Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЛАПЛАСА И ЛОГИСТИЧЕСКОМ КАК ПРЕДЕЛЬНЫХ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Б. В. ГНЕДЕНКО, Д. Б. ГНЕДЕНКО

Исследуются предельные теоремы для сумм одинаково распределенных независимых случайных величин в случайном числе. При подходящей нормировке и центровке, а также распределении числа слагаемых, оказывается, роль нормального распределения начинает играть распределение Лапласа.

При исследовании максимальной из случайных величин, взятых в случайном числе, особую роль играет логистическое распределение. Для распределений максимальных величин слагаемых доказывается теорема переноса, связывающая сходимость распределений максимумов для неслучайного числа и для случайного числа рассматриваемых первичных величин.

1. Общая направленность работы. Последние четверть века внимание ряда авторов было привлечено к исследованию предельных распределений для сумм случайного числа случайных слагаемых. Этот интерес вполне естествен, поскольку к их рассмотрению приводятся задачи последовательного статистического анализа, физики, экономики, теории надежности и многих других областей знания. Возникающая при этом теория интересна и с чисто математических позиций.

Здесь мы, наряду с предельными теоремами для сумм, изучаем и предельные распределения для максимальной величины из последовательности одинаково распределенных независимых величин в случайном числе. В идейном отношении настоящая работа примыкает к ранее опубликованным статьям одного из авторов.

2. Первичный пример. Мы начнем с рассмотрения одной задачи теории надежности, которая не только позволит увидеть естественность рассматриваемых нами задач, но и подметить целесообразный выбор закономерности, которой должно подчиняться число случайных величин, участвующих в операции суммирования или разыскания максимального значения.

Пусть требуется оценить надежность технической системы, состоящей из основного и резервного элементов, с восстановлением. Резервный элемент находится в ненагруженном резерве, оба элемента обладают одинаковыми техническими характеристиками, которые полностью восстанавливаются в результате ремонта.

В момент 0 начинает работать основной элемент системы, а резервный включается в момент отказа основного. Переключение осуществляется мгновенно. В момент отказа элемент начинает восстанавливаться. Длительность ремонта случайна с распределением вероятностей $G(x)$. Длительность безотказной работы элемента также случайна и имеет $F(x)$ своей функцией распределения. После окончания ремонта элемент поступает в резерв. Отказ системы наступает в момент, когда оба элемента окажутся в состоянии

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 229—234.

отказа. Задача состоит в определении распределения длительности безотказной работы дублированной системы.

Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ последовательные длительности безотказной работы элементов и через $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ длительности их восстановления. Очевидно, что отказ наступит в момент $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\nu$, где $\nu = \min_{k \geqq 2}(k, \xi_k < \eta_{k-1})$. Легко понять, что величина ν распределена по геометрическому закону $\mathsf{P}\{\nu = k\} = (1-\alpha)\alpha^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots,$ где $\alpha = \mathsf{P}\{\xi_k > \eta_{k-1}\} = \int_0^\infty G(x)dF(x)$.

В приведенной задаче величины ζ и ξ_k зависимы, однако эта зависимость убывает по мере уменьшения α. В теоретическом и прикладном отношениях особенно интересен случай, когда α мало. Мы предположим, что α зависит от целочисленного параметра n и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это предположение можно трактовать как последовательное совершенствование системы ремонта. На n-ой стадии совершенствования ремонта $\nu = \nu_n$, $\alpha = \alpha_n$ и, значит, длительность безотказной работы системы равна

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_n}. \tag{1}$$

Мы пришли, таким образом, к задаче оценки распределения суммы (1) независимых одинаково распределенных случайных величин, когда число слагаемых ν_n случайно и имеет геометрическое распределение.

Естественный интерес при этом имеет и оценка распределения другой случайной величины $\delta_n = \max_{1 \leqq k \leqq \nu_n} \xi_k$ при больших значениях n.

Без труда можно указать и другие примеры практических задач, в которых необходимо изучать суммы и максимальные значения случайных величин, взятых в случайном числе ν, когда распределение ν геометрическое.

3. **Первая теорема переноса.** В [1] была доказано предложение, которое авторы назвали теоремой переноса. В ней рассматривается следующая постановка задачи.

