Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРИВОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ТИПА ШУР

ЛИЛЯНА К. ДЕСИМИРОВА

В работе рассматриваются примитивные целочисленные многочлены типа (1), для которых доказаны теоремы о непроводимости над полем рациональных чисел Q. Обобщен результат Пойа (1919).

Мы рассматриваем примитивные целочисленные многочлены $f(x)$ степени n, которые для n различных целых чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ равняются по абсолютной величине одному и тому же целому числу, т. е. многочлены вида

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) + g(x); \tag{1}$$

$|g(x_i)| = c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, c — целое число, $g(x)$ — целочисленный многочлен степени $\leq n-1$.

В работе [1] Шур ввел многочлены вида (1) и поставил проблему о неприводимости этих многочленов над полем рациональных чисел Q. В некоторых частных случаях проблема решена. Здесь мы рассмотрим случай, когда $c = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, p_1 и p_2 — различные простые числа, k_1 и k_2 — естественные числа.

Теорема 1. *Если* $n \geqq 5$ *и числа* $\{x_i\}_1^n = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ *несравнимы между собой по модулю каждого* $p_1, p_2, \ldots, p_l$, *то многочлен* (1) *имеет форму*

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) + \varepsilon c, \tag{2}$$

где $c = p_1^{k_1} p_l^{k_2} \cdots p_2^{k_l}$ *и* ε *равняется* 1 *или* -1.

Дальше рассматриваем многочлены вида (2) в случае $c = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, т.е.

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) + \varepsilon p_1^{k_1} p_2^{k_2}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Многочлен* (3) *степени* $n > 10$ *неприводим над* Q, *если не имеет целочисленного множителя степени* k, *которая удовлетворяет неравенству* $[(n+2)/3] \leq k \leq n - [(n+2)/3]$.

Теорема 3. *Если* a_0 *и* $p_1 p_2$ — *нечетные числа, многочлен* (3) *степени* $n > 16$ *неприводим над* Q, *если невозможно его представление в виде произведения двух целочисленных многочленов одной и той же степени следующего вида:*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 243—249.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\varphi(x) &= b_0 \prod_{j=1}^{n/2}(x-\xi_j)+\varepsilon_1 = b_0 \prod_{k=1}^{n/2}(x-\eta_k)+\varepsilon_2 p_1^{k_1} p_2^{k_2},\\
\psi(x) &= c_0 \prod_{j=1}^{n/2}(x-\xi_j)+\varepsilon_3 p_1^{k_1} p_2^{k_2} = c_0 \prod_{k=1}^{n/2}(x-\eta_k)+\varepsilon_4
\end{aligned}
$$

или

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varphi(x) &= b_0 \prod_{j=1}^{n/2}(x-\xi_j)+\varepsilon_1 p_1^{k_1} = b_0 \prod_{k=1}^{n/2}(x-\eta_k)+\varepsilon_2 p_2^{k_2},\\
\psi(x) &= c_0 \prod_{j=1}^{n/2}(x-\xi_j)+\varepsilon_3 p_2^{k_2} = c_0 \prod (x-\eta_k)+\varepsilon_4 p_1^{k_1},
\end{aligned}
$$

где $\{x_i\}_1^n=\{\xi_j\}_1^{n/2}\cup\{\eta_k\}_1^{n/2}$, $\{\xi_j\}\cap\{\eta_k\}=\varnothing$.

Теорема 4. *Если числа* $p_1^{k_1}\pm 1$, $p_2^{k_2}\pm 1$, $p_1^{k_1}\pm p_2^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2}\pm 1$ *имеют общий целочисленный делитель* $d, d\neq 1$, $(a_0 d)=1$ *и* $n>16$, *многочлен* (3) *неприводим над* Q, *если не имеет множителей вида* (4) *или* (5).

Используем следующие известные утверждения.

Теорема А [2]. *Если сравнение* n*-той степени* $g(x)\equiv 0 \pmod p$ *имеет более чем* n *различных целых решений, все коэффициенты целочисленного многочлена* $g(x)$ *делятся на* p, *т. е.* $g(x)=pg^0(x)$.

