Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ВЕТВЯЩИЕСЯ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ С ПУАССОНОВСКИМ НАЧАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

ПЕНКА И. МАЙСТЕР

Рассматривается зависимость вероятности вырождения ветвящегося диффузионного процесса в неограниченной области от математического ожидания числа частиц и пуассоновского начального распределения.

1. Описание модели и основные обозначения. Пусть $\mathscr{X}$ — неограниченная область n-мерного эвклидового пространства, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств на $\mathscr{X}$. Обозначим через (x_t, P_x) диффузионный процесс на $\mathscr{X}$ с переходной плотностью $p(t, x, y): P_x\{x_t \in \mathscr{U}\} = \int_{\mathscr{U}} p(t, x, y)dy$, $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$.

Пусть $\partial p/\partial x = \mathscr{L}_x p(t, x, y)$ и $p(0, x, y) = \delta(x-y)$,

$$T_t f(x) = \mathsf{E} f(x_t) = \int_{\mathscr{X}} f(y)p(t, x, y)dy.$$

Рассмотрим траектории диффузионного процесса (x_t, P_x) как траектории блуждающей частицы. При этом, если в момент времени t частица находилась в точке x, то во временном интервале $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $k(x)\Delta t + o(\Delta t)$ она погибнет и превратится в некоторое случайное число частиц — $\eta_x(\mathscr{U})$, $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$.

Предполагаем, что превращение происходит мгновенно, и новорожденные частицы локализованы в той точке, где произошло деление, т. е. $\eta_x(\mathscr{U}) = \eta_x(\{x\})$, для любого $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$. Все вновь образуемые частицы начинают независимо друг от друга развиваться по описанному выше закону из той точки, в которой произошло произлошло превращение. Число частиц и их положение в области $\mathscr{X}$ в момент времени определяется целочисленной случайной мерой $\mu_{xt}(\mathscr{U})$, $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$ при условии, что в начальный момент времени была одна частица и она находилась в точке $x \in \mathscr{X}$. Обозначим через $F_t f(x)$ производящий функционал этой меры, т. е.

$$F_t f(x) = \mathsf{E} \exp \int_{\mathscr{X}} \log f(z)\mu_{xt}(dz), \text{ где } |f(x)| \leqq 1.$$

Так как случайная мера $\eta_x(\mathscr{U})$, $\mathscr{U} \in \mathscr{B}$ сосредоточена в точке x, то ее производящий функционал является оператором суперпозиции:

$$Hf(x) = \mathsf{E} \exp \int_{\mathscr{U}} \log f(z)\, \eta_x(dz) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(x)]^k \mathsf{P}\{\eta_x(\{x\}) = k\}.$$

Пусть $h(x, u) = \Sigma_{n=0}^{\infty} u^k \mathsf{P}\{\eta_x(\mathscr{X}) = k\}$, $|u| \leqq 1$. Тогда

$$Hf(x) = h(x, f(x)).$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 250—254.

Например, если $\mathsf{P}\{\eta_x(\mathscr{X})=k\}=[a(x)]^k e^{-a(x)}/k!$, то $h(x, u)=\exp\{a(x)[u-1]\}$ $Hf(x)=\exp\{a(x)[f(x)-1]\}$.

В настоящей заметке будем предполагать, что в начальный момент времени число частиц в области $\mathscr{X}$ определяется пуассоновской случайной мерой $\mu_0(\mathscr{U})$, где

$$\mathsf{P}\{\mu_0(\mathscr{U})=k\}=[\varkappa(\mathscr{U})]^k e^{-\varkappa(\mathscr{U})}/k!, \quad \text{если } \varkappa(\mathscr{U})<\infty$$
$$\mathsf{P}\{\mu_0(\mathscr{U})=\infty\}=1, \qquad\qquad \text{если } \varkappa(\mathscr{U})=\infty.$$