Пусть заданы следующие последовательности:

$\{k_n\}$, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

случайных величин $\{\nu_n\}$, принимающих только неотрицательные целочисленные значения и

$\{\xi_{nk}\}$ независимых при каждом n случайных величин ξ_{nk}, для которых $\mathsf{P}\{\xi_{nk} < x\} = F_n(x)$; величины ν_n независимы от ξ_{nk}. Это последнее требование можно значительно ослабить.

Спрашивается, при каких условиях сходимость функций распределения сумм $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n}$ индуцирует сходимость функций распределения сумм $\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{n\nu_n}$? Ответ содержится в теореме переноса

Теорема переноса. *Если при* $n \to \infty$

A) $$\mathsf{P}\{\xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} < x\} \to \Phi(x),$$

B) $$\mathsf{P}\{\nu_n/k_n < x\} \to A(x),$$

то имеет место также

C) $$\mathsf{P}\{\xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{n\nu_n} < x\} \to \Psi(x),$$

где

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Psi(x) = \int_0^\infty [\varphi(t)]\, dA(z). \tag{2}$$

Согласно классическим результатам теории вероятностей функции $\Phi(x)$ безгранично делимы. Известно, что если в формуле (2) функция $A(z)$ безгранично делима, то распределение $\Psi(x)$ также безгранично делимо.

Сформулированная теорема позволяет получить множество интересных следствий. Мы сейчас остановимся лишь на некоторых из них.

4. О нормирующих и центрирующих постоянных. Мы остановимся сейчас на случае последовательности одинаково распределенных независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ с распределением вероятностей $F(x)$. Постоянные a_n и B_n выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие A) теоремы переноса, когда в качестве ξ_{nk} берутся величины $(\xi_k - a_n)/B_n$.

Теорема переноса утверждает, что в случае выполнения условий A) и B) при одном и том же выборе a_n и B_n распределения нормированных сумм

$$S_n = [\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{k_n} - k_n a_n]/B_n \quad \text{и} \quad \zeta_n = [\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_n} - \nu_n a_n]/B_n$$

сходится к предельным распределениям $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ соответственно. Нормирующие множители B_n во второй сумме неслучайны, а центрирующие величины $A_n = \nu_n a_n$ случайны, но тесно связаны с таковыми для сумм неслучайного числа слагаемых.

Обратим внимание на то, что если одновременно рассматриваются для той же последовательности случайных величин $\{\xi_k\}$ две последовательности $\{\nu_n^{(1)}\}$ и $\{\nu_n^{(2)}\}$, приводящие для тех же k_n к разным предельным распределениям $A_1(x)$ и $A_2(x)$, нормирующие коэффициенты B_n остаются неизменными, также как и величины a_n.

Известно, что при надлежащем выборе $F(x)$ и $\{k_n\}$ предельное распределение $\Phi(x)$ может быть любым безгранично делимым.

Так как среди предельных функций $A(x)$ содержатся и функции с единственной точкой роста: $A(x)=0$ при $x \leqq 1$ и $A(x)=1$ при $x>1$, то класс предельных распределений $\Psi(x)$ содержит все безгранично-делимые распределения. Если же $A(x)=1-e^{-x}$, то предельные характеристические функции $\psi(t)$ имеют вид $\psi(t)=1/[1-\ln\varphi(t)]$, где $\varphi(t)$ – любая безгранично-делимая характеристическая функция. Поскольку распределение $1-e^{-x}$ безгранично делимо, все только что выписанные распределения $\Psi(x)$ безгранично делимы.

5. Особая роль распределения Лапласа. Специальный интерес представляет случай $k_n = n$. Класс предельных распределений $\Phi(x)$ при этом совпадает с устойчивыми по Хинчину распределениями [3]. Если вдобавок ν_n распределены по геометрическому закону с параметром $a_n = 1/n$, то предельное распределение для ν_n/n оказывается равным $1-e^{-x}$. Таким образом класс предельных распределений для сумм $\zeta_n = [\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_n} - \nu_n a_n]/B_n$ в рассматриваемом нами случае ограничивается распределениями с характеристическими функциями

$$\psi(t) = \frac{1}{1-\ln\varphi(t)}, \tag{3}$$

где

$$-\ln\varphi(t) = \begin{cases} i\gamma t + c\,|t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta\frac{t}{|t|}\operatorname{tang}\frac{\pi\alpha}{2}\right\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ i\gamma t + c\,|t|\left\{1 + i\beta\frac{t}{|t|}\cdot\frac{2}{\pi}\ln|t|\right\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Постоянные α, β, c и γ удовлетворяют следующим условиям: $0<\alpha\leq 2$, $-1\leq\beta\leq 1$, $c>0$, $-\infty<\gamma<\infty$.

