Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О РЕГУЛЯРНЫХ РАСШИРЕНИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ГЕОРГИ Д. ДИМОВ, ДОЙЧИН Б. ДОЙЧИНОВ

На основе введенного для этой цели понятия T_3-системы дается описание семейства всех регулярных расширений данного регулярного топологического пространства X. В связи с этим освещается роль известного расширения П. С. Александрова αX в классе регулярных расширений.

В [4] Д. Дойчинов указал способ построения всех регулярных расширений данного регулярного топологического пространства. Здесь этот способ излагается подробно вместе с доказательствами, а также делаются некоторые приложения, связанные, главным образом, с расширением П. С. Александрова αX регулярного пространства X (см. [1]). А именно, характеризованы внутренним образом все регулярные расширения пространства X, которые являются непрерывными образами пространства αX при неподвижных точках X (они названы α-расширениями), и показано, что: а) все они регулярно замкнуты (будем писать: „R-замкнуты") (отметим, что, как показал П. С. Александров в [1], если пространство αX регулярно, то оно R-замкнуто, а тогда (см. напр. [7]) и все его непрерывные образы должны быть R-замкнутыми; однако существуют регулярные пространства X, для которых αX не является регулярным пространством (Херрлих [9] построил регулярное пространство X, у которого не имеются R-замкнутые расширения; оно и является искомым примером — это следует из цитированного выше замечания П. С. Александрова)); б) если αX регулярно, то оно является наибольшим α-расширением пространства X (и таким образом выполнено пожелание П. С. Александрова (из [1]) о дескриптивном описании пространства αX, в случае когда оно регулярно); в) существуют пространства X, у которых имеются R-замкнутые расширения, не являющиеся α-расширениями, и для которых пространство αX регулярно (т. е. в случае, когда пространство αX R-замкнуто, оно не всегда является максимальным среди всех R-замкнутых расширений пространства X); г) если пространство X вполне регулярно, то согласно одной теоремы П. С. Александрова из [1], каждое бикомпактное расширение пространства X является непрерывным образом пространства αX при неподвижных точках X, т. е. оно является α-расширением (здесь дано новое доказательство этой теоремы), однако существуют пространства X, у которых имеются небикомпактные α-расширения.

В [1] П. С. Александров поставил вопрос о том, всегда ли пространство αX H-замкнуто. Здесь мы доказываем (см. Теорему 2.9), что регулярное пространство X R-замкнуто тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно пространству αX. Тем самым, любой пример R-замкнутого не

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 280—295.

бикомпактного пространства X отвечает отрицательно (так как пространства X и αX гомеоморфны) на вопрос П. С. Александрова (напр., известный пример А. Н. Тихонова [6]). Наконец, мы отмечаем, что существует вполне регулярное не нормальное пространство X, для которого αX совпадает с βX. Этот пример также дает отрицательный ответ на вопрос П. С. Александрова из [1] о том, верно ли, что только для нормальных пространств X пространства αX и βX совпадают.

В дальнейшем, если для рассматриваемого пространства не сказано какую аксиому отделимости оно удовлетворяет, то мы будем подразумевать, за исключением пространства αX, что оно регулярно (у нас регулярность всегда включает в себя аксиому отделимости T_1). Замыкание подмножества A пространства X в пространстве X будем обозначать через $\mathrm{cl}_X A$ или $\bar{A}$.

1. Предварительные сведения и определения. Фильтр Φ в пространстве X называется открытым фильтром, если все его элементы суть открытые множества. Семейство Φ открытых подмножеств пространства X называется *регулярным семейством,* если любой элемент семейства Φ содержит замыкание некоторого элемента семейства Φ. *Регулярным фильтром* называется открытый фильтр, который является регулярным семейством множеств.

Семейство Σ открытых фильтров называется *T_2-системой*, если для любых двух различных элементов $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ семейства Σ существуют $V_1 \in \mathscr{V}_1$ и $V_2 \in \mathscr{V}_2$, такие, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. T_2-система Σ называется *максимальной* в пространстве X, если из того, что Σ_1 — T_2-система в X и $\Sigma \subset \Sigma_1$, следует что $\Sigma = \Sigma_1$.

Пусть $x \in X$. Открытый фильтр, составленный из всех открытых окрестностей точки x в пространстве X, будем обозначать через $\mathscr{V}_x^X$, или просто $\mathscr{V}_x$ если нет двусмыслия. Далее, если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — семейства подмножеств пространства X, Σ_1 — семейство открытых фильтров в X, $X_1 \subset X$, $f\colon X \to Y$ и $\mathscr{U}$ — семейство подмножеств в Y, а Σ_2 — семейство открытых фильтров в Y, то мы будем писать:

$$\mathrm{cl}_X\mathscr{V} = \{\mathrm{cl}_X V\colon V \in \mathscr{V}\},\ \cap\mathscr{V} = \cap\{V\colon V \in \mathscr{V}\},\ \mathscr{V} \cap X_1 = \{V \cap X_1\colon V \in \mathscr{V}\},$$
$$f(\mathscr{V}) = \{f(V)\colon V \in \mathscr{V}\},\ f^{-1}(\mathscr{U}) = \{f^{-1}(U)\colon U \in \mathscr{U}\},\ f(\Sigma_1) = \{f(\Phi)\colon \Phi \in \Sigma_1\},$$
$$f^{-1}(\Sigma_2) = f^{-1}(\Phi)\colon \Phi \in \Sigma_2\}.$$

Регулярное пространство X называется R-замкнутым, если из того, что оно вложено в другом регулярном пространстве, следует, что оно замкнуто в нем.

Пусть X — топологическое пространство. Пара (cX, c) называется хаусдорфовым (соотв. регулярным, бикомпактным) расширением пространства X, если cX — хаусдорфово (соотв. регулярное, бикомпактное) пространство, а отображение $c\colon X \to cX$ является вложением и $\mathrm{cl}_{cX} c(X) = cX$. Если $(c_i X, c_i)$, $i = 1, 2$ — хаусдорфовые расширения пространства X, то будем писать $c_1 X \geq_0 c_2 X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_1 X \to c_2 X$ такое, что $f \circ c_1 = c_2$, а расширения $(c_1 X, c_1)$ и $(c_2 X, c_2)$ будем называть эквивалентными, если $c_1 X \geq_0 c_2 X$ и $c_2 X \geq_0 c_1 X$. Очевидно, что это действительно является отношением эквивалентности и что соответствующее факторотношение отношения $\geq_0$ является отношением частичного порядка между классами эквивалентности. Если в определении отношения $\geq_0$ мы потребуем, чтобы $f(c_1X)=c_2X$, то мы получим определение некоторого нового отношения $\geq$, которое снова порождает отношение частичного порядка между классами эквивалентности (здесь подразумевается, что классы определены новым отношением эквивалентности, полученных из старых заменой отшения $\geq_0$ на отношение $\geq$). Отношение $\geq_0$ ($\geq$) будем называть *слабым* (соответственно, *сильным*) *порядком*. Рассматривая новое (соответствующее отношению $\geq$) отношение эквивалентности между хаусдорфовыми расширениями пространства X, мы видим, что оно совпадает с уже определенным при помощи $\geq_0$. Отметим также, что расширения (c_1X, c_1) и (c_2X, c_2) эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм f: $c_1X \xrightarrow{\text{на}} c_2X$ такой, что $f\circ c_1=c_2$.

Пусть теперь $X\subset Y$ и $\mathrm{cl}_Y X=Y$. Семейство $\Sigma_{Y,X}=\{\mathscr{V}_y^Y\cap X\colon y\in Y\}$ будем называть *следом пространства Y в пространстве X.* Более обще, если (cX, c)— расширение пространства X, то *следом расширения* (cX, c) *в* X будем называть семейство $\Sigma_{cX}=c^{-1}(\Sigma_{cX,\,c(X)}$.

Пусть $\Sigma=\{\mathscr{V}_\alpha\colon \alpha\in A\}$ — семейство открытых фильтров в пространстве X. Всегда через $\mathscr{B}_\Sigma$ будем обозначать следующее семейство: $\mathscr{B}_\Sigma=\{\mathscr{Q}_U=\{\mathscr{V}\in\Sigma\colon U\in\mathscr{V}\}\colon U$ открыто в $X\}$. Оно является базой некоторой топологии в множестве Σ (так как для любых открытых U_1, U_2 в X, $\mathscr{Q}_{U_1}\cap\mathscr{Q}_{U_2}=\mathscr{Q}_{U_1\cap U_2}$) [1]; эту топологию будем называть слабой топологией в множестве Σ [5].

Наконец, регулярным концом пространства X([1]) называется центрированное регулярное семейство подмножеств пространства X, являющееся максимальным относительно этих двух свойств в пространстве X, т. е. оно не является подсемейством никакого отличного от него центрированного регулярного семейства множеств в пространстве X. Через Σ_α будем обозначать множество всех регулярных концов регулярного пространства X.

1.2. Нам будут нужны следующие результаты из работы [1] П. С. Александрова:

а. Если $\mathscr{V}$ — регулярный конец пространства X, то $\mathscr{V}$ является регулярным фильтром; в силу этого можно говорить о слабой топологии в Σ_α и, наделяя Σ_α этой топологией, получить расширение П. С. Александрова αX ([1]).

б. Если $\mathscr{V}$ — регулярный фильтр в пространстве X, то он содержится по крайней мере в одном регулярном конце пространства X.

в. Если $x\in X$, то открытый фильтр $\mathscr{V}_x$ является регулярным концом в регулярном пространстве X и отображение $\varphi_\alpha\colon X\longrightarrow\alpha X$, где $\varphi_\alpha(x)=\mathscr{V}_x$, пространство X является вложением(и Σ_α является T_2-системой).

г. Если пространство X нормально, то αX эквивалентно Стоун — Чеховскому расширению βX пространства X.

д. Если пространство X вполне регулярно, то пространство αX можно непрерывно отобразить на всякое бикомпактное расширение пространства X, и притом так, что при этом отображении все точки пространства X остаются неподвижными.

