k найдется точка, в которой $\psi_k=0$. Таким образом существует точка $(x(s_1), y(s_1))$, в которой $\psi_k(x(s_1), y(s_1))=0$. Так как $(0, 0)\notin S^0$, существует $\sigma>0$ такое, что

$$|\psi_k|\leqq\int_{D\cap\{\sigma\leqq r\leqq 2^{k+1}\}}|\partial_2 u_{1k}-\partial_1 u_{2k}|\,dx\,dy.$$

Из (7) получим

$$|\psi_k|\leqq\{2\pi\int_{\sigma}^{2^{k+1}}\frac{rdr}{r^2}\}^{1/2}\{\int_D r^2(\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k})dx\,dy\}^{1/2}$$

$$\leqq c\sqrt{k+1}\,\|r(\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_1 k)\|\leqq\text{const}\sqrt{(k+1)/k\ln k},$$

где const не зависит от k. Следовательно

$$\psi_k\rightrightarrows 0 \quad\text{на}\quad S_0\cup S_{00} \text{ при } k\to\infty. \tag{10}$$

Пусть ограниченная область $G\subset D$, и G' — соответствующая ей ограниченная область (см. теорему 2). Функции ψ_k кусочно гладкие в G' и $\partial_1\psi_k$, $\partial_2\psi_k$ сходится в $L_2(G')$. Так как область G ограничена, из (10) и теоремы 2 следует, что последовательность функций ψ_k фундаментальна в $L_2(G)$, т. е. существует $\psi\in L_2(G)$, для которой $\|\psi_k-\psi\|_{L_2(G)}\to 0$ при $k\to\infty$. Ясно, что, $\partial_1\psi=u_1$, $\partial_2\psi=u_2$ в G и $\psi=0$ в среднеквадратичном смысле на S^0. Из следствия теоремы 2 получаем $\psi\in W$.

Докажем, что ψ является слабым решением задачи В. Пусть $v\in C^2(\overline{D})$ удовлетворяет сопряженным условиям, имеет ограниченный носитель и равна нулю в окрестности $S_\smile$. Имеем

$$\begin{aligned}(\psi_k, L^*v)-(f, v)&=(\psi_k, (kv)_{xx}+(mv)_{yy}-(\alpha v)_x-(\beta v)_y\\&=(k\partial_1u_{1k}+m\partial_2u_{2k}+\alpha u_{1k}+\beta u_{2k}-f, v)+([u_{1k}-\partial_1\psi_k], \partial_1(kv))\\&+([u_{2k}-\partial_2\psi_k], \partial_2(mv))+\alpha[\partial_1\psi_k-u_{1k}], v)+(\beta[\partial_2\psi_k-u_{2k}], v)\\&+\int_S\psi_k[\partial_1(kv)n_1+\partial_2(mv)n_2-\alpha n_1v-\beta n_2v]ds-\int_S[kn_1u_{1k}+mn_2u_{2k}]vds.\end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю, так как $u_{1k}=u_{2k}=0$ на S_{00}, $v=0$ на $S_\smile$, $v=0$ на $S_0\cap\{H>0\}$, и на $S_0\cap\{H=0\}$ имеем $n_2u_{1k}-n_1k_{2k}=0$, отсюда $kn_1u_{1k}+mn_2u_{2k}=0$. Остальные выражения сходятся к нулю и $\psi_k\to\psi$ в L_2 на $\operatorname{supp} v$. Следовательно, $(\psi, L^*v)=(f, v)$, т. е. ψ является слабым решением задачи В.

Докажем, что ψ является сильным решением задачи В. Пусть $\Phi\in C^\infty[0, \infty)$, $0\leq\Phi\leq1$, $\Phi(r)=1$ для $0\leq r\leq1$, $\Phi(r)=0$ для $r\geqq3/2$. Обозначим $\Phi_k=\Phi(r2^{-k})\in C_0^\infty$ и $w_k=\Phi_k\psi$. Функция w_k является слабым решением уравнения

$$Lw=f_k, \tag{11}$$

удовлетворяющим краевым условиям (4), где

$$f_k=\Phi_kf+2[k(\Phi_k)_xu_1+m(\Phi_k)_yu_2]+\psi[k(\Phi_k)_{xx}+m(\Phi_k)_{yy}+\alpha(\Phi_k)_x+\beta(\Phi_k)_y].$$

Действительно, так как ψ является слабым решением задачи В, то $(\psi, L^*(\Phi_kv))=(f, \Phi_kv)$, где v удовлетворяет сопряжненным условиям. Тогда

$$\begin{aligned}(\psi, L^*(\Phi_kv))=(\psi, \Phi_kL^*v)-2([k(\Phi_k)_xu_1+m(\Phi_k)_yu_2], v)+([k(\Phi_k)_{xx}+m(\Phi_k)_{yy}\\+\alpha\Phi_k)_x+\beta(\Phi_k)_y], v).\end{aligned}$$