Мера $\varkappa(\mathscr{U})=\mathsf{E}\,\mu_0(\mathscr{U})$ называется ведущей мерой для пуассоновской случайной меры $\mu_0(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$. Напомним, что $\mu_0(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$ есть случайная мера с независимыми значениями, т. е. случайные величины $\mu_0(\mathscr{U}_1)$, $\mu_0(\mathscr{U}_2), \ldots,$ $\mu_0(\mathscr{U}_j)$ независимы в совокупности для любой системы непересекающихся интервалов $\mathscr{U}_1, \ldots \mathscr{U}_j \in \mathscr{B}$ [3]. Кроме того, пуассоновская мера μ_0 вполне (σ)-конечна тогда и только тогда, когда ее ведущая мера $\varkappa(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$, вполне ($\sigma$)-конечна. Известно, что производящий функционал $\varphi_0(t)$ пуассоновской случайной меры μ_0 явно выражается через ведущую меру $\varkappa$:

$$\varphi_0(f)=\mathsf{E}\exp\int_{\mathscr{X}}\log f(z)\,\mu_0(dz)=\exp\{\int_{\mathscr{X}}[f(z)-1]\,\varkappa(dz)\}.$$

При этом, если ведущая мера $\varkappa$ вполне конечна, то $\varphi_0(f)$ есть непрерывный функционал в замкнутой единичной сфере $|f|\leqq 1$. Если $\varkappa(\mathscr{X})=\infty$, то $\varphi_0(f)$ непрерывен только на множестве $|f|<1$, $\varphi_0(1)=\mathsf{P}\{\varkappa(\mathscr{X})<\infty\}=0$.

Обозначим через $\mu_t(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$ число частиц в момент времени t в множестве $\mathscr{U}$, если начальное состояние системы задается пуассоновской мерой μ_0. Производящий функционал меры μ_t обозначим через φ_t. Легко доказать, что

$$\varphi_t(f)=\varphi_0(F_t f). \tag{1}$$

Основная зависимость между величинами $\{x_t, k(x), \eta_x, \mu_{xt}\}$ дается следующим уравнением:

$$F_t f(x)=T_t^0 f(x)+\int_0^t T_\tau^0 kHF_{t-\tau}f(x)d\tau+1-T_t^0 1(x)-\int_0^t T_\tau^0 k(x)dx,$$

где T_t^0 есть полугруппа обрывающегося диффузионного процесса, т. е. $T_t^0 f(x)$ $=E_x f(x_t)\exp(-\int_0^t k(x_s)ds$.

Если $f(x)$ принадлежит области определения $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ инфинитезимального оператора $\mathscr{L}$ диффузионного процесса x_t, то $u(t, x)=F_t f$ есть минимальное решение параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t'=\mathscr{L}u+k[h(x, u)-u], \\ u(0, x)=f(x). \end{cases}$$

2. Математическое ожидание мер μ_{xt}, μ_t. Предположим, что ведущая мера $\varkappa$ пуассоновской случайной меры μ_0 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, и ее плотность ограничена, т. е.

$$\varkappa(\mathscr{U})=\int_{\mathscr{U}}\rho(x)dx, \quad |\rho(x)|\leqq M<\infty.$$

В силу независимости эволюции отдельных частиц

$$\mathsf{E}\mu_t(\mathscr{U})=\int_{\mathscr{X}}\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{U})\,\rho(x)\,dx. \tag{2}$$

Следовательно, асимптотические свойства меры μ_t при $t\to\infty$ зависят от асимптотических свойств меры μ_{xt} и полной или счетной аддитивности ведущей меры $\varkappa(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\in\mathscr{B}$.

Пусть $\mathsf{E}\,\eta_x(\mathscr{X})=a(x)$, т. е. $\partial h(x,\;u)/\partial u\,|_{u=1}=a(x)$.

Рассмотрим линейные операторы: $A\,f(x)=a(x)f(x)$ и $M_tf(x)=\int_{\mathscr{X}}f(z)\mathsf{E}\mu_{xt}(dz)$.

Так как $M_tf(x)=\delta F_t[1\,;\,f](x)$, то из уравнения (1) следует, что

$$M_tf(x)=T_t^0\,f(x)+\int_0^t T_\tau^0(ka\,M_{t-\tau}f\,)(x)d\tau.$$

Семейство операторов $\{M_t,\;t>0\}$ образует полугруппу линейных ограниченных операторов в пространстве $L_2(\mathscr{X})$ с инфинитезимальным производящим оператором $\mathscr{M}=\mathscr{L}+k(a-1)I$.