1.3. Мы будем пользоватся также следующим результатом из работы [5] Проданова:

Если X — хаусдорфово пространство, а Y — его хаусдорфово расширение, то пространство Y является H-замкнутым тогда и только тогда, когда его след Σ_Y в пространстве X является максимальной T_2-системой.

1.4. Нам понадобится также следующий результат Банашевского из [7]: *Регулярное пространство X является R-замкнутым тогда и только тогда, когда любой регулярный фильтр $\mathscr{V}$ в X имеет точку прикосновения (т. е. $\bigcap \mathrm{cl}_X \mathscr{V} \neq \varnothing$).*

1.5. Основное определение. *Семейство Σ открытых фильтров в регулярном пространстве X будем называть T_3-системой, если*

а) *$\mathscr{V}_x \in \Sigma$ для любого $x \in X$;*

б) *для любого $\mathscr{V} \in \Sigma$ и для любого $U \in \mathscr{V}$ существует $V \in \mathscr{V}$, такое, что если $\mathscr{W} \in \Sigma$ и $W \cap V \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}$, то $U \in \mathscr{W}$.*

1.6. Лемма. *Пусть Σ — T_3-система в пространстве X. Тогда:*

а) *если $\mathscr{V}, \mathscr{W} \in \Sigma$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$, то $\mathscr{V} \equiv \mathscr{W}$;*

б) *Σ является T_2-системой;*

в) *если $\mathscr{V} \in \Sigma$, то $\mathscr{V}$ является регулярным фильтром в X.*

Доказательство: а) Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W} \in \Sigma$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$. Пусть $U \in \mathscr{W}$. Тогда существует $W \in \mathscr{W}$, такое, что если $\mathbf{\Phi} \in \Sigma$ и $\Phi \cap W \neq \varnothing$ для любого $\Phi \in \mathbf{\Phi}$, то $U \in \mathbf{\Phi}$. Но $\mathscr{W} > \mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ является открытым фильтром. Следовательно, для любого $V \in \mathscr{V}$ имеем $V \cap W \neq \varnothing$, и мы получаем, что $U \in \mathscr{V}$. Итак, $\mathscr{V} \equiv \mathscr{W}$.

б) Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W} \in \Sigma$ и $\mathscr{V} \neq \mathscr{W}$. Тогда (см. а)) существует $V_0 \in \mathscr{V}$ такое, что $V_0 \notin \mathscr{W}$. Так как Σ является T_3-системой, то существует $V_1 \in \mathscr{V}$, такое, что если $\mathbf{\Phi} \in \Sigma$ и $\Phi \cap V_1 \neq \varnothing$ для любого $\Phi \in \mathbf{\Phi}$, то $V_0 \in \mathbf{\Phi}$. Допустим теперь, что любые два элемента $U \in \mathscr{V}$ и $V \in \mathscr{W}$ пересекаются. Тогда, в частности, $W \cap V_1 \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}$ и, следовательно, $V_0 \in \mathscr{W}$. Полученное противоречие показывает, что существует элемент $W_1 \in \mathscr{W}$ такой, что $V_1 \cap W_1 = \varnothing$, т. е. Σ является T_2-системой.

в) Пусть $U \in \mathscr{V}$. Тогда существует $V \in \mathscr{V}$, такое, что если $\mathscr{W} \in \Sigma$ и $W \cap V \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}$, то $U \in \mathscr{W}$. Покажем, что $\mathrm{cl}_X V \subset U$. Действительно, пусть $x \in \mathrm{cl}_X V$. Тогда $W \cap V \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}_X$. Следовательно $U \in \mathscr{V}_X$, т. е. $x \in U$ и все доказано.

1.7. Обозначения

Множество всех T_2-систем (T_3-систем) хаусдорфова (регулярного) пространства X будем обозначать через $\mathscr{T}_2$ ($\mathscr{T}_3$).

1.8. Определения

Пусть Σ_1, $\Sigma_2 \in \mathscr{T}_2$. Положим $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$, если любой элемент системы Σ_1 содержит некоторый элемент системы Σ_2. Если $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$ и, кроме того, любой элемент системы Σ_2 содержится в некотором элементе системы Σ_1, то мы будем писать $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$.

Очевидно, что отношения $\geq$ и $\geq_0$ рефлексивны и транзитивны. Покажем, что они антисимметричны в множестве $\mathscr{T}_3$ (припомним, что $\mathscr{T}_3 \subset \mathscr{T}_2$ согласно 1.6 б). Пусть Σ_1, $\Sigma_2 \in \mathscr{T}_3$. Предположим, что $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$ и $\Sigma_2 \geq_0 \Sigma_1$, и докажем, что $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Пусть $\mathscr{V} \in \Sigma_2$. Так как $\Sigma_2 \geq_0 \Sigma_1$, то существует $\mathscr{W} \in \Sigma_1$, такое, что $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$. Так как $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$, то существует $\mathscr{V}_1 \in \Sigma_2$, такое, что $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{W}$. Итак, $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$. Но $\Sigma_2 \in \mathscr{T}_3$. Тогда из 1.6 а следует, что $\mathscr{V}_1 \equiv \mathscr{V}$, и, значит, $\mathscr{V} \equiv \mathscr{W}$. Следовательно, $\mathscr{V} \in \Sigma_1$. Итак, $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$. Аналогично получаем, что $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Следовательно, если $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$ и $\Sigma_2 \geq_0 \Sigma_1$, то $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Так как из $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ следует, что $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$, то тем самым доказано, что в множестве $\mathscr{T}_3$ отношения $\leq$ и $\leq_0$ являются отношениями частичного порядка, которые мы будем называть съответственно *сильным и слабым порядком на множестве $\mathscr{T}_3$.*

1.9. Обозначение. Если Σ — семейство открытых фильтров в пространстве X и $\Sigma \supset \{\mathscr{V}_X : x \in X\}$, то через φ_Σ будем обозначать отображение $\varphi_\Sigma : X \to \Sigma$, определенное формулой $\varphi_\Sigma(x) = \mathscr{V}_x$ для любого $x \in X$.

1.10. Замечание. Если X—T_0-пространство, а Σ и φ_Σ — такие, как в 1.9, то, наделяя Σ слабой топологией, мы легко получим, что пара (Σ, φ_Σ) является расширением пространства X. Отметим также, что имеют место следующие формулы: для любого открытого множества U в пространстве X $\varphi_\Sigma^{-1}(\mathcal{Q}_U \cap \varphi_\Sigma(X)) = U = \varphi_\Sigma^{-1}(\mathcal{Q}_U)$ и $\varphi_\Sigma(U) = \mathcal{Q}_U \cap \varphi_\Sigma(X)$. Кроме того, если X хаусдорфово, а Σ—T_2-система в X, то мы получим (как показано в [5]), что пара (Σ, φ_Σ) является хаусдорфовым расширением пространства X.

2. Теоремы.

2.1. Предложение. *Пусть X — регулярное пространство. Если (rX, r) — его регулярное расширение, то след Σ_{rX} расширения (rX, r) в X является T_3-системой.*

Доказательство. Пусть (rX, r) — регулярное расширение пространства X. Так как $\Sigma_{rX} = r^{-1}(\Sigma_{rX, r(X)})$, то, очевидно, нам достаточно показать, что след $\Sigma_{rX, r(X)}$ является T_3-системой в пространстве $r(X)$. Поэтому мы можем предполагать, что $X \subset rX$, т. е. что $r = i_X$ и $\Sigma_{rX} = \Sigma_{rX, r(X)}$. Итак, пусть $x \in X$. Тогда, очевидно, $\mathscr{V}_x^{rX} \cap X = \mathscr{V}_x^X$. Следовательно, $\Sigma_{rX} \supset \{\mathscr{V}_x^X : x \in X\}$. Пусть $\mathscr{V} \in \Sigma_{rX}$ и $U \in \mathscr{V}$. Существует точка $y \in rX$, такая, что $\mathscr{V} = \mathscr{V}_y^{rX} \cap X$. Следовательно, существует открытая в rX окрестность $\mathscr{U}'$ точки y, такая, что $U' \cap X = U$. Так как пространство rX регулярно, то существует $V' \in \mathscr{V}_y^{rX}$, такая, что $y \in V' \subset \mathrm{cl}_{rX} V' \subset U'$. Пусть $V = V' \cap X$. Тогда $V \in \mathscr{V}$. Пусть $\mathscr{W} \in \Sigma$ и для любого $W \in \mathscr{W}$, $W \cap V \neq \emptyset$. Следовательно, существует точка $z \in rX$, такая, что $\mathscr{W} = \mathscr{V}_z^{rX} \cap X$ и для любого $W' \in \mathscr{V}_z^{rX}$, $W' \cap V' \supset W' \cap V' \cap X = W \cap V \neq \emptyset$. Но когда $z \in \mathrm{cl}_{rX} V'$, т. е. $z \in U'$. Следовательно, $U' \in \mathscr{V}_z^{rX}$ и, значит, $U \in \mathscr{W}$, т. е. Σ_{rX} является T_3-системой в X.