Теорема В [3]. *Если* $g(x)$ — *целочисленный многочлен степени* $n\geq 4$, *то уравнение* $|g(x)|=1$ *имеет не более чем* n *различных целых решений. Если* $n<4$, *исключение составляют только многочлены*

$$
(6)\qquad \{F(x)\}=\{F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ F_4(x),\ F_5(x)\},
$$

где $F_1(x)=(x-x_0+2)(x-x_0-1)(x-x_0+1)+1$, $F_2(x)=(x-x_0)(x-x_0-1)-1$, $F_3(x)=2(x-x_0-1)(x-x_0+1)$, $F_4(x)=2(x-x_0)-1$, $F_5(x)=x-x_0$ *и все многочлены, которые получаются из* $\{F(x)\}$ *подстановкой* $x=-u$ (x_0 — *произвольное целое число*).

Пусть Δ_i — наименьший интервал, содержащий все целые решения уравнения $|F_i(x)|=1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$.

Непосредственно видны следующие свойства многочленов (6):

(6-а). Уравнение $|F_i(x)|=1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ удовлетворяется только для последовательных целых чисел $x_s\in\Delta_i$. Число s удовлетворяет неравенству $n+1\leq s\leq 4$.

(6-б). Существуют точно n чисел x_s, обозначим их через α_r, $r=1, 2, \cdots, n$, для которых $F_i(\alpha_r)=1$ или $F_i(\alpha_r)=-1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$.

(6-в). Все экстремумы $F_i(x)$, $i=1, 2, 3$, достигаются в точках, принадлежащих интервалу Δ_i. Это утверждение непосредственно следует из (6-б) и теоремы Роля.

(6-г). Вне интервала Δ_i многочлены $F_i(x)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ — строго монотонная функция. Это непосредственно видно из (6-в).

(6-д). Равенство $|F_i(x_1)|=|F_i(x_2)|\neq 1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$, удовлетворяется не более чем для двух различных целых чисел $X_1\neq X_2$. Утверждение непосредственно следует из (6-г).

Доказательство теоремы 1. По предположению (см. 1) $g(x)$ — целочисленный многочлен степени не больше $n-1$. Ввиду того, что целое положительное число c можно представить в виде произведения степеней простых чисел $c=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_l^{n_l}$, из равенства $|g(x_i)|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_l^{n_l}$ следуют сравнения

$$g(x_i)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_1),$$
$$g(x_i)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g(x_i)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_l).$$

Применяя теорему A, получаем $g(x)=p_1g_{11}(x)$. Из равенства $|g(x_i)|=p_1|g_{11}(x_i)|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_l^{n_l}\Rightarrow|g_{11}(x_i)|=p_1^{n_1-1}p_2^{n_2}\cdots p_l^{n_l}$. Для $g_{11}(x)$ в силе теорема A, следовательно, $g_{11}(x)=p_1g_{22}(x)$. Продолжая таким образом, получаем равенства $g(x)=p_1g_{11}(x)=p_1^2g_{12}(x)=\cdots=p_1^{n_1}g_{1n_1}(x)$. Аналогичным образом получаем и равенства

$$g_{1n_1}(x)=p_2^{n_2}g_{2n_2}(x),\quad g_{2n_2}(x)=p_3^{n_3}q_{3_3}(x),\ \ldots,\ g_{ln_{l-1}}(x)=p_l^{n_l}g_{ln_l},\ |g_{ln_l}(x)|=1.$$

Окончательно для $g(x)$ получим $g(x)=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_l^{n_l}g_{ln_l}(x)$. Из равенства $|g_{ln_l}(x_i)|=1$, $i=1, 2, \ldots, n\geqq 5$ и теоремы B получаем $|g_{ln_l}(x)|=1$ или $g(x)=\varepsilon c$. Этим теорема 1 доказана.