Если $\mathscr{M}$ является спектральным оператором скалярного типа, то

$$M_t=e^{\mathscr{M}t}=\int_{\sigma(\mathscr{M})}e^{\lambda t}E(d\lambda), \tag{3}$$

еде $\sigma(\mathscr{M})$ есть спектр оператора $\mathscr{M}$, $E(\lambda)$ — соответствующее разложение единицы, [2]. Заметим, что в общем случае [2] операторное исчисление для $(\mathscr{M})$ приводит к:

$$f(\mathscr{M})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\,(\mathscr{M}-\sum_{\lambda\in\sigma(\mathscr{M})}\lambda E(\lambda))^n\int_{\sigma(\mathscr{M})}f^{(n)}(\lambda)E(d\lambda).$$

Кроме того, существуют примеры, когда [1, гл. 16]: $\sigma(M_t)\neq\{e^{\lambda t},\;\lambda\in\sigma(\mathscr{M})\}$.

Будем предполагать, что имеет место (3).

Определение 1. *Если в множестве $\sigma(\mathscr{M})$ существует (не существует) простое изолированное собственное значение λ_0, которое больше по модулю всех остальных элементов множества $\sigma(\mathscr{M})$, то ветвящийся диффузионный процесс называется процессом точного (неточного) типа.*

До сих пор преимущественно рассматривались ветвящиеся диффузионные процесы точного типа. Для них

$$M_tf(x)=e^{\lambda_0 t}\,\omega_0(x)\,\omega_0^*(f)+o(e^{\lambda t}),\quad \lambda<\lambda_0, \tag{4}$$

где $\omega_0(x)$ есть положительное решение уравнения

$$\mathscr{M}u-\lambda_0u=0,\;\|\,\omega_0\|_{L_2(\mathscr{X})}=1,\quad \omega_0^*(f)=\int_{\mathscr{X}}f(x)\omega_0(x)dx.$$

В работе [4] показано, что асимптотическое поведение (4) имеет место, если при $|\,x\,|\to\infty$ средняя плотность числа частиц-потомков стабилизируется и существует подобласть $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}$, в которой в среднем рождаются больше частиц, чем на бесконечности. При этом коэффициенты диффузии и сноса выбраны так, что частицы не успевают очень быстро уходить на бесконечность.

Пример 1 (ветвящегося диффузионного процесса неточного типа). Пусть $\mathscr{X}=R$, $\eta_x\equiv\eta$, $k(x)\equiv k$, x_t — винеровский процесс. Тогда $u(t, x)=F_t f(x)$ удовлетворяет уравнению $u'_t=\frac{1}{2}u''_{xx}+k[h(u)-u]$, $u(0, x)=f(x)$.

Математическое ожидание числа частиц в области $\mathscr{U}$ равно

$$\mathsf{E}\mu_{xt}(\mathscr{U})=e^{k(a-1)t}\int_{\mathscr{U}}[e^{-(x-y)^2/2t}/\sqrt{2\pi t}\,dy,\quad \mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{X})=e^{k(a-1)t}.$$

Очевидно, если $a=1$, то $\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{X})=1$, но для любого компакта $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}:\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\,\mu_{xt}(\mathscr{U})=0$. Аналогичный эффект не имеет место для ветвящихся диффузионных процессов точного типа, т. к. ω_0^* есть равномерно положительный функционал.

Лемма 1. *Для ветвящихся диффузионных процессов точного типа с пуассоновским начальным распределением*

$$\mathsf{E}\int_{\mathscr{X}}f(z)\,\mu_t(dz)=e^{\lambda_0 t}\omega_0^*(f)\,\omega_0^*(\rho)+o(e^{\lambda t}),\quad \lambda<\lambda_0.$$

Доказательство следует непосредственно из (2), (4) и ограниченности $\rho(x)$.