2.2. Предложение. *Пусть X — регулярное пространство и Σ—T_3-система в X. Тогда расширение (Σ, φ_Σ) (см. 1.9) является регулярным расширением пространства X. При этом, след Σ_Σ расширения (Σ, φ_Σ) в X совпадает с Σ.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{V} \in \Sigma$ и $\mathscr{V} \in \mathcal{Q}_U$, где U — некоторое открытое подмножество пространства X. Тогда $U \in \mathscr{V}$ и так как $\Sigma \in \mathscr{T}_3$, то существует $V \in \mathscr{V}$, такое, что если $\mathscr{W} \in \Sigma$ и $W \cap V \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$, то $U \in \mathscr{W}$. Так как $V \in \mathscr{V}$, то $\mathscr{V} \in \mathcal{Q}_V$. Покажем, что $\mathrm{cl}_\Sigma \mathcal{Q}_V \subset \mathcal{Q}_U$. Действительно, пусть $\mathscr{W} \in \mathrm{cl}_\Sigma \mathcal{Q}_V$. Это означает, что для любого $W \in \mathscr{W}$, $\mathcal{Q}_W \cap \mathcal{Q}_V \neq \emptyset$. Но $\mathcal{Q}_W \cap \mathcal{Q}_V = \mathcal{Q}_{W \cap V}$ (см. 1.1) и, следовательно, $W \cap V \neq \emptyset$. Тогда $U \in \mathscr{W}$, т. е. $\mathscr{W} \in \mathcal{Q}_U$. Итак, пространство Σ (с слабой топологией) регулярно, а тогда из 1.10 получаем, что (Σ, φ_Σ) является регулярным расширением пространства X. Покажем, что $\Sigma_\Sigma = \Sigma$.

Пусть $\mathbf{\Phi} \in \Sigma$. Тогда $\mathscr{V}_{\mathbf{\Phi}}^\Sigma = \{\mathscr{A} :$ существует $\Phi \in \mathbf{\Phi}$, такое что $\mathcal{Q}_\Phi \subset \mathscr{A}$ и $\mathscr{A}$ открыто в $\Sigma\}$. Очевидно, базисом фильтра $\varphi_\Sigma^{-1}(\mathscr{V}_{\mathbf{\Phi}}^\Sigma \cap \varphi_\Sigma(X))$ является множество $\varphi_\Sigma^{-1}(\{\mathcal{Q}_\Phi \cap \varphi_\Sigma(X) : \Phi \in \mathbf{\Phi}\})$ и из 1.10 получаем, что последнее множество совпадает с множеством $\{\Phi : \Phi \in \mathbf{\Phi}\}$, т. е. с $\mathbf{\Phi}$. Так как $\mathbf{\Phi}$ — открытый фильтр в X, то мы получаем, что

$$(*) \qquad \mathbf{\Phi} = \varphi_\Sigma^{-1}(\mathscr{V}_{\mathbf{\Phi}}^\Sigma \cap \varphi_\Sigma(X)).$$

Следовательно, $\Sigma_\Sigma \subset \Sigma$. Пусть теперь $\mathbf{\Phi} \in \Sigma$. Тогда из формулы (*) следует, что $\Sigma \subset \Sigma_\Sigma$. Итак, $\Sigma = \Sigma_\Sigma$ и все доказано.

2.3. Теорема. *Если X — регулярное пространство, $\Sigma_1 \in \mathscr{T}_2$ и $\Sigma_2 \in \mathscr{F}_3$, то $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq_0 (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$ $((\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2}))$ тогда и только тогда, когда* $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$ $(\Sigma_1 \geq \Sigma_2)$.

Доказательство. Если $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$, то тогда любой элемент $\mathscr{U}$ системы Σ_1 содержит некоторый элемент $\mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ системы Σ_2, причем этот элемент единствен. Действительно, если $\mathscr{W} \in \Sigma_2$, $\mathscr{W} \neq \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ и $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$, то $\mathscr{U} \supset \mathscr{V}_{\mathscr{U}} \cup \mathscr{W}$. Так как $\Sigma_2 \in \mathscr{T}_2$ (по 1.6 б), то существуют непересекающиеся элементы $V \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ и $W \in \mathscr{W}$. Но тогда V и W являются дизъюнктными элементами открытого фильтра $\mathscr{U}$, что невозможно. Следовательно, полагая $f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$, мы получим однозначное отображение $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$. Если $\mathscr{U} = \mathscr{V}_x$, то, очевидно, $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} = \mathscr{V}_x$, т. е. $f(\mathscr{V}_x) = \mathscr{V}_x$ и, следовательно, $f \circ \varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma_2}$. Покажем теперь, что отображение f непрерывно. Пусть $\mathscr{U} \in \Sigma_1$ и $f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, т. е. $\mathscr{V} \in \Sigma_2$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. Пусть $\mathscr{Q}_U^{\Sigma_2}$ — базисная окрестность точки $\mathscr{V}$ в пространстве Σ_2. Тогда $U \in \mathscr{V}$ и так как $\Sigma_2 \in \mathscr{T}_3$, то существует $V \in \mathscr{V}$, такое, что если $\mathscr{W} \in \Sigma_2$ и $W \cap V \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}$, то $U \in \mathscr{W}$. Так как $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, то $V \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{U} \in \mathscr{Q}_V^{\Sigma_1}$. Покажем, что $f(\mathscr{O}_V^{\Sigma_1})(\mathscr{O}_U^{\Sigma_2})$. Действительно, пусть $\mathscr{W}_1 \in \mathscr{O}_V^{\Sigma_1}$ и пусть $f(\mathscr{W}_1) = \mathscr{W}_2$. Тогда $V \in \mathscr{W}_1$, $\mathscr{W}_2 \in \Sigma_2$ и $\mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}_1$. Следовательно, так как $\mathscr{W}_1$ — фильтр, $W \cap V \neq \varnothing$ для любого $W \in \mathscr{W}_2$, и мы получаем, что $U \in \mathscr{W}_2$, т. е. $\mathscr{W}_2 \in \mathscr{Q}_U^{\Sigma_2}$. Итак, отображение f непрерывно. Следовательно, $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq_0 (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$.

Пусть теперь $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$. Тогда $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$ и значит $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq_0 (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$. Но отображение f, построенное выше, является теперь отображением „на“. Действительно, так как любой элемент $\mathscr{V}$ семейства Σ_2 содержится в некотором элементе $\mathscr{U}$ семейства Σ_1 и очевидно тогда $\mathscr{V} = \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$, то $f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$.

Пусть $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq_0 (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$. Покажем, что $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$. Пусть отображение $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ непрерывно и $f \circ \varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma_2}$. Пусть $\mathscr{V}_1 \in \Sigma_1$ и $f(\mathscr{V}_1) = \mathscr{V}_2 \in \Sigma_2$. Так как отображение f непрерывно, то для любого $U \in \mathscr{V}_2$ (т. е. для любого $\mathscr{Q}_U^{\Sigma_2}$, содержащего $\mathscr{V}_2$) существует элемент $V \in \mathscr{V}_1$ (т. е. существует $\mathscr{Q}_V^{\Sigma_1}$, содержащее $\mathscr{V}_1$), такой, что $f(\mathscr{Q}_V^{\Sigma_1}) \subset \mathscr{Q}_U^{\Sigma_2}$. Пусть $x \in V$. Тогда $V \in \mathscr{V}_x$ и значит $\mathscr{V}_x \in \mathscr{Q}_V^{\Sigma_1}$. Но $f(\mathscr{V}_x) = \mathscr{V}_x$ и $f(\mathscr{V}_x) \in \mathscr{Q}_U^{\Sigma_2}$. Следовательно, $U \in \mathscr{V}_x$, а тогда $x \in U$. Итак, $V \subset U$. Следовательно, $\mathscr{V}_2 \subset \mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2 \in \Sigma_2$, т. е. $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$.

Если $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$, то $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1}) \geq_0 (\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$ и значит $\Sigma_1 \geq_0 \Sigma_2$. Так как теперь отображение $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является отображением „на“, то для любого $\mathscr{U} \in \Sigma_2$ существует $\mathscr{V} \in \Sigma_1$, такой, что $f(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$. Тогда, как и выше, мы получим, что $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$.

Итак, $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$. Тем самым теорема полностью доказана.

2.4. Теорема. *Обозначим через $\mathscr{R}$ класс всех регулярных расширений регулярного пространства X (с точностью до эквивалентности). Тогда частично упорядоченный класс $(\mathscr{R}, \leq_0)$ и частично упорядоченное множество $(\mathscr{T}_3, \leq_0)$, равно как и частично упорядоченный класс $(\mathscr{R}, \leq)$ и частично упорядоченное множество $(\mathscr{T}_3, \leq)$, изоморфны, причем изоморфизм σ между ними дается одной и той же формулой:* $\sigma((rX, r)) = \Sigma_{rX}$, $(rX, r) \in \mathscr{R}$ (и $\sigma^{-1}(\Sigma) = (\Sigma, \varphi_\Sigma)$, $\Sigma \in \mathscr{T}_3$).

Доказательство. Пусть (r_1X, r_1) и (r_2X, r_2) — эквивалентные регулярные расширения пространства X. Тогда существуют непрерывные отображения $f_1: r_1X \xrightarrow{\text{на}} r_2X$ и $f_2: r_2X \xrightarrow{\text{на}} r_1X$, такие, что $f_1 \circ r_1 = r_2$, $f_2 \circ r_2 = r_1$

и $f_1^{-1}=f_2$, $f_2^{-1}=f_1$. Имеем $\Sigma_{r_1X}=r_1^{-1}(\Sigma_{r_1,\,r_1(X)})$ и $\Sigma_{r_2X}=r_2^{-1}(\Sigma_{r_2X,r_2(X)})$. Если $y\in r_1X$, то пусть $\mathscr{U}_y^1=r_1^{-1}(\mathscr{V}_y^{r_1X}\cap r_1(X))$. Если $z\in r_2X$, то пусть $\mathscr{U}_z^2=r_2^{-2}(\mathscr{V}_z^{r_2X}\cap r_2(X))$. Очевидно, если $U\in\mathscr{U}_y^1$, то $U\in\mathscr{U}_{f_1(y)}^2$, и если $U\in\mathscr{U}_{f_1(y)}^2$, то $U\in\mathscr{U}_{(f_2\circ f_1)(y)}^1=\mathscr{U}_y^1$. Следовательно, $\mathscr{U}_y^1=\mathscr{U}_{f_1(y)}^2$. Так как f_1 является гомеоморфизмом „на“, то тем самым доказано, что $\Sigma_{r_1X}=\Sigma_{r_2X}$.