Доказательство того факта, что все функции $\psi(t)=1/(1+|t|^\alpha)$ при $0<\alpha\leq 2$ являются характеристическими, потребовало от Е. Лукача, Лаха и Ю. В. Линника определенных усилий. Мы же можем утверждать большее, что все функции (3) являются безгранично делимыми характеристическими функциями.

Обратим внимание на то, что среди предельных в указанном смысле распределений нет нормального. Его роль выполняет распределение Лапласа, характеристическая функция которого определяется формулой

$$\psi(t)=1/(1+ct^2) \quad (c>0). \tag{4}$$

Согласно теореме переноса, если функция $F(x)$ принадлежит области притяжения нормального закона, то функции распределения сумм

$$\zeta_n=[\xi_1+\cdots+\xi_{\nu_n}-\nu_n a]/B_n, \tag{5}$$

где ν_n распределены геометрически с $a_n=1/n$ сходятся при $n\to\infty$ к распределению Лапласа.

Иными словами, при выполнении условия: при $x\to\infty$

$$x^2[1-F(x)+F(-x)]/\int_0^x x^2dF(x)\to 0$$

функции распределения сумм (5) сходятся к распределению Лапласа.

Если выполнены условия притяжения $F(x)$ к устойчивому распределению с параметрами $0<\alpha<2$, c и β, то обеспечена сходимость распределений сумм (5) к распределению $\Psi(x)$ с характеристической функцией (3).

Несколько более узкий класс предельных распределений был изучен Б. Фрайером [5] — он рассматривал только нормированные суммы (5) и полагал величины a_n равными 0.

Заметим, что при изучении сходимости распределений сумм (4) к распределению Лапласа можно выбирать $a_n=\int_0^\infty xdF(x)$.

6. Вторая теорема переноса. Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда были предметом многочисленных исследований. Полезный обзор основных работ в этом направлении был осуществлен Э. Гумбелем в монографии [6]. С тех пор статистике крайних значений были посвящены многие статьи, так что этот обзор нуждается в пополнении. В частности необходимо подвести итог рассмотрению максимального члена из последовательности одинаково распределенных случайных величин в в случайном числе. С такого рода ситуацией приходится постоянно сталкиваться при проведении испытаний. Представляет также интерес выявление роли максимального слагаемого в суммах случайного числа случайных слагаемых.

Основой всего дальнейшего служит следующее предложение.

Вторая теорема переноса. *Если при* $n\to\infty$

A) $$\mathsf{P}\{\max(\xi_{n1},\xi_{n2},\ldots,\xi_{nk_n})<x\}\to\Phi(x)$$

и

B) $$\mathsf{P}\{\nu_n/k_n<x\}\to A(x),$$

то

C) $$\mathsf{P}\{\max(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{n\nu_n}) < x\} \to \Psi(x),$$

где предельное распределение определяется формулой

(6) $$\Psi(x) = \int_0^\infty [\Phi(x)]^z dA(z).$$

Доказательство. Пусть $p_{nk} = \mathsf{P}\{\nu_n = k\}$, тогда

$$\Psi_n(x) = \mathsf{P}\{\max(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{n\nu_n}) < x\} = \sum_{k=1}^\infty p_{nk}\mathsf{P}\{\max(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk}) < x\}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty p_{nk} F^k(x).$$

Пусть $A_n(x) = \mathsf{P}\{\nu_n < x\} = \Sigma_{k<x} p_{nk}$, тогда

$$\Psi_n(x) = \mathsf{P}\{\max(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{n\nu_n}) < x\} = \int_0^\infty F_n^z(x) dA_n(z)$$

$$= \int_0^\infty [F_n^{k_n}(x)]^{z/k_n} dA_n(z) = \int_0^\infty [F_n^{k_n}(x)]^x dA_n(k_n x) = \int_0^\infty [F_n^{k_n}(x)]^x d\mathsf{P}\{\nu_n/k_n < x\}.$$

В силу условий A) и B) отсюда получаем, что при $n \to \infty$

$$\Psi_n(x) \to \Psi(x) = \int_0^\infty [\Phi(x)]^z dA(z),$$

ч. т. д.