Приводимые над Q многочлены (3) имеют следующие свойства:

Лемма 1. *Многочлен* (3) *степени* $n>10$ *не имеет целочисленных множителей степени меньше* $[(n+2)/3]$ *или больше* $n-[(n+2)/3]$.

Многочлен (3) представим в виде

(7) $$f(x)=\varphi(x)\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целочисленные многочлены степени m и $n-m$.

Предположим, что $m\leqq n-m$, $m\neq 0$. Из равенства (3) и (7) получаем $|f(x_i)|=|\varphi(x_i)|\,|\psi(x_i)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2}$, $i=1, \ldots, n$. Следовательно, выполняются равенства

(8) $$\text{(a)}\quad |\varphi(x_i)|=p_1^{s_i}p_2^{t_i}\qquad \text{(б)}\quad |\psi(x_i)|=p_1^{k_1-s_i}p_2^{k_2-t_i}$$
$$0\leqq s_i\leqq k_1,\qquad 0\leqq t_i\leqq k_2,\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Вводим обозначения:

(9)
а) $\{\xi_j\}$ множество всех значений $x\in\{x_i\}$, для которых $|\varphi(\xi_j)|=1$;
б) $\{\eta_k\}$ множество всех значений $x\in\{x_i\}$, для которых $|\varphi(\eta_k)|=p_1^{s_k}$;
в) $\{\varsigma_l\}$ множество всех значений $x\in\{x_i\}$, для которых $|\varphi(\varsigma_l)|=p_2^{t_l}$;
г) $\{\omega_r\}$ множество всех значений $x\in\{x_i\}$, для которых $|\varphi(\omega_r)|=p_1^{s_r}p_2^{t_r}$.

Очевидны следующие связи:

д) $\{x_i\}=\{\xi_j\}\cup\{\eta_k\}\cup\{\zeta_l\}\cup\{\omega_r\}$, $\{\xi_j\}\cap\{\eta_k\}\cap\{\varsigma_l\}\cap\{\omega_r\}=\varnothing$
$i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m_1$, $k=1, 2, \ldots, m_2$, $l=1, 2, \ldots, m_3$, $r=1, 2, \ldots, m_4$;

$$\text{е)}\quad m_i\geqq 0,\quad i=1, 2, 3, 4, \sum_{i=1}^{4} m_i=n.$$

Из (8-б) и (9-а, б, в, г) следуют равенства

(10) а) $|\psi(\xi_j)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ б) $|\psi(\eta_k)|=p_1^{k_1-s_k}p_2^{k_2}$

в) $|\psi(\varsigma_l)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2-t_l}$ г) $|\psi(\omega_r)|=p_1^{k_1-s_r}p_2^{k_2-t_r}$.

Следовательно, многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде

(11) а) $$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x)\prod_{j=1}^{m_1}(x-\xi_j)+\varepsilon_1(x)\\ \varphi_2(x)\prod_{k=1}^{m_2}(x-\eta_k)+\varepsilon_2(x)\\ \varphi_3(x)\prod_{l=1}^{m_3}(x-\varsigma_l)+\varepsilon_3(x)\\ \varphi_4(x)\prod_{r=1}^{m_4}(x-\omega_r)+\varepsilon_4(x)\end{cases}$$ б) $$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1(x)\prod_{j=1}^{m_1}(x-\xi_j)+q_1(x)\\ \psi_2(x)\prod_{k=1}^{m_2}(x-\eta_k)+q_2(x)\\ \psi_3(x)\prod_{l=1}^{m_3}(x-\varsigma_l)+q_3(x)\\ \psi_4(x)\prod_{r=1}^{m_4}(x-\omega_r)+q_4(x).\end{cases}$$

Многочлены $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $\varepsilon_i(x)$ и $q_i(x)$, $i=1, 2, 3, 4$, целочисленные, $\varepsilon_i(x)$ и $q_i(x)$ имеют степень не выше m_i-1 и удовлетворяют равенства |

(12) $|\varepsilon_1(\xi_j)|=1$, $|\varepsilon_2(\eta_k)|=p_1^{s_k}$, $|\varepsilon_3(\varsigma_l)|=p_2^{t_l}$, $|\varepsilon_4(\omega_r)|=p_1^{s_r}p_2^{t_r}$,

$|q_1(\varsigma_j)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2}$, $|q_2(\eta_k)|=p_1^{k_1-s_k}p_2^{k_2}$, $|q_3(\varsigma_l)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2-t_l}$,

$|q_4(\omega_r)|=p_1^{k_1-s_r}p_2^{k_2-t_r}$.