Рассмотрим ограниченную область, которая содержит $\operatorname{supp}\Phi_k$. На $S_\smile$ не задается краевое условие, на $S^*_\smile$ — сопряженное условие. Функция w_k имеет ограниченный носитель, и $w_k\in W_2^1(D)$, $w_k=0$ на $S\setminus S_\smile$. Используя результаты о совпадении слабого и сильного решения для операторов второго порядка, получим, что w_k является сильным решением задачи (11), (4) в этой ограниченной области. Продолжая аппроксимирующие функции как равные нулю, в остальной части области D получаем, что w_k является сильным решением задачи (11), (4) в D. Имеет место следующее

$$\|w_k-\psi\|_W=\|(w_k-\psi)/\sqrt{1+x^2+y^2}\|_{L_2(D\cap\{r\geqq2^k\})}\leqq2\|\psi/\sqrt{1+x^2+y^2}\|_{L_2(D\cap\{r\geqq2^k\})}\to0.$$

Так как носитель функции f ограничен, существует число k_0 такое, что для $k\geqq k_0$ имеем $\Phi_kf=f$. Обозначим $D^k=D\cap\{2^k\leqq r\leqq2^{k+1}\}$. При $k\to\infty$

$$\| f_k - f \| \leqq c\,(2^{-k} \| \psi \|_{L_2(D^k)} + \| u_1 \|_{L_2(D^k)} + \| u_2 \|_{L_2(D^k)})$$

$$\leqq c'(4 \| (1+x^2+y^2)^{-1/2} \psi \|_{L_2(D^k)} + \| u_1 \|_{L_2(D^k)} + \| u_2 \|_{L_2(D^k)} \to 0.$$

Таким образом ψ является сильным решением задачи В.

Рассмотрим случай 2: $S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\} \neq \varnothing$ и ограничена. Пусть

$$S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\} = S'_{\smile} = \{x_1 \leqq x \leqq x',\ y = \tilde{y}_+(x)\},$$

$$D' = \{x_1 \leqq x \leqq x_2,\ \tilde{y}_+(x) \leqq y \leqq \tilde{y}_+(x') = y^*\}.$$

Слева $S'_{\smile}$ нет других частей из $S \cap \{n_2 > 0\}$. Действительно, на таких частях имеем $dy/dx = -n_1/n_2 \leq 1/b$. Однако $dy/dx > 1/b$ на $S'_{\smile}$, и тогда угол пересечения этих частей и $S'_{\smile}$ был бы больше π со стороны области, что противоречит условию а2. Пусть $x'_{\smile}(y)$ — обратная к $\tilde{y}_+(x)$ функция. Тогда производная $\tilde{x}'_-(y)$ непрерывна, за исключением конечного числа точек, $0 < \tilde{x}'_-(y) \leqq \mathrm{const}$.

В области $\{x_1 \leqq x \leqq x',\ y_-(x) \leqq y \leqq \tilde{y}_+(x)\}$ функции u_{1k}, u_{2k} можно взять из C^1 (см. [2]). Продолжим u_{1k}, u_{2k} в D'. Для $(x, y) \in D'$ определяем

$$u_{1k}(x, y) = u_{1k}(\tilde{x}_-(y), y),\quad u_{2k}(x, y) = u_{2k}(\tilde{x}_-(y), y) + [x - \tilde{x}_-(y)]v_k(y),$$

где $v_k(y) = \dfrac{d}{dy}[u_{1k}(\tilde{x}_-(y), y)]$. В $D \cup \bar{D}'$ функции u_{1k}, u_{2k} непрерывны и в D' выполняется $\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k} = 0$. Для $(x, y) \in D \cap \{x < x'\}$ определяем $\psi_k(x, y) = \int_{K_*}^{y} u_{2k}(x, t)dt + \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ определим дополнительно. Для $(x, y) \in D \cap \{x \geqq x'\}$ определяем $\psi_k(x, y) = \int_{y_+(x)}^{y} u_{2k}(x, t)dt$. Пусть $\varphi_k(x') = 0$. Тогда $\psi_k(x, y)$ непрерывна в $\bar{D}$. Очевидно $\partial_2 \psi_k = u_{2k}$. Для $x \neq x_i = x_-(y_i)$, где y_i — точки разрыва $\tilde{x}'_{\smile}(y)$, получаем

$$\partial_1 \psi_k - u_{1k} = \int_{y_+(x)}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]dt + \varphi'_k(x) - u_{1k}(x', y_+(x')).$$

Если выберем $\varphi_k(x) = (x - x')u_{1k}(x', y_+(x'))$, то в $\bar{D}$ функция ψ_k непрерывна, и

$$\partial_1 \psi_k = u_{1k} + \int_{y_+(x)}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]\ dt,\quad \partial_2 \psi_k = u_{2k}.$$

Далее доказательство проводится как в случае 1.