Пусть теперь (r_1, X, r_1) — регулярное расширение пространства X. Пусть $\Sigma=\Sigma_{r_1X}$. Тогда (согласно 2.1) Σ является T_3-системой и, следовательно (по 2.2), (Σ, φ_Σ) является регулярным расширением пространства X и его след Σ_Σ совпадает с Σ. Обозначим, как и выше: $\Sigma=\Sigma_{r_1X}=\{\mathscr{U}_y^1:\ y\in r_1X\}$ и построим отображения $f_1:\Sigma\xrightarrow{\text{на}} r_1X$ и $g_1: X\xrightarrow{\text{на}}\Sigma$, полагая для любого $y\in r_1X$ $f_1(\mathscr{U}_y^1)=y$ и $g_1(y)=\mathscr{U}_y^1$. Пусть $x\in X$. Тогда $\mathscr{V}_x^X=\mathscr{U}_{r_1(x)}^1$ и $\mathscr{V}_x^X=\varphi_\Sigma(x)$. Следовательно, $f_1(\varphi_\Sigma(x))=r_1(x)$ для любого $x\in X$, т. е. $f_1\circ\varphi_\Sigma=r_1$. Также $g_1(r_1(x))=\mathscr{U}_{r_1(x)}^1=\mathscr{V}_x^X=\varphi_\Sigma(x)$, т. е. $g_1\circ r_1=\varphi_\Sigma$. Покажем, что f_1 и g_1 являются непрерывными отображениями. Действительно, пусть $\mathscr{U}_y^1\in\Sigma$. Тогда $_1(\mathscr{U}_y^1)=y$. Пусть U — открытая окрестность точки y в пространстве r_1X. Так как оно регулярно, то существует открытая в r_1X окрестность V точки y, такая, что $\mathrm{cl}_{r_1X}V\subset U$. Пусть $W=r_1^{-1}(V)$. Тогда $W\in\mathscr{U}_y^1$ и, следовательно, $\mathscr{U}_y^1\in\mathscr{Q}_W$. Покажем, что $f_1(\mathscr{Q}_W)\subset U$. Действительно, пусть $\mathscr{U}_z^1\in\mathscr{Q}_W$, т. е. $W\in\mathscr{U}_z^1$. Тогда существует W_1 — открытое в r_1X, такое, что $z\in W_1$ и $r_1^{-1}(W_1)=W$. Следовательно, $W_1\cap r_1X=r_1(W)=V\cap r_1X$. Тогда $\mathrm{cl}_{r_1X}(W_1)=\mathrm{cl}_{r_1X}(W_1\cap r_1(X))=\mathrm{cl}_{r_1X}(V\cap r_1(X))=\mathrm{cl}_{r_1X}V\subset U$. Следовательно, $z\in\mathrm{cl}_{r_1X}W_1\subset U$, т. е. $z\in U$. Но $z=f_1(\mathscr{U}_z^1)$, т. е. $f_1(\mathscr{Q}_W)\subset U$. Итак, $f_1:\Sigma\longrightarrow r_1X$ — непрерывная функция. Пусть теперь $y\in r_1X$. Тогда $g_1(y)=\mathscr{U}_y^1$. Пусть $\mathscr{U}_y^1\in\mathscr{Q}_U$, где U — открыто в X. Следовательно, $U\in\mathscr{U}_y^1$. Тогда существует открытое в r_1X множество V, такое, что $y\in V$ и $r_1^{-1}(V)=U$. Покажем, что $g_1(V)\subset\mathscr{Q}_U$. Действительно, пусть $z\in V$. Тогда $g_1(z)=\mathscr{U}_z^1$. Следовательно, $r_1^{-1}(V)\in\mathscr{U}_z^1$, т. е. $U\in\mathscr{U}_z^1$, а это и означает, что $g_1(z)=\mathscr{U}_z^1\in\mathscr{Q}_U$. Итак, отображение $g_1: r_1X\to\Sigma$ тоже непрерывно. Следовательно, расширения (r_1X, r_1) и (Σ, φ_Σ) эквивалентны, т. е. с точностью до эквивалентности расширения (r_1X, r_1) и $(\sigma^{-1}\circ\sigma)((r_1X, r_1))=(\Sigma_{r_1X}, \varphi_{\Sigma_{r_1X}})$ совпадают, а из 2.3 следует, что $(\sigma\circ\sigma^{-1})(\Sigma)=\Sigma$.

Итак, мы показали, что σ является взаимно однозначным соответствием. Докажем, что σ является изоморфизмом. Ввиду всего сказанного до сих пор мы должны только показать, что если Σ_1 и Σ_2 — T_3-системы в пространстве X, то $\Sigma_1\geq_0\Sigma_2$ $(\Sigma_1\geq\Sigma_2)$ тогда и только тогда, когда $(\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1})\geq_0(\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2})$ $((\Sigma_1, \varphi_{\Sigma_1})\geq(\Sigma_2, \varphi_{\Sigma_2}))$, а это следует из 2.3. Тем самым теорема 2.4 полностью доказана.

2.5. Теорема. *Между частично упорядоченным классом $\mathscr{E}$ всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X (с точностью до эквивалентности) и частично упорядоченным множеством всех T_3-систем в X, являющихся максимальными T_2-системами, существует изоморфное соответствие σ, а именно $\sigma((cX, c))=\Sigma_{cX}$, $(cX, c)\in\mathscr{E}$ и $\sigma^{-1}(\Sigma)=(\Sigma, \varphi_\Sigma)$.*

Доказательство. Отмечая, что частично упорядоченные классы $(\mathscr{E}, \leq)$ и $(\mathscr{E}, \leq_0)$ изоморфны (и изоморфизмом является тождественное отображение), и имея в виду теоремы 2.4 и 1.3, все получается из теоремы

Александрова — Урысона [2] о том, что пространство Y бикомпактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и H-замкнуто.

2.6. Теорема. *Если (rX, r) — регулярное расширение пространства X, то пространство rX R-замкнуто тогда и только тогда, когда его след Σ_{rX} является максимальной T_3-системой.*

Доказательство. Пусть Σ_{rX} максимальная T_3-система. Покажем, что пространство rX R-замкнуто. Допустим, что rX не является R-замкнутым. Тогда существует регулярное расширение (Y, f) пространства rX, такое, что $Y \neq f(rX)$. Очевидно, $(Y, f \circ r)$ будет регулярным расширением пространства X. Рассмотрим следы Σ_Y и Σ_{rX} расширений $(Y, f \circ r)$ и (rX, r) пространства X в X. Они являются T_3-системами согласно 2.1. Покажем, что $\Sigma_Y \supset \Sigma_{rX}$, $\Sigma_Y \neq \Sigma_{rX}$. Действительно, $\Sigma_{rX} = r^{-1}(\Sigma_{rX,\, r(X)})$ и $\Sigma_Y = r^{-1}(f^{-1}(\Sigma_{Y,\, f(r(X))}))$ и если $\mathscr{U} \in \Sigma_{rX}$, то существует точка $z \in rX$, такая, что $\mathscr{U} = r^{-1}(\mathscr{V}_z^{rX} \cap r(X))$, а так как $\mathscr{V}_z^{rX} \cap r(X) = f^{-1}(\mathscr{V}_{f(z)}^{Y} \cap f(r(X)))$, то $\mathscr{U} \in \Sigma_Y$, т. е. $\Sigma_{rX} \subset \Sigma_Y$. Так как существует точка $y \in Y \setminus f(r(X))$ и ясно, что $r^{-1}(f^{-1}(\mathscr{V}_y^{Y} \cap f(r(X)))) \in \Sigma_Y \setminus \Sigma_{rX}$, то мы получаем противоречие с максимальностью T_3-системы Σ_{rX}. Следовательно, пространство rX R-замкнуто.

Пусть теперь пространство rX R-замкнуто. Покажем, что его след Σ_{rX} является максимальной T_3-системой. Допустим, что существует T_3-система Σ в X, такая, что $\Sigma \supset \Sigma_{rX}$, $\Sigma \neq \Sigma_{rX}$. Так как согласно 2.4 расширения (rX, r) и $(\Sigma_{rX}, \varphi_{\Sigma_{rX}})$ эквивалентны, то, в частности, пространства Σ_{rX} и rX гомеоморфны, т. е. пространство Σ_{rX} R-замкнуто. Но пространство Σ с слабой топологией регулярно согласно 2.2, множество $\{\mathscr{V}_x^X \colon x \in X\} \subset \Sigma_{rX}$ всюду плотно в нем, и топология, индуцированная в Σ_{rX} из Σ, совпадает с слабой топологией на Σ_{rX}, так что Σ является регулярным расширением пространства Σ_{rX}. Так как $\Sigma \neq \Sigma_{rX}$, то мы получаем противоречие. Следовательно, Σ_{rX} является максимальной T_3-системой в пространстве X. Теорема доказана.

2.7. Замечание. Отметим, что семейство $\{\mathscr{V}_x^X \colon x \in X\}$ является T_3-системой тогда и только тогда, когда пространство X регулярно (см. 1.6 в), и оно является максимальной T_3-системой тогда и только тогда, когда пространство X R-замкнуто.

2.8. Замечание. Очевидно, пространство αX регулярно тогда и только тогда, когда семейство Σ_α (см. 1.1) является T_3-системой в регулярном пространстве X, а если $\Sigma_\alpha \in \mathscr{F}_3$, то из 1.2 б и 1.6 а следует, что Σ_α является максимальной T_3-системой. Следовательно, из теоремы 2.6 получаем следующий результат П. С. Александрова [1]; если пространство αX регулярно, то оно является R-замкнутым.