Замечание 1. Если $\lambda_0=0$, $\varkappa(\mathscr{X})=\infty$ (например, $\rho(x)\equiv\rho$ и область $\mathscr{X}$ неограничена), то $\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\,\mu_t(\mathscr{X})=\omega_0^*(1)\,\omega_0^*(\rho)<\infty$, тогда как $\mathsf{E}\mu_0(\mathscr{X})=\varkappa(\mathscr{X})=\infty$,

Замечание 2. В примере 1, если $\varkappa(\mathscr{X})<\infty$, то $\mathsf{E}\mu_t(\mathscr{X})=e^{k(a-1)t}\varkappa(\mathscr{X})$. Если $\varkappa(\mathscr{X})=\infty$, то для исследований асимптотики μ_t нужна более детальная асимптотика μ_{xt}.

3. Вероятность вырождения. Пусть $q(x)=\mathsf{P}\{\mu_{xt}(\mathscr{X})=0$ для некоторого $t\}$, $\tilde{q}=\mathsf{P}\{\mu_t(\mathscr{X})=0$ для некоторого $t\}$.

Теорема 1. *Ветвящийся диффузионный процесс точного типа с пуассоновским начальным распределением вырождается (т. е. $\tilde{q}=1$) тогда и только тогда, когда $\lambda_0\leq 0$, даже если $\varkappa(\mathscr{X})=\infty$.*

Доказательство. Известно, что $q(x)=\lim_{t\to\infty}F_tO(x)$ для любого фиксированного $x\in\mathscr{X}$, где $O(x)\equiv 0$.

Следовательно, $\tilde{q}=\lim_{t\to\infty}\exp\{\int_{\mathscr{X}}[F_tO(x)-1]\,\rho(x)dx\}$.

В работе [4] доказано, что для ветвящихся диффузионных процессов точного типа имеет место следующая асимптотика:

$$1-F_tO(x)=\begin{cases} e^{\lambda_0 t}\omega_0(x)\psi^*(0)\,[1+o(1)], & \text{если } \lambda_0<0,\\ \dfrac{\omega_0(x)\,(1+o(1))}{1+\,t\omega_0^*[\,kb\,\omega_0^2]/2}, & \text{если } \lambda_0=0,\end{cases}\tag{5}$$

где $b(x)=\partial^2 h(x, u)/\partial u^2|_{u=1}$, $\psi^*(0)\geq 0$. Кроме того, $\lim_{t\to\infty}F_tO(x)=q(x)>0$, если $\lambda_0>0$. При этом $1-q(x)\geq\text{const}\,\omega_0(x)$. Очевидно, что из асимптотического поведения (5) и ограниченности $|\rho(x)|\leq M$ следует

$$\tilde{q}=\exp\{\int_{\mathscr{X}}\lim_{t\to\infty}[F_tO(x)-1]\,\rho(x)dx\}=e^0=1,\quad \text{если } \lambda_0\leq 0,$$

$$\tilde{q}<\exp\{-\text{const}\,\omega_0^*(\rho)\}<1,\qquad\qquad \text{если } \lambda_0>0.$$

Замечание 3. В примере 1 $F_tO(x)=q_t$, где q_t есть решение уравнения $\partial u/\partial t=k[h(u)-u]$, $u(0)=0$.

Следовательно, $\tilde{q}= \exp\{\varkappa(\mathscr{X})\lim_{t\to\infty}(q_t-1)\}$.

Таким образом видно, что если мера $\varkappa(\mathscr{U})$ вполне конечна, ветвяшийся диффузионный процесс будет вырождаться тогда и только тогда, когда $a\leq 1$, т. е. когда $\lim_{t\to 1} q_t=1$ есть минимальный корень уравнения $h(u)=u$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Хилле, Р. Филипс. Функциональный анализ и полугруппы. Москва, 1962.
2. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы (спектральные операторы). Москва, 1974.
3. Р. Л. Добрушин. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. *Укр. мат. ж.*, **8**, 1956, № 2, 127—134.
4. П. И. Майстер. Ветвящиеся диффузионные процессы в неограниченной области. *Мат. сб.* **114**, 1981, 406—425.
5. П. И. Майстер. Несколько примеров ветвящихся диффузионных процессов. *Сердика*, **8**, 1982.

Институт иностранных студентов, 1000 София

Поступила 10. 4. 1980