Покажем, что числа m_i, $i=1, 2, 3, 4$, определенные согласно (9-а), удовлетворяют неравенствам

(13) а) $m_1\leq n-m$, б) $m_2\leq m$, b) $m_3\leq m$, г) $m_4\leq m$

(m — степень многочлена $\varphi(x)$).

Предположим, что нарушено некоторое из этих неравенств, например пусть $m_1>n-m$. Из теоремы А и теоремы 1 следует, что $\psi(x)=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\psi^0(x)$ Однако из $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ следует, что $f(x)=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\varphi(x)\psi^0(x)$. Мы получили противоречие с условием, что $f(x)$ примитивен. Таким образом неравенство (13-а) доказано. Аналогичным образом доказываются и неравенства (13-б), (13-в), (13-г) и еще неравенства

(14) $m_2+m_4\leq m$, $m_3+m_4\leq m$, $m_1+m_2\leq n-m$, $m_1+m_3\leq n-m$.

Предположим, например, что $m_2+m_4<m$. Из (9-е) имеем $\Sigma_{i=1}^4 m_i=m_1+m_2+m_3+m_4=n\Rightarrow m_3+m_4>n-m\geq m$ или $m_3+m_4>m$. Однако это неравенство противоречит неравенству $m_3+m_1\leq m$ из (14). Этим и доказано наше утверждение ввиду того, что в остальных случаях доказательство вполне аналогично.

Следовательно, для чисел m_i, $i=1, 2, 3, 4$, выполнены равенства

(15) $m_2+m_4=m$, $m_3+m_4=m$, $m_1+m_2=n-m$, $m_1+m_3=n-m$.

Из равенства (15) непосредственно получаем связи

$$m_2=m_3, \quad m_1=n-2m+m_4, \quad m_2=m-m_4, \tag{16}$$
$$m_1-m_4=n-2m, \quad m_3=m_2,$$
$$m_1 \geqq m_4.$$

Покажем, что числа s_k, t_l, s_r и t_r, введенные согласно (9-б), (9-в), (9-г), удовлетворяют равенства

$$s_k=s_r=k_1, \quad t_l=t_r=k_2. \tag{17}$$

Предположим, что существует число $\eta_0 \in \{\eta_k\}$, такое, что $|\varphi(\eta_0)|=p_1^{s_0}$ и $1<s_0<k_1$. Из (10-б) для $\psi(x)$ получаем $|\psi(\eta_0)|=p_1^{k_1-s_0}p_2^{k_2}$. Из (10-а) и (10-в) для $\psi(x)$ имеем $\psi(\xi_j)=p_1^{k_1-s_0}p_2^{k_2}$ и $|\psi(\zeta_l)|=p_1^{k_1}p_2^{k_2-t_l}$. Следовательно, $\psi(x)\equiv 0 \pmod{p_1}$ для $x \in \{\xi_j\}$ и $x=\eta_0$, $x \in \{\varsigma_l\}$, т. е. для m_1+m_3 различных целых чисел для целочисленного многочлена $\psi(x)$ выполняется сравнение $\psi(x)\equiv 0 \pmod{p_l}$. Многочлен $\psi(x)$ имеет степень $n-m$, а число m_1+m_3+1, согласно (15), больше $n-m$. Для $\psi(x)$ в силе теорема А. Следовательно, $\psi(x)=p_1\psi^0(x)$. По предположению $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, откуда следует, что $f(x)=p_1 f^0(x)$. Мы получили противоречие с условием, что $f(x)$ примитивен. Следовательно, $s_0=k_1$. Аналогично рассмативаются и все остальные случаи. Этим и доказаны равенства (17).