2.9. Теорема. *Если пространство X регулярно, то оно является R-замкнутым тогда и только тогда, когда пространства X и αX гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть пространство X R-замкнуто и пусть $\mathscr{U} \in \Sigma_\alpha$. Тогда из 1.2 а получаем, что $\mathscr{U}$ является открытым регулярным фильтром в пространстве X. Теперь из 1.4 получаем, что $\bigcap \mathrm{cl}_X \mathscr{U} \neq \varnothing$. Пусть $x \in \bigcap \mathrm{cl}_X \mathscr{U}$ и пусть $\mathscr{V} = \mathscr{V}_x^X \cup \mathscr{U}$. Очевидно, $\mathscr{V}$ является регулярным центрированным семейством открытых подмножеств пространства X и $\mathscr{V} \supset \mathscr{V}_x^X$, $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$. Так как $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}_x^X$ — регулярные концы в X (см. 1.2 в и 1.1), то получаем, что $\mathscr{U} = \mathscr{V} = \mathscr{V}_x^X$. Итак, если $\mathscr{U} \in \Sigma_\alpha$, то существует точка $x \in X$, такая, что $\mathscr{U} = \mathscr{V}_x^X$, и, кроме того, для любого $x \in X$, $\mathscr{V}_x^X \in \Sigma_\alpha$. Следовательно, $\Sigma_\alpha = \{\mathscr{V}_x^X \colon x \in X\}$.

Если мы введем в множестве $\Sigma_0=\{\mathscr{V}_x^X: x\in X\}$ слабую топологию, то полученное топологическое пространство Σ_0 и пространство X будут гомеоморфны (см. 1.9 и 1.10). Но пространство αX тоже получено введением слабой топологии во множестве Σ_α (см. 1.1), а у нас $\Sigma_\alpha=\Sigma_0$; следовательно, пространства αX и X гомеоморфны.

Пусть теперь пространства X и αX гомеоморфны. Так как пространство X регулярно, то значит и пространство αX регулярно и теперь из 2.8 получаем, что пространство αX, а значит и пространство X, R-замкнуто.

2.10. Следствие. *Если пространство αX регулярно, то пространства $\alpha(\alpha X)$ и αX гомеоморфны.*

Доказательство. Все следует из замечания 2.8 и теоремы 2.9.

2.11. Определение. *Регулярное расширение (rX, r) регулярного пространства X будем называть α-расширением, если любой регулярный конец в пространстве X содержит некоторый элемент семейства Σ_{rX} (т.е. если $\Sigma_\alpha\geq_0\Sigma_{rX}$).*

2.12. Предложение. *Если (rX, r) — α-расширение пространства X, то пространство rX R-замкнуто.*

Доказательство. В силу теорем 2.4 и 2.6 достаточно показать, что T_3-система Σ_{rX} является максимальной.

Пусть $\Sigma_1\in\mathscr{T}_3$ и $\Sigma_1\supset\Sigma_{rX}$, $\Sigma_1\neq\Sigma_{rX}$. В пространстве αX рассмотрим подмножества $Z(\Sigma)=\{\mathscr{U}\in\alpha X$: существует $\mathscr{V}\in\Sigma$, такое, что $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}\}$, где $\Sigma=\Sigma_1, \Sigma_{rX}$. Так как (rX, r) является α-расширением, то $Z(\Sigma_{rX})=\alpha X$ и, следовательно, $Z(\Sigma_1)=Z(\Sigma_{rX})$. Но $\Sigma_1\neq\Sigma_{rX}$, т. е. существует регулярный фильтр $\mathscr{V}\in\Sigma_1\setminus\Sigma_{rX}$. Тогда, согласно 1.2 б, существует регулярный конец $\mathscr{U}\in\alpha X$, такой, что $\mathscr{U}\supset\mathscr{V}$, т. е. $\mathscr{U}\in Z(\Sigma_1)$. Следовательно, существует фильтр $\mathscr{W}\in\Sigma_{rX}$, такой, что $\mathscr{U}\supset\mathscr{W}$. Но $\mathscr{W}\neq\mathscr{V}$ и так как $\Sigma_1\in\mathscr{T}_2$ (см. 1.6 б), то мы получаем противоречие с тем, что $\mathscr{U}$ является центрированной системой. Следовательно, $\Sigma_1=\Sigma_{rX}$, т. е. Σ_{rX} является максимальной T_3-системой.

2.13. Предложение. *Если пространство X вполне регулярно, то любое бикомпактное расширение пространства X является α-расширением.*

Доказательство. Пусть (cX, c) — бикомпактное расширение пространства X. Тогда из теоремы 2.5 получаем, что T_3-система Σ_{cX} является максимальной T_2-системой в пространстве X. Пусть $Z(\Sigma_{cX})=\{\mathscr{U}\in\alpha X$: существует $\mathscr{V}\in\Sigma_{cX}$, такое, что $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}\}$ и пусть $Z(\Sigma_{cX})\neq\alpha X$, т. е. существует $\mathscr{V}_0\in\alpha X\setminus Z(\Sigma_{cX})$. Обозначим: $\Sigma=\Sigma_{cX}\cup\{\mathscr{V}_0\}$. Допустим, что семейство открытых фильтров Σ не является T_2-системой. Тогда, так как семейство Σ_{cX} является T_2-системой, существует открытый фильтр $\mathscr{U}_0\in\Sigma_{cX}$, такой, что любые два элемента открытых фильтров $\mathscr{U}_0$ и $\mathscr{V}_0$ пересекаются. Пусть $\mathscr{W}_0=\mathscr{U}_0\cup\mathscr{V}_0$. Очевидно, $\mathscr{W}_0$ является регулярным центрированным семейством в пространстве X, а так как $\mathscr{V}_0\in\alpha X$, то $\mathscr{W}_0=\mathscr{V}_0$. Следовательно, $\mathscr{U}_0\subset\mathscr{V}_0$, т. е. $\mathscr{V}_0\in Z(\Sigma_{cX})$. Полученное противоречие показывает, что Σ является T_2-системой. Но так как $\Sigma\supset\Sigma_{cX}$ и $\Sigma\neq\Sigma_{cX}$, а Σ_{cX} является максимальной T_2-системой в пространстве X (см. 1.3), то мы получаем противоречие. Следовательно, $Z(\Sigma_{cX})=\alpha X$, а это и означает, что (cX, c) является α-расширением пространства X.

2.14. Предложение. *Регулярное расширение (rX, r) пространства X является α-расширением тогда и только тогда, когда $(\alpha X, \varphi_\alpha)\geq(rX, r)$ $((\alpha X, \varphi_\alpha)\geq_0(rX, r))$.*

Доказательство. Из 2.11 и 1.2б следует, что регулярное расширение (rX, r) является α-расширением тогда и только тогда, когда $\Sigma_\alpha \geq \Sigma_{rX}$ (см. 1.1). Теперь все следует из теоремы 2.3.

2.15. Замечание. Отметим, что 2.14 является обобщением теоремы П. С. Александрова 1.2 д из-за 2.13.

2.16. Теорема. *Если пространство αX регулярно, то оно является наибольшим элементом частично упорядоченного (при помощи слабого ($\leq_0$) или сильного ($\leq$) порядка) класса всех α-расширений регулярного пространства X.*

Доказательство. Очевидно, если пространство αX регулярно, то оно является α-расширением пространства X, и теперь все следует из 2.14.

2.17. Предложение. *Если пространство αX регулярно, то множество регулярных пространств $\{Y: \varphi_\alpha(X) \subset Y \subset \alpha X\}$ совпадает (с точностью до эквивалентности) с классом всех максимальных элементов, частично упорядоченным сильным порядком $\leq$ класса всех регулярных расширений регулярного пространства X.*

Доказательство. Пусть (rX, r) — регулярное расширение пространства X и Σ_{rX} — его след. Положим $Y = Z(\Sigma_{rX}) = \{\mathscr{U} \in \alpha X$: существует $\mathscr{V} \in \Sigma_{rX}$, такое, что $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}\}$. Очевидно, $\Sigma_0 = \varphi_\alpha(X) = \{\mathscr{V}^X_x : x \in X\} \subset Y \subset \alpha X = \Sigma_\alpha$ и так как αX регулярно, то Σ_α, а значит и Y, являются T_3-системами в X и $Y \geq \Sigma_{rX}$ (ввиду 1.2б). Следовательно, из теорем 2.3 и 2.4 получаем, что $(Y, \varphi_Y) \geq (\Sigma_{rX}, \varphi_{\Sigma_{rX}}) = (rX, r)$.

Пусть $\Sigma_0 \subset Y_i \subset \alpha X$, $i = 1, 2$. Покажем, что регулярные расширения (Y_1, φ_{Y_1}) и (Y_2, φ_{Y_2}) пространства X несравнимы, если $Y_1 \neq Y_2$. Действительно, допустим, например, что $(Y_1, \varphi_{Y_1}) \geq (Y_2, \varphi_{Y_2})$, $(Y_1, \varphi_{Y_1}) \neq (Y_2, \varphi_{Y_2})$ (т. е. $Y_1 \neq Y_2$). Тогда, по теореме 2.3, между T_3-системами Y_1 и Y_2 имеет место неравенство $Y_1 \geq Y_2$. Пусть $\mathscr{U} \in Y_1$. Тогда должен существовать открытый фильтр $\mathscr{V} \in Y_2$, такой, что $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. Но $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ являются регулярными концами пространства X. Следовательно, $\mathscr{U} = \mathscr{V}$, т. е. $Y_1 \subset Y_2$. Но так как любой элемент $\mathscr{V}$ семейства Y_2 должен содержаться в некотором элементе $\mathscr{U}$ семейства Y_1, то мы получим, что и $Y_2 \subset Y_1$, т. е. $Y_1 = Y_2$. Полученное противоречие показывает, что расширения (Y_1, φ_{Y_1}) и (Y_2, φ_{Y_2}) несравнимы, если $Y_1 \neq Y_2$. Предложение 2.17 доказано.

Отметим, что в частично упорядоченном слабым порядком $\leq_0$ классе всех регулярных расширений регулярного пространства X наибольшим элементом является пара (X, i_X), где $i_X(x) = x$ для любого $x \in X$.