Рассмотрим случай 3: $S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\} \neq \varnothing$ и неограничена. Рассмотрим два подслучая: а) $S_{\smile} \cap \{n_1 > 0\} = \varnothing$, б) $S_{\smile} \cap \{n_1 > 0\} \neq \varnothing$. Во втором подслучае предположим, что

в4. Если $S_{\smile} \cap \{n_2 > 0\} \neq \varnothing$ неограничена и $S_{\smile} \cap \{n_1 > 0\} \neq \varnothing$, то $S_{\smile} \cap \{n_1 > 0\}$ ограничена.

Рассмотрим первый подслучай. Имеем $\{(x, y) : x = x_+(y)$, где $x_+(y) < +\infty\}$. Для $(x, y) \in \bar{D}$ определяем $\psi_k(x, y) = \int_{x_+(y)}^{x} u_{1k}(t, y)dt$. Так как носитель функции u_{1k} ограничен, то носитель функции ψ_k ограничен. Повторяя все рассуждения как в случае I и используя лемму 2', получаем

а) $\| \partial_1 \psi_k - u_1 \| \to 0$, $\| \partial_2 \psi_k - u_2 \| \to 0$ при $k \to \infty$;

б) $\psi_k \rightrightarrows 0$ на $S^0 = S \cup S_{00}$ при $k \to \infty$;

в) существует $\psi \in W$, для которой $\|\psi_k-\psi\|_{R_2(G)}\to 0$ при $k\to\infty$, где G — ограниченная область в D; $\partial_1\psi=u_1$, $\partial_2\psi=u_2$ в G, $\psi=0$ в среднеквадратичном смысле на S^0;
г) ψ является сильным решением задачи В.

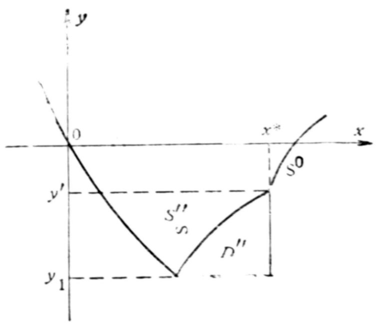

Рис. 1

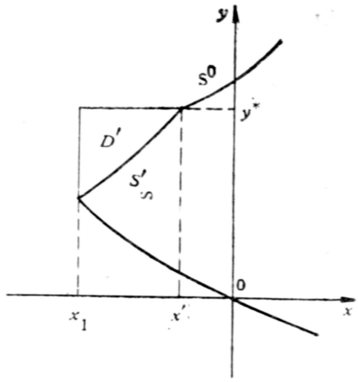

Рис. 2

Рассмотрим второй подслучай и предположим, что выполняется предположение в4. Пусть

$$S_\sim \cap \{n_1>0\} \equiv S''_\sim = \{\, y_1 \leqq y \leqq y',\ x=\tilde{x}_+(y)\},$$

$$D'' = \{\, y_1 \leqq y \leqq y',\ \tilde{x}_+(y) \leqq x \leqq \tilde{x}_+(y') = x^*\} \quad \text{(рис. 2)}.$$

Под $S''_\sim$ нет других частей из $S\cap\{n_1>0\}$. Действительно, на таких частях имеет место $dy/dx=-n_1/n_2\geqq 1/b$ (здесь очевидно $n_2<0$). Однако на $S''_\sim$ выполняется $dy/dx<1/b$. Тогда угол пересечения этих частей и $S''_\sim$ был бы больше π со стороны области, что противоречит условию а2. Пусть $\tilde{y}_-(x)$ обратная к $\tilde{x}_+(y)$ функция. В области $\{\, y_1\leqq y\leqq y',\ x_-(y)\leqq x\leqq \tilde{x}_+(y)\}$ функции u_{1k}, u_{2k} можно взять из C^1. Продолжим u_{1k}, u_{2k} в области D''. Для $(x, y)\in D''$ определяем

$$u_{2k}(x, y)=u_{2k}(x, \tilde{y}_-(x)),$$

$$u_{1k}(x, y)=u_{1k}(x, \tilde{y}_-(x))+[\,y-\tilde{y}_-(x)]z_k(x),$$

где $z_k(x)=\frac{d}{dx}\,[u_{2k}(x, \tilde{y}_-(x))]$. Для $(x, y)\in D\cap\{\,y<y'\,\}$ определяем $\psi_k(x, y) = \int_{x^*}^{x} u_{1k}(t, y)dt+\chi_k(y)$, где $\chi_k(y)=(y-y')u_{2k}(x_+(y'), y')$.