Используя (12), (17), теорему А, многочлены $\varepsilon_i(x)$ и $q_1(x)$, $i=1, 2, 3, 4$, равенствам (11-а), (11-б) можно придать следующую форму:

$$\varepsilon_i(x)=A_i\varepsilon_i^0(x), \ i=1, 2, 3, 4, \text{ где } A_1=1, \ A_2=p_1^{k_1}, \ A_3=p_2^{k_2}, \tag{18}$$
$$A_4=p_1^{k_1}p_2^{k_2}, \ |\varepsilon_1^0(\xi_j)|=|\varepsilon_2^0(\eta_k)|=|\varepsilon_3^0(\varsigma_l)|=|\varepsilon_4^0(\omega_r)|=1;$$

$$q_i(x)=B_i q_i^0(x), \quad i=1, 2, 3, 4, \quad \text{где} \quad B_1=p_1^{k_1}p_2^{k_2}, \ B_2=p_2^{k_2}, \tag{19}$$
$$B_3=p_1^{k_1}, \quad B_4=1, \quad |q_1^0(\xi_j)|=|q_2^0(\eta_k)|=|q_3^0(\varsigma_r)|=|q_4^0(\omega_r)|=1.$$

В качестве вспомогательного утверждения для доказательства леммы 1 будем использвать неравенство

$$m_i \leqq m, \quad \text{когда} \quad n>10. \tag{20}$$

Для доказательства (20), ввиду теоремы В, достаточно установить, что для $n>10$ многочлен $\varphi(x)\notin\{F(x)\}$ (см. (6)). Предположим, что $n>10$ и $\varphi(x)\in\{F(x)\}$. Из свойств $\{F(x)\}$ следуют неравенства $m_1\leqq 4$, $m_2\leqq 2$, $m_3\leqq 2$ и $m_4\leqq 2$. Из равенства $m=\Sigma_{i=1}^4 m_i$ получаем $n\leqq 10$. Мы получили противоречие, этим неравенство (20) и доказано.

Доказательство леммы 1. Предположим, что $n>10$ и $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ имеет целочисленный множитель $\varphi(x)$ степени $k<[(n+2)/3]$. Для $\varphi(x)$ выполняются связи (13), (15) и (20), согласно которым $m_j\leqq k$, $i=1, 2, 3, 4$, и $m_1+m_2=n-k$. Следовательно, $2k\geqq n-k$ или $k\geqq n/3$. Однако k — естественное число, следовательно, $k\geqq[(n+2)/3]$. Из неравенства $k\leqq n-k$ и $k\geqq[(n+2)/3]$ следует, что $k\leqq n-[(n+2)/3]$. Этим лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если предположим, что многочлен (3) степени $n>10$ имеет целочисленный множитель степени $k<[(n+2)/3]$ или степени $k>n-[(n+2)/3]$, мы получим противоречие с леммой 1.

Лемма 2. *Если $n>16$, хотя бы один из многочленов $\varepsilon_1^0(x) \notin \{F(x)\}$.*

Предположим, что $\varepsilon_i^0(x) \in \{F(x)\}$, $i=1, 2, 3, 4$. Согласно (6-а), $m_i \leqq 4$ и $\sum_{i=1}^4 m_i = n \Rightarrow n \leqq 16$. Мы получили противоречие с условием $n>16$. Этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $n>10$, то сумма любых трех чисел m_i, $i=1, 2, 3, 4$, больше или равна m. Равенство возможно только в случаях $m_2=m_3=0$ или $m_1=m_4=0$. В этих случаях $n=2m$.*

Вводим обозначения:

$$S_1 = m_1+m_2+m_3, \quad S_2 = m_1+m_2+m_4, \tag{21}$$
$$S_3 = m_2+m_3+m_4, \quad S_4 = m_1+m_3+m_4.$$