2.18. Предложение. *Любое регулярное расширение (rX, r) пространства X мажорируется (относительно сильного порядка $\leq$) некоторым хаусдорфовым расширением $(h_r X, \varphi_\alpha)$ пространства X, где $\varphi_\alpha(X) \subset h_r X \subset \alpha$, притом так, что соответствующее отображение f: $h_r X \to rX$ является уплотнением.*

Доказательство. По 2.4 расширения (rX, r) и $(\Sigma_{rX}, \varphi_{\Sigma_{rX}})$ эквивалентны. Построим расширение $(h_r X, \varphi_\alpha)$. Согласно 1.2б, для любого $\mathscr{U} \in \Sigma_{rX}$ мы можем зафиксировать некоторый регулярный конец $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \in \alpha X$, такой, что $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$. Положим $h_r X = \{\mathscr{V}_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \in \Sigma_{rX}\}$. Очевидно, $\varphi_\alpha(X) = \{\mathscr{V}^X_x : \{x \in X\} \subset h_r X$ $\subset \alpha X$, $(h_r X, \varphi_\alpha)$ является хаусдорфовым расширением пространства X и $h_r X$ — T_2-система в X. Тогда, по теореме 2.3, отображение f: $h_r X \to \Sigma_{rX}$, где $f(\mathscr{V}_{\mathscr{U}})$

$=\mathscr{U}$, является непрерывным отображением „на“ и $f\circ\varphi_\alpha=\varphi_{\Sigma_r X}$. Так как, очевидно, f взаимно-однозначно, то f является уплотнением.

3. Примеры. 3.1. Пример небикомпактного α-расширения. Хорошо известен пример Дж. Томаса [10] регулярного, но не вполне регулярного пространства X. Мы покажем, что расширение αX этого пространства регулярно и, следовательно, оно является α-расширением пространства X, которое очевидно не бикомпактно, так как иначе пространство X было бы вполне регулярным.

Напомним описание пространства X, следуя [3].

Пусть на плоскости R^2 по отношению к некоторой прямоугольной декартовой системе координат заданы следующие множества и точки: $L_n=\{(n, y): 0\leqq y<1/2\}$, где n — любое целое четное число, $L=\cup\{L_n: n$ четно$\}$, $p_{n,k}=(n, 1-1/k)\in\mathsf{R}^2$, $T_{n,k}=\{(n\pm t, 1-t-1/k): 0<t\leqq 1-1/k\}\subset\mathsf{R}^2$, где n — целое нечетное и k — целое, $k\geqq 2$. Положим $S=\{p_{n,k}: n$ — нечетное, k — целое, $k\geqq 2\}$, $T=\cup\{T_{n,k}: n$ — нечетное, k — целое, $k\geqq 2\}$. Каждое $T_{n,k}$ состоит из двух боковых сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, основание (гипотенуза) которого лежит на оси абсцисс, а вершина находится в точке $p_{n,k}$. При этом $p_{n,k}\notin T_{n,k}$. Очевидно, $S\cap T=T\cap L=L\cap S=\varnothing$. Присоединим к множеству $S\cup T\cup L$ две какие-нибудь новые точки p_- и p_+. Положим $X=S\cup T\cup L\cup\{p_-\}\cup\{p_+\}$. Определим теперь на X топологию; мы укажем ее базу во всех точках множества X.

а) Каждая точка множества T объявляется изолированной в X.

б) Базисная окрестность каждой точки $p_{n,k}$ состоит из $p_{n,k}$ и всех точек соответствующего множества $T_{n,k}$, за исключением какого-нибудь конечного множества их.

в) Базу в точке $(n, y)\in L_n$ образует семейство всех множеств вида $\{(n, y)\}\cup(A_{n,y}\setminus K)$, где $A_{n,y}=\{(x, y')\in T: y'=y$ и $|n-x|<1\}$, а K — любое конечное множество.

г) Базу в точке p_- образуют множества $U_n=\{(x, y)\in X: x<n\}\cup\{p_-\}$, n четно. Будем писать: $U_n=[-\infty, n)$.

д) Базу в точке p_+ образуют множества вида $V_n=\{(x, y)\in X: x>n\}\cup\{p_+\}$, n четно. Будем писать: $V_n=(n, +\infty]$. Будем писать также: $(a, b)=\{(x, y)\in X: a<x<b\}$.

Легко проверить, что этими условиями определяется некоторая топология на множестве X и что полученное топологическое пространство X регулярно. Показывается также, что произвольная непрерывная вещественная функция f на пространстве X принимает одинаковые значения в точках p_- и p_+ и, следовательно, пространство X не вполне регулярно. Наконец, будем писать: $\tilde{T}_{n,k}=T_{n,k}\cup\{p_{n,k}\}$.

Покажем теперь, что пространство αX регулярно, т. е. что $\Sigma_\alpha\in\mathscr{T}_3$ (см. 2.8). Итак, мы должны показать, что для любого $\mathscr{V}\in\bar{Z}_\alpha$ выполняется следующее условие, которое будем обозначать через (С): для любого $U\in\mathscr{V}$ существует $V\in\mathscr{V}$, такое, что если $W\cap V\neq\varnothing$ для любого $W\in\mathscr{W}$ (где $\mathscr{W}\in\Sigma_\alpha$), то $U\in\mathscr{W}$.

1. Если $\mathscr{W}=\mathscr{V}_x$ для некоторого $x\in X$, то легко проверяется, что условие (С) выполнено.

2. Пусть теперь $\mathscr{V}=\mathscr{V}_x$, где $x\in X$.

а) Пусть $x\notin\{p_-, p_+\}$. Тогда база в этой точке состоит, как легко видно, из открыто-замкнутых множеств. Следовательно, если $U\in\mathscr{V}$, то существует открыто-замкнутое $V \in \mathscr{V}$, такое, что $V \subset U$. Теперь, если $\mathscr{W} \in \Sigma_\alpha$ и $W \cap V \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$, то мы получим, что семейство $\mathscr{W}' = \mathscr{W} \cup \{V\}$ является центрированным регулярным семейством в X и так как $\mathscr{W} \in \Sigma_\alpha$, то $V \in \mathscr{W}$ и тем более $U \in \mathscr{W}$, т. е. условие (C) снова выполнено.

б) Пусть $x = p_+$, т.е. $\mathscr{V} = \mathscr{V}_{p+}$.

Пусть $U \in \mathscr{V}$. Тогда существует $U_1 = (2k_0, \infty] \subset U$ ($U_1 \in \mathscr{V}$, $k_0 \in N$). Пусть $V = (2k_0+2, \infty]$. Следовательно, $\bar{V} = V \cup L_{2k_0+2} \subset U_1 \subset U$. Пусть для любого $W \in \mathscr{W}$, $W \cap V \neq \emptyset$ и $\mathscr{W} \neq \mathscr{V}_y$ для любого $y \in X$. Следовательно, $\cap \mathscr{W} = \cap \bar{\mathscr{W}} = \emptyset$. Если для любого $W \in \mathscr{W}$ пересечение $W \cap V$ неограничено, то мы получим, что $p_+ \in \bar{W}$ для любого $W \in \mathscr{W}$, т. е. $\cap \bar{\mathscr{W}} \neq \emptyset$, и мы получаем противоречие. Следовательно, существует $W_0 \in \mathscr{W}$, такое, что $W_0 \cap V$ ограничено.

Если существует $W_1 \in \mathscr{W}$, такое, что $W_0 \cap W_1 \subset V \cap W_0 \subset V$, то мы получим, что $V \in \mathscr{W}$ и значит $U \in \mathscr{W}$, т. е. все хорошо.

Пусть для любого $W \in \mathscr{W}$, $W \cap W_0 \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, т. е. (так как $X \setminus V = \overline{X \setminus \bar{V}}$, где $V = (2k_0+2, \infty]$)

(1) для любого $W \in \mathscr{W}$ мы имеем $W \cap [-\infty, 2k_0+2) \neq \emptyset$.

Если для любого $W \in \mathscr{W}$, $W \cap [-\infty, 2k_0+2)$ неограничено, то мы получим, что $\mathscr{W} = \mathscr{V}_{p-}$. Следовательно, существует $W_1 \in \mathscr{W}$, такое, что $W_1 \cap [-\infty, 2k_0+2)$ ограничено. Тогда $W' = W_0 \cap W_1 \in \mathscr{W}$ и W' ограничено, т. е. существуют $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ (где $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел), такие, что $k_1 < k_0+1 < k_2$ и $W' \subset (2k_1, 2k_2)$. Рассмотрим множество $W'' = W' \setminus \bar{V} = W' \cap (2k_1, 2k_0+2)$. Из (1) получаем, что $W \cap W'' \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$. Если существует $W_2 \in \mathscr{W}$, такое, что $\bar{W}_2 \subset W'$ и $\overline{W_2 \cap W''} \subset W''$, то для любого $W \in \mathscr{W}$, такого, что $\bar{W} \subset W_2$, получим: $W \cap W'' \neq \emptyset$ и $\overline{W \cap W''} \subset \overline{W_2 \cap W''} \subset W''$, т. е. $\overline{W \cap W''} = W'' \cap \overline{W \cap W''} \subset W'' \cap \bar{W} \cap \bar{W}'' = W'' \cap \bar{W} \subset W_2 \cap W''$. Тогда, присоединяя к открытому фильтру $\mathscr{W}$ множество W'' вместе со всеми $W \cap W''$, где $W \in \mathscr{W}$, мы получим регулярный фильтр, содержащий $\mathscr{W}$, что невозможно. Следовательно, $W'' \in \mathscr{W}$. Но $W'' \cap V = \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что

(2) $\overline{W \cap W''} \cap (X \setminus W'') \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$, такого, что $\bar{W} \subset W'$.

Но $\overline{W \cap W''} \subset \bar{W} \cap \bar{W}'' = \bar{W} \cap \overline{W' \setminus \bar{V}} \subset W' \cap (W'' \cup L_{2k_0+2}) \subset W'' \cup L_{2k_0+2}$. Тогда, согласно (2), получим, что для любого $W \in \mathscr{W}$, для которого $\bar{W} \subset W'$, выполнено $W \cap L_{2k_0+2} \neq \emptyset$. А тогда и

(3) $W \cap L_{2k_0+2} \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$.