Для $(x, y)\in D\cap\{\,y\geqq y'\}$ определяем $\psi_k(x, y) = \int_{x_+(y)}^{x} u_{1k}(t, y)dt$. Тогда в $\bar{D}$ получаем

$$\partial_1\psi_k=u_{1k},\ \partial_2\psi_k=u_{2k}+\int\limits_{x_+(y)}^{x}[\partial_2u_{1k}-\partial_1u_{2k}]dt.$$

Далее доказательство проводится как в случае 1. Теорема 4 доказана.

Замечание. Рассмотрим один пример, для которого не выполняется условие в4. Рассмотрим уравнение $(xu_x)_x+(yu_y)_y=f(x, y)$ в неограниченной области G с границей $S=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Lambda_4\cup\Lambda_5$ (рис. 3). Λ_0 — гладкая кривая в $\{x>0,\ y>0\}$, на которой $n_1>0$, $n_2>0$ (например $\Lambda_0\{y=1/x,\ x>0\}$; $\Lambda_1=\{y=-1/x,\ -1/2\leqq x<0\}$; $\Lambda_2=\{x=-1/2,\ 1/2\leqq y\leqq 2\}$; $\Lambda_3=\{x+y=0, -1/2\leqq x\leqq 1/2\}$ — характеристика уравнения, проходящая через $(0, 0)$; $\Lambda_4, =\{y=-1/2,\ 1/2\leqq x\leqq 2\}$; $\Lambda_5=\{y=-1/x, 2\leqq x\}$. Очевидно $\Lambda_0=S_0$. Докажем, что $\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Lambda_4\cup\Lambda_5=S_\sim$. На Λ_2 имеем $n_1=-1$, $n_2=0$, $bn_1+n_2=-b_1<0$; $H=x-1/2<0$; т.е. $\Lambda_2\subset S_\sim$. На Λ_3 имеем $H=0$; $bn_1+n_2<0$ т. е. $\Lambda_3\subset S_\sim$. На Λ_1 имеем $n_1=0$, $n^2=-1$, $bn_1+n_2=-1<0$; $H=y=-1/2<0$; т. е $\Lambda_4\subset S_\sim$. На Λ_1 имеем $-n_2/n_2=1/x^2$ (здесь $n_1<0, n_2>0$), $n_2=-n_2/x^2$; $bn_2+n_2=n_2(x^2-b_1)/x^2<0$, так как $b_2>1>b_2$, (b_1-b_2) — достаточно мало, $x<b_1$; $H=n_2^2(x+yx^4(|x^4=n_2^2(1-x^2)/x^3<0$; т. е. $\Lambda_1\subset S_\sim$. На Λ_5 имеем $-n_1/n_2=1/x^2$ (здесь $n_1>0$, $n_2<0$); $bn_1+n_2=n_2(x^2-b_2)/x^2<0$, так как $x>b_2$; $H=n_2^2\ .(1-x^2)/x^3<0$; т. е. $\Lambda_5\subset S_\sim$. В этом примере $\Lambda_1=S_\sim\cap\{n_2>0\}$ неограничена и $\Lambda_5\cap S_\sim\cap\{n_1>0\}$ тоже неограничена.

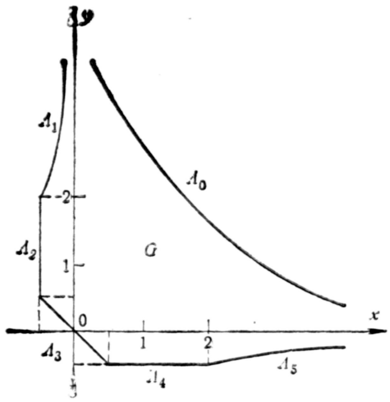

Рис. 3

Выражаю благодарность Г. Д. Каратопраклиеву и Н. И. Попиванову за внимание к этой работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Попиванов. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в неограниченных областях. II. Существование сильного решения. *Дифференц. уравнения*, **14**, 1978, 665—679.
2. Н. И. Попиванов. Совпадение слабого и сильного решений краевых задач для линейных систем первого порядка. *Сердика*, **1**, 1975, 121—132.
3. Н. И. Попиванов. Гранични задачи за уравнения от смесен тип и израждащи се хиперболични уравнения. Диссертация, София, 1975.
4. Фан Дык Чау. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения в ограниченных областях. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 599—602.
5. Фан Дык Чау. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения в неограниченных областях. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1317—1320.
6. Фан Дык Чау. Уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. I. Теорема единственности. *Сердика*, **8**, 1982 92—103.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 7. 7. 1980