Используя (16), получаем, что $S_3 = S_4$. Из равенства (15) получаем $S_1 = n - m + m_2 = n - m_4$, $S_2 = n - m + m_4 = m + m_1$, $S_3 = m + m_2 = 2m - m_4$, так как $m_i \geqq 0$, $i=1, 2, 3, 4$ и $n \geqq 2m$. Из этих неравенств непосредственно следуют неравенства: $S_1 \leqq m$, $S_2 \leqq m$, $S_3 \leqq m$. Этим доказана первая часть леммы 3. Легко показать, что выполняются связи

$$S_1 = m_1 \Leftrightarrow m_2 = 0 = m_3 \text{ и } n = 2m;$$
$$S_2 = m \Leftrightarrow m_4 = 0 = m_1 \text{ и } n = 2m;$$
$$S_3 = m \Leftrightarrow m_2 = 0 = m_3 \text{ и } n = 2m.$$

Этим лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. *Если a_0 и p_1p_2 — нечетные числа, многочлен (3) степени $n>16$ не имеет целочисленный множитель степени $n_1<n/2$.*

Предположим, что $f(x)$ имеет целочисленный множитель степени $m<n/2$. Для $\varphi(x)$ выполняются равенства (11), (18) и леммы 2 и 3. Представим $\varphi(x)$ через те выражения из (11) и (18), в которых $\varepsilon_i^0(x) \notin \{F(x)\}$. Из леммы 2 следует, что такое представление существует. Обозначим через $\{y_s\}$ то из множеств $\{\xi_j\}$, $\{\eta_k\}$, $\{\varsigma_l\}$, $\{\omega_r\}$, для которого $\varepsilon_i^0(x) \notin \{F(x)\}$, и применим теорему 1 для многочлена $\varepsilon_i^0(x)$. Получаем $\varepsilon_i^0(x) = A_i\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Имея в виду равенства (11), (18) и $\varepsilon_i^0(x) = A_i\varepsilon$, для $\varphi(x)$ получаем представление

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \prod_{s=1}^{m_0} (x - y_s) + A_0\varepsilon. \tag{22}$$

Если t — число элементов разности $\{z_t\} = \{x_i\} \setminus \{y_s\}$, то $t = n - m_0$. Очевидно $t = S_1$ или $t = S_2$ или $t = S_3$. Из леммы 2 следует, что $t = n - m_0 > m$.

Положим $\varphi_0(x)\prod_{s=1}^{m_0}(x-y_s) = K(x)$. Из (22) получаем $K(x) = \varphi(x) - \varepsilon A_0$ $|K(z_t)| = |\varphi(z_t) - \varepsilon A_0|$, $t = 1, 2, \ldots, n - m_0 > m$. Числа $|\varphi(z_t) - \varepsilon A_0|$ очевидно четные и положительные, так как $\{\varphi(z_t)\} \in \{1, p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, p_1^{k_1}, p_2^{k_2}\}$ $A_0 \in \{1, p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, p_1^{k_1}, p_2^{k_2}\}$ и $A \cap \{\varphi(z_t)\} = \varnothing$.

Следовательно, $|\varphi(z_t) - \varepsilon A_0| = 2R_t$, $t = 1, 2, \ldots, n - m_0$. Получим, что целочисленный многочлен $\varphi(x)$ степени m для более чем m различных целых значений x — четное число. Вследствие теоремы А получаем $K(x) = 2K^0(x)$. Из (22) видно, что $\varphi(x) = K(x) + \varepsilon A_0 = 2K^0(x) + \varepsilon A_0$. По предположению $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) = (2K^0(x) + \varepsilon A_0)\psi(x) = [2b_0x^m + \cdots + b_m][c_0x^{n-m} + \cdots c_{n-m}]$. Следовательно, $a_0 = 2b_0c_0$. По условию a_0 — нечетное число. Мы получили противоречие, этим лемма 4 доказана.