Из (3) получим, что

(4) $|W \cap L_{2k_0+2}| \geqq \aleph_0$ для любого $W \in \mathscr{W}$,

потому что иначе можно было бы найти элемент $W \in \mathscr{W}$, для которого $W \cap L_{2k_0+2} = \emptyset$. Из (4) следует, что возможны только следующие два случая:

б1) существует $W_3 \in \mathscr{W}$, такой, что $|W_3 \cap L_{2k_0+2}| = \aleph_0$, и

б2) $|W \cap L_{2k_0+2}| > \aleph_0$ для любого $W \in \mathscr{W}$.

Рассмотрим сначала случай б1), т. е. когда существует элемент W_3, такой, что $|W_3 \cap L_{2k_0+2}| = \aleph_0$. Пусть $W_3 \cap L_{2k_0+2} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Построим для любого $n \in N$ окрестность O_n точки x_n следующим образом: положим $O_n \cap T_{2k_0+i,k} = \emptyset$, если $2 \leq k < n+1$, $i=1,3$, и $O_n \cap T_{2k_0+i,k} = \{y_{k,i}\}$, если $k \geq n+1$, $i=1, 3$, где ордината точки $y_{k,i}$ совпадает с ординатой точки x_n, а для абцисс $(x_n)_x$ и $(y_{k,i})_x$ точек x_n и $y_{k,i}$ имеет место неравенство $|(x_n)_x - (y_{k,i})_x)| < 1$. Обозначим теперь: $O = \cup\{O_n : n \in N\}$. Тогда для любого $T_{2k_0+i,k}$, где $i=1, 3$, а $k \in N$, $k \geq 2$, будем иметь

$$|O \cap T_{2k_0+i,k}| < \aleph_0. \tag{5}$$

Это означает, что множество O открыто-замкнуто в пространстве X. Но $O \cap W \supset W_3 \cap L_{2k_0+2} \cap W = (W \cap W_3) \cap L_{2k_0+2} \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathscr{W}$ (согласно (3)). Следовательно, $O \in \mathscr{W}$. Но $O \subset (2k_0, \infty] = U_1 \subset U$. Следовательно, $U \in \mathscr{W}$.

Рассмотрим теперь случай б2), т. е. $|W \cap L_{2k_0+2}| > \aleph_0$ для любого $W \in \mathscr{W}$. Пусть $k_3 = k_2 - k_1 + 2$. Так как открытый фильтр $\mathscr{W}$ регулярен, то существуют такие элементы $W'_1, W'_2, \dots, W'_{k_3}$ этого фильтра, что $W' \supset \overline{W}'_1 \supset W'_1 \supset \overline{W}'_2 \cdots \supset W'_{k_3-1} \supset \overline{W}'_{k_3} \supset W'_{k_3}$. Рассмотрим элемент W'_{k_3}. Пусть $W'_{k_3} \cap L_{2k_0+2} = \{x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots : \alpha < \mu\}$, где $\mu \geq \omega_1$. Тогда для любого $\alpha < \omega_1$ существует базисная окрестность $Ox_\alpha < W'_{k_3}$ точки x_α. Пусть $O = \cup\{Ox_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Тогда $O \subset W'_{k_3}$ и $O \cap \cup\{T_{2k_0+i,k} : k = 2, 3, \dots\}| > \aleph_0$, $i=1, 3$. Теперь фиксируем i. Допустим, что неравенство $|O \cap T_{2k_0+i,k}| \geq \aleph_0$ выполняется только для конечного числа индексов $k \in N$ $(k \geq 2)$: $k_1, k_2, \dots, k_j$ (очевидно, хотя бы для одного из этих k неравенство строгое). Пусть $A = N \setminus \{1, k_1, k_2, \dots, k_j\}$. Тогда для любого $p \in A$ существует $\alpha_p < \omega_1$, такое, что для любого $\alpha > \alpha_p$, $Ox_\alpha \cap T_{2k_0+i,p} = \emptyset$. Так как $|A| = \aleph_0$, то существует $\alpha_0 < \omega_1$, такое, что для любого $p \in A$, $\alpha_0 > \alpha_p$. Получаем, что для любого $\alpha \geq \alpha_0$ окрестность Ox_α пересекается только с конечным числом „треугольников“ $T_{2k_0+i,k}$ (а именно, когда $k \in N \setminus A$). Полученное противоречие показывает, что существует множество $B_i \subset N \setminus \{1\}$, такое, что $|B_i| = \aleph_0$ и для любого $k \in B_i$, $|O \cap T_{2k_0+i,k}| \geq \aleph_0$, $i=1, 3$ (то же самое рассуждение показывает, что на самом деле здесь имеется строгое неравенство, но нам это не потребуется). Тогда для любого $k \in B_i$, $p_{2k_0+i,k} \in \overline{O} \subset \overline{W}'_{k_3} \subset W'_{k_3-1}$, $i=1, 3$.

Так как множество W'_{k_3-1} открыто, то любая из точек $p_{2k_0+i,k}$, $k \in B_i$, $i=1, 3$, содержится в множестве W'_{k_3-1} вместе с некоторой своей базисной окрестностью, т. е. из любого „треугольника“ $\tilde{T}_{2k_0+i,k}$, $k \in B_i$, $i=1, 3$, отбрасывается только конечное число точек. Очевидно, мощность множества ординат отброшенных точек не превосходит $\aleph_0$. Следовательно, множества L_{2k_0} и L_{2k_0+4} содержат $2^{\aleph_0}$ точек, принадлежащих замыканию множества W'_{k_3-1}, т. е. они входят в множество W'_{k_3-2}. Совершая таким же образом все k_3 шага, мы получим, что множество W' содержит точки, принадлежащие либо L_{2k_1}, либо L_{2k_2}, а это невозможно (так как $W' \subset (2k_1, 2k_2)$). Следовательно, случай б2) невозможен.

Доказательство для случая 2б) законечно.

в) Пусть $x = p_-$, т. е. $\mathscr{V} = \mathscr{V}_{p-}$.

Доказательство для этого случая вполне аналогично доказательству для случая 2б).

3. Пусть $\mathscr{V} \neq \mathscr{V}_x$ для любого $x \in X$. Пусть $U \in \mathscr{V}$. Покажем, что существует элемент V открытого фильтра $\mathscr{V}$, такой, что $\bar{V} \subset U$ и V — открыто-замкнутое множество, чем все будет доказано.

Так как $\mathscr{V} \neq \mathscr{V}_{p_-}$, $\mathscr{V} \neq \mathscr{V}_{p_+}$ и $\bigcap \mathscr{V} = \bigcap \bar{\mathscr{V}} = \emptyset$, то ясно, что существует ограниченный элемент U' открытого фильтра $\mathscr{V}$, т. е. существуют $k_1 \in \mathbf{Z}$ и $k_2 \in \mathbf{Z}$, такие, что $k_1 < k_2$ и

$$U' \subset (2k_1, 2k_2). \tag{6}$$

Пусть $k_0 = k_2 - k_1 + 2$. Существуют элементы $U_1, U_2, \ldots, U_{k_0}$ открытого фильтра $\mathscr{V}$, такие, что $U' \supset U' \cap U \supset \bar{U}_1 \supset U_1 \supset \bar{U}_2 \supset \cdots \supset U_{k_0-1} \supset \bar{U}_{k_0} \supset U_{k_0}$. Так как множество U' открыто в X и ограничено, то

$$U' = \bigcup \{\{x_\alpha\} : \alpha \in A_0,\ x_\alpha \in T_{n_\alpha, k_\alpha}\} \cup \bigcup \{Op_{n_{\alpha'}, k_{\alpha'}} : \alpha' \in A'_0\} \tag{7}$$

$$\bigcup \bigcup \{Ol_{\alpha''} : \alpha'' \in A''_0,\ l_{\alpha''} \in L_{2k_{\alpha''}}\};$$

$\cup \cup \{Ol_{\alpha''} : \alpha'' \in A''_0,\ l_{\alpha''} \in L_{2k_{\alpha''}}\}$; (при этом, если $A'_0 \neq \emptyset$ и $A''_0 \neq \emptyset$, то все дискретные точки $\{x_\alpha\}$ из множеств вида $Op_{n_{\alpha'}, k_{\alpha''}}$ или $Ol_{\alpha''}$ включены в первом слагаемом). Аналогично, при $i = 1, 2, \ldots, k_0$, получаем:

$$U_i = \bigcup \{\{x_\alpha\} : \alpha \in A_i,\ x_\alpha \in T_{n_\alpha, k_\alpha}\} \cup \bigcup \{Op_{n_{\alpha'}, k_{\alpha'}} : \alpha' \in A'_i\} \tag{8}$$

$$\cup \bigcup \{Ol_{\alpha''} : \alpha'' \in A''_i,\ l_{\alpha''} \in L_{2k_{\alpha''}}\}$$

(замечание относительно множества A_0 (к формуле (7)) относится и к множествам A_i, $i = 1, 2, \ldots, k_0$).

Допустим, что

(9) множество U не содержит открыто-замкнутых элементов открытого фильтра $\mathscr{V}$.

Тогда для i: $i = 0, 1, \ldots, n_0$ хотя бы одно из трех множеств A_i A'_i и A''_i бесконечно. Очевидно, что если некоторое из этих множеств конечно, то мы можем найти такой элемент открытого фильтра $\mathscr{V}$, что для, него соответствующее множество пусто. Пусть мы уже выбрали множества U' и U_i, $i = 1, \ldots, k_0$, так, что для $i = 0, 1, \ldots, k_0$ любое из множеств A_i' A'_i, A''_i пусто или бесконечно. Тогда возможны следующие случаи (отметим' что всегда множество A_i не пусто, где $i = 0, 1, \ldots, k_0$):

а) $|A_{k_0}| > \aleph_0$.