Этот результат настолько прост и естествен, особенно после работы [1], что невольно возникает мысль о том, что он уже известен. Однако нам не удалось найти в литературе указаний относительно того, что он уже был кем-нибудь получен. Сейчас же нас интересует не только эта теорема, но и некоторые следствия из нее.

7. О логистическом распределении, как предельном законе. Предположим теперь, что $k_n = n$ и ν_n имеет геометрическое распределение с $a_n = 1/n$. Предположим далее, что $\xi_{nk} = (\xi_k - A_n)/B_n$, где ξ_k — взаимно независимые случайные величины с одним и тем же распределением $F(x)$; A_n и B_n соответствующим образом выбранные постоянные (зависящие только от $F(x)$ и n). Класс возможных предельных распределений для $\max(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn})$ при соответствующем подборе постоянных A_n и B_n известен, см., например, [6]. Этот класс исчерпывается распределениями трех следующих типов:

1. $\Phi(x) = e^{-e^{-x}}$, $-\infty < x < \infty$;
2. $\Phi(x) = e^{-x^{-\alpha}}$, $\alpha > 0$, $0 \leq x < \infty$;
3. $\Phi(x) = e^{-(-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, $-\infty < x \leq 0$.

В силу второй теоремы переноса возможные предельные распределения для $\max\{(\xi_k - A_n) : 1 \leq k \leq \nu_n\}/B_n$ с таким же выбором нормирующих и центрирующих коэффициентов A_n и B_n, как и в классическом случае и при указанном распределении ν_n, исчерпываются следующими типами:

1. $\Psi(x) = 1/(1 + e^{-x})$, $-\infty < x < \infty$;
2. $\Psi(x) = 1/(1 + x^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, $0 \leq x < \infty$;
3. $\Psi(x) = 1/(1 + (-x)^\alpha)$, $\alpha > 0$, $-\infty < x \leq 0$.

Первый из этих типов представляет собой ничто иное как логистическое распределение. Всякий раз, когда данное распределение $F(x)$ притягивается в классическом смысле к двойному показательному распределению (к $e^{-e^{-x}}$), с теми же константами A_n и B_n максимальные члены для случайного числа величин с тем же распределением $F(x)$ и с геометрическими распределением их числа будут по распределению сближаться с логистическим. Известно, что к двум другим возможным предельным распределениям сходимость будет наблюдаться только в том случае, если распределение $F(x)$ несет в себе их асимптотическое поведение. К двойному же показательному распределению сходимость будет наблюдаться при весьма широких условиях. Это обстоятельство показывает и особую роль логистического распределения.

Обратим внимание на то, что если $F(x)$ таково, что при некоторых A_n и B_n распределения $\max\{(\xi_k-A_n):1\leq k\leq\nu_n\}/B_n$ сходятся к предельному $\Phi(x)$, то при тех же A_n и B_n распределения $\max\{(\xi_k-A_n):1\leq k\leq\nu_n\}/B_n$ будут сходиться к предельному $\Psi(x)$ для всех возможных $A(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Х. Фахим. Об одной теореме переноса. *Доклады АН СССР*, **187**, 1969, 15—17.
2. B. Gnedenko. Limit theorems for sums a random number of positive independent random variables. In: *Proc. 6-th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.*, vol. 2. Berkeley, 1972, 537—549.
3. А. Я. Хинчин. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Москва—Ленинград, 1938.
4. Ю. В. Линник. Линейные формы и статистические критерии. *Укр. мат. ж.*, **5**, 1953, 247—290
5. B. Freier. Die Klasse der Grenzverteilungen von Summen gleichverteilter Zufallsgrößen mit einer zufälligen Anzahl Summanden. *Math. Nachr.* **44**, 1970, 341—350
6. E. J. Gumbel. Statistics of extremes. New York, 1958.

Московский государственный университет
113 256 Москва *СССР*

Поступила 11. I. 1982