Следствие. *Если a_0 и p_1p_2 — нечетные числа, то многочлен* (3) *степени* $n>16$ *может иметь только целочисленный множитель степени* $n/2$ *вида* (4) *или* (5).

Доказательство утверждения аналогично доказательству леммы 4, притом необходимо иметь в виду, что вследствие леммы 3 число $t=n-m_0$ равняется m тогда и только тогда, когда $n=2m$ и $m_2=m_3=0$, или $n=2m$ и $m_1=m_2=0$. В этих двух случаях, имея в виду (11) и (18), если положить $\{y_s\}=\{\xi_j\}$, $\{z_t\}=\{\eta_k\}$, $j=1, 2, \dots, n/2$, $k=1, 2, \dots, n/2$, мы получим равенства (4) или (5).

Лемма 5. *Если числа* $p_1^{k_1}\pm 1$, $p_2^{k_2}\pm 1$, $p_1^{k_1}\pm p_2^{k_2}$, $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\pm 1$ *имеют общий целочисленный делитель* $d\neq 1$ *и* $(a_0, d)=1$, *то многочлен* (3) *степени* $n>16$ *не имеет целочисленного множителя степени* $m<n/2$, *то он может иметь только целочисленный множитель степени* $m=n/2$ *вида* (4) *или* (5).

Доказательство леммы 5 вполне аналогично доказательствам леммы 4 и следствия. Достаточно отметить, что в этом случае

$$|K(z_t)| = |\varphi(z_t)\pm A_0| = dR_t\neq 0, \quad t=1, 2, \dots, n-m_0>m.$$

Доказательство теоремы 3 и теоремы 4. Если при условиях теоремы 3 предположим, что $f(x)$ приводим, т. е. $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, получаем для $m<n-m$ противоречие с леммой 4. Для $m=n/2$, если предположим, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют вида (4) или (5), получаем противоречие со следствием.

В [4] доказано, что многочлены вида $f(x)=a_0\Pi_{i=1}^{n\geq 16}(x-x_i)+\varepsilon p$ неприводимы над Q, если не могут быть представлены в виде произведения двух целочисленных множителей одной и той же степени. Покажем, что теорема 4 обобщает этот результат Пойа [4].

Для $n>16$, $k_1=0$, $k_2=1$ получаем многочлены из [4]. В [5] доказано, что в случае $|p|\leqq x_n-x_1$ и $n>6$ многочлены $f(x)=a_0\Pi_{i=1}^{n}(x-x_i)+\varepsilon p$ неприводимы над Q. Число $x_n-x_1\geqq 16$, следовательно, если $p>16$, то $f(x)$ неприводим над Q. Для $p=2$ утверждение очевидно.

В [5] доказано также, что если числа $\{x_i\}=\{x_1<\dots<x_n\}$ сравнимы между собою по модулю p, то многочлен $f(x)=a_0\Pi_{i=1}^{n}(x-x_i)+\varepsilon p$ неприводим над Q. Следовательно, для приводимых над Q многочленов этого типа в силе теорема 4, так как числа $p+1$ и $p-1$ для $p\neq 2$ всегда имеют общий множитель $d=2$ и числа $\{x_i\}$ несравнимы между собою по модулю p. Этим и доказано, что теорема 4 обобщает цитированный результат Пойа.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Schur. Problem 226. *Arch. Math., Phyz.*, **13**, 1908, 376.
2. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. Москва, 1949.
3. W. Brown, R, Gracm. An irreducibiliti criterium for polynomials over the integers. *Amer. Math., Monthly*, 1969, 767.
4. G. Polya. Verschiedene Bemerkungen zur Zahlenteorie. *Tahresber. Dtsch. Math. ver.*, **28**, 1919, 31—40.
5. Л. К. Десимирова. О некоторых теоремах о неприводимости целочисленных многочленов. *Сердика*, **5**, 1979, 340.

Высший химико-технологический институт, София

Поступила 17. 9. 1979;
В переработанном виде 25. 5. 1982