Так как множество „треугольников“ $\{T_{n,k}\}_{n,k}$ счетно, то существует „треугольник“ $T_{n_{k_0}, k_{k_0}}$, который содержит бесконечное число (даже несчетное) точек множества $\{x_\alpha : \alpha \in A_{k_0}\}$. Тогда $p_{n_{k_0}, k_{k_0}} \in \bar{U}_{k_0} \subset U_{k_0-1}$, т. е. $A'_{k_0-1} \neq \emptyset$. Следовательно, $|A'_{k_0-1}| = \aleph_0$ (отметим, что всегда $|A'_i| \leqq \aleph_0$, $i = 0, 1, \ldots, k_0$, так как множество точек $\{p_{n,k}\}_{n,k}$ счетно). Теперь, так как $|A'_{k_0-1}| = \aleph_0$, то, рассуждая как в доказательстве случая 2б2), мы получим, что $2^{\aleph_0}$ точек из $L_{n_{k_0} \pm 1}$ принадлежат множеству $\bar{U}_{k_0-1}$, т. е. они входят в U_{k_0-2}. Снова рассуждая как в доказательстве случая 2б2), получим, что счетное число точек вида $p_{n_{k_0} \pm 2}$ входит в $\bar{U}_{k_0-2}$, т. е. в U_{k_0-3} и т. д. В конце концов, через не более чем k_0 шагов, получим, что некоторые точки из L_{2k_1} или L_{2k_2} принадлежат множеству U', что невозможно (согласно (6)). Следовательно, случай 3а) никогда не имеет место. Кроме того, это доказательство показывает, что к тому же самому выводу приведет и любое из предположений: $|A'_{k_0}|=\aleph_0$ или $|A''_{k_0}|>\aleph_0$. Наконец, все сказанное до сих пор о множестве U_{k_0} остается в силе и для любого $\tilde{U}\in\mathscr{V}$, такого, что $\operatorname{cl}\tilde{U}\subset U_{k_0}$.

Итак, мы получили, что $A'_{k_0}=\emptyset$, $|A_{k_0}|=\aleph_0$, а множество A''_{k_0} пусто или счетно. Рассмотрим следующий случай:

б) $|A_{k_0}|=\aleph_0, A''_{k_0}=\emptyset$.

Пусть $W\in\mathscr{V}$ и $\bar{W}\subset U_{k_0}$. Так как $U_{k_0}=\cup\{\{x_\alpha\}: \alpha\in A_{k_0},\ \ x_\alpha\in T_{n_\alpha, k_\alpha}\}$, т. е. $A'_{k_0}=A''_{k_0}=\emptyset$, то $W=\cup\{\{x_\beta\}: \beta\in\tilde{A}_{k_0},\ x_\beta\in T_{n_\beta, k_\beta}\}$, где $\tilde{A}_{k_0}\subset A_{k_0}$. Так как $\bar{W}\subset U$, то согласно (9), $|\tilde{A}_{k_0}|\geqq\aleph_0$. Следовательно, $|\tilde{A}_{k_0}|=\aleph_0$. Если существует „треугольник" $T_{n, k}$, содержащий бесконечное число точек множества W, то мы получим, что $p_{n, k}\in\bar{W}$, т. е. $p_{n, k}\in U_{k_0}$ и, следовательно, $A'_{k_0}\neq\emptyset$. Полученное противоречие показывает, что для любого „треугольника" $T_{n, k}$ имеем: $|W\cap T_{n, k}|<\aleph_0$. Если существует вещественное число y_0, $0\leqq y_0<1/2$, являющееся ординатой бесконечного числа точек множества W, то мы получим, что $A''_{k_0}\neq\emptyset$. Следовательно, для любого y, $0\leqq y<1/2$, имеется только конечное число точек множества W с ординатой, равной y. Наконец, так как U' ограничено, то $p_+\notin\bar{W}$ и $p_-\notin\bar{W}$. Следовательно, $W=\bar{W}$, т. е. множество W открыто-замкнуто, что невозможно (см. (9)).

в) Пусть теперь $|A_{k_0}|=\aleph_0$, $|A''_{k_0}|=\aleph_0$.

Так как множество U_{k_0} ограничено, то оно пересекается только с конечным числом множеств вида L_{2n}. Тогда, так как $|A''_{k_0}|=\aleph_0$, существует $n\in\mathbf{Z}$, такое, что

$$|U_{k_0}\cap L_{2n}|=\aleph_0. \tag{10}$$

Рассмотрим все целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_s$, для которых выполняется равенство (10). Очевидно, $2k_1<2n_i<2k_2$, $i=1, \ldots, s$. Если для любого i, где $i=1, \ldots, s$, существует $W_i\in\mathscr{V}$, такой, что $W_i\cap L_{2n_i}=\emptyset$, то полагая $W=\cap_{i=1}^{s}W_i\cap W_{s+1}\cap U_{k_0}$, где $W_{s+1}\in\mathscr{V}$ и W_{s+1} не пересекается со всеми L_{2n}, для которых $|U_{k_0}\cap L_{2n}|<\aleph_0$, мы получим, что $W\in\mathscr{V}$. Если $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$ и $\tilde{A}''$ — соответствующие множества индексов в представлении (7) множества W, то $\tilde{A}'=\tilde{A}''=\emptyset$, а $|\tilde{A}|=\aleph_0$. Так как $W\subset U_{k_0}$, то рассуждая как в доказательстве для случая 3б), мы придем к противоречию. Следовательно, существует i_0, где $1\leqq i_0\leqq s$, такой, что для любого $W\in\mathscr{V}$ выполнено: $W\cap L_{2n_{i_0}}\neq\emptyset$. Обозначая $n_{i_0}=p$, мы получим:

(11) для любого $W\in\mathscr{V}$, $|W\cap L_{2p}|\geqq\aleph_0$.

Кроме того, $|U_{k_0}\cap L_{2p}|=\aleph_0$. Теперь, исходя из множества $U_{k_0}\cap L_{2p}$, мы построим, как и в доказательстве для случая 2б1), открыто-замкнутое множество O. Тогда, из-за (11), для любого $W\in\mathscr{V}$, $W\cap O\neq\emptyset$, т. е. мы получим, что $O\in\mathscr{V}$. Но тогда, так как $O\cap U\in\mathscr{V}$ и O удовлетворяет (5), множество $O\cap U$ открыто-замкнуто, что противоречит условию (9).

Итак, мы получили, что предположение (9) не имеет место, т. е. найдется открыто-замкнутый элемент V открытого филтра $\mathscr{V}$, такой, что $\bar{V}\subset U$. Тем самым, все доказано.

3.2. Пример R-замкнутого расширения, не являющегося α-расширением.

Рассмотрим подпространство $Y=S\cup T$ пространства X из примера 3.1. Очевидно, множество Y всюду плотно в пространстве X. Кроме того, так как для любого нечетного n и для любого $k\geqq 2$, $k\in N$, подпространство $\tilde{T}_{n,k}=T_{n,k}\cup\{p_{n,k}\}$ пространства X бикомпактно и, следовательно, пространство Y σ-бикомпактно, то регулярность пространства X влечет нормальность пространства Y. Теперь, из теоремы П. С. Александрова (см. 1.2 г) следует, что пространство αY эквивалентно пространству βY и, следовательно (согласно 2.14), все α-расширения пространства Y бикомпактны. С другой стороны, так как Y всюду плотно в пространстве X, то пространство αX является регулярным расширением и пространства Y. Но пространство $rY=\alpha X$ R-замкнуто и не бикомпактно. Следовательно, оно и является искомым примером R-замкнутого расширения (пространства Y), не являющегося α-расширением (пространства Y).

3.3. Предложение. *Если пространство X регулярно и экстремально несвязно, то расширения $(\alpha X, \varphi_\alpha)$ и $(\beta X, \beta)$ эквивалентны.*

Доказательство. Так как замыкание всякого множества пространства X открыто, то любой регулярный конец в X является вполне регулярным концом в X (об определении вполне регулярного конца см. [1]) и, следовательно, $\alpha X\equiv\alpha' X$ (об $\alpha' X$ см. [1]). Но, как показано в [1], расширения $(\alpha' X, \varphi_\alpha)$ и $(\beta X, \beta)$ эквивалентны. Тем самым все доказано.

3.4. Следствие. *Существует вполне регулярное не нормальное пространство X, для которого расширения $(\alpha X, \varphi_\alpha)$ и $(\beta X, \beta)$ эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, ввиду 3.3, что любое регулярное экстремально несвязное не нормальное пространство, будет являтся примером пространства X, для которого расширения $(\alpha X, \varphi_\alpha)$ и $(\beta X, \beta)$ эквивалентны. А такие пространства существуют (напр., пространство X из примера 3.6.19 книги Енгелькинга [8]),

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. О бикомпактных расширениях топологических пространств. *Мат. сб.*, **5**, 1939, 403—423.
2. П. С. Александров, П. С. Урысон. Мемуар о компактных топологических пространствах. Москва, 1971.
3. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва, 1974.
4. Д. Б. Дойчинов. Регулярные расширения топологических пространств. *Успехи мат. наук*, **35**, 1980, 178—179.
5. Ив. Р. Проданов. Разширение на топологичните пространства. *Научни трудове на ПИ Пловдив*, **3**, 1965, 17—25.
6. A. N. Tichonoff. Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Math. Ann*,. **102**, 1930, 544—561.
7. B. Banaschewski. Über zwei Extremaleigenschaften topologischer Räume. *Math. Nachr.*, **13**, 1955, 141—150.
8. R. Eengelking. General Topology. Warszawa, 1977.
9. H. Herrlich. T_v-Abgeschlossenheit and T_v-Minimalität, *Math. Z.*, **88**, 1965, 285—294.
10. J. Thomas. A regular space, not completely regular. *Amer. Math. Monthly*, **76**, 1969, 181—182.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 6. 1980