Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ÜBER GANZE CHARAKTERISTISCHE FUNKTIONEN MIT VORGEGEBENEM WACHSTUM

MONIKA DEWESS

Es wird ein Verfahren angegeben, um Verteilungsfunktionen zu konstruieren, deren charakteristische Funktionen ganz sind und eine vorgegebene Ordnung ρ und untere Ordnung ρ^* besitzen, $1\leq\rho^*\leq\rho\leq\infty$. Ferner werden Verteilungsfunktionen konstruiert, die bzgl. einer verfeinerten Ordnung von vorgegebenem Typ und unterem Typ sind.

1. Einführung. Sei $F(x)$ eine Verteilungsfunktion (Vf.) und $f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF(x)$, $z=t+iy$, $y=0$, ihre charakteristische Funktion (ch. F.). Wenn die ch. F. f eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe z-Ebene zu einer ganzen Funktion gestattet, dann heißt sie ganze ch. F. (g. ch. F.).

Das Wachstum einer ganzen Funktion $f(z)$ wird mittels der Funktion $M(r=\max_{|z|=r}|f(z)|$ für $r\to\infty$ beschrieben.

Eine ganze Funktion $f(z)$ hat die Ordnung ρ, wenn gilt $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$. Sie besitzt die untere Ordnung ρ^*, wenn gilt $\rho^*=\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$. Typ δ und unterer Typ σ^* einer ganzen Funktion $f(z)$ der Ordnung ρ werden definiert als $\sigma=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$, $\sigma^*=\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$.

In [8] wurde der Begriff der verfeinerten Ordnung eingeführt. Er wurde in [7] zur Untersuchung von ch. F. herangezogen. Eine nichtnegative Funktion $\rho(r)$, die auf $(0,\infty)$ definiert ist und für hinreichend große r stetig differenzierbar ist, heißt verfeinerte Ordnung, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $0<\rho<\infty$, $\lim\limits_{r\to\infty}r\,.\,\rho'(r)\,.\ln r=0$.

Eine ganze Funktion f besitzt die verfeinerte Ordnung $\rho(r)$, wenn gilt $\delta=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho(r)}}$. $0<\delta<\infty$. δ ist der Typ von f bzgl. der verfeinerten Ordnung $\rho(r)$. Der untere Typ von f bzgl. $\rho(r)$ ist definiert als $\delta^*=\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho(r)}}$.

Wir wollen nun im Abschnitt 3a) Vf. konstruieren, deren g. ch. F. eine vorgegebene Ordnung ρ und untere Ordnung ρ^* haben, $1\leq\rho^*\leq\rho\leq\infty$. Im Abschnitt 3b) werden Vf. gebildet, deren g. ch. F. der Ordnung $\rho>1$ einen vorgegebenen Typ σ und unteren Typ σ^* besitzen, $0\leq\sigma^*\leq\sigma\leq\infty$. Es sei eine verfeinerte Ordnung $\varrho(r)\to\rho$ für $r\to\infty$, $1<\rho<\infty$, gegeben. Im Abschnitt 3c) werden entsprechend Verteilungsfunktionen angegeben, die eine g. ch. F. haben und bzgl.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 8, 1982, p. 307—312.

dieser verfeinerten Ordnung von gegebenem oberen bzw. unterem Typ sind. Für diese Konstruktionen benötigen wir zwei Sätze aus [4].

2. Bekannte Zusammenhänge zwischen dem asymptotischen Verhalten einer Verteilungsfunktion und dem Wachstum der zugehörigen ganzen charakteristischen Funktion. Es sei $T(x)=1-F(x)+F(-x)$, wobei F eine Vf. ist. Wir betrachten nur solche Vf., für die $T(x)>0$ für alle $x>0$ gilt.

Das asymptotische Verhalten von F beschreiben wir mittels $\tau(x)=\frac{-\ln T(x)}{x}$. (Eine Vf. F besitzt genau dann eine g. ch. F., wenn $\lim_{x\to\infty}\tau(x)=\infty$ gilt.)

Um das Wachstum der zugehörigen g. ch. F. f zu untersuchen, ist es günstig, die Funktion $\mu(r)=\frac{\ln M(r)}{r}$ einzuführen.

Es wird nun das Verhalten von $\tau(x)$ für $x\to\infty$ mit dem von $\mu(r)$ für $r\to\infty$ verglichen. Dazu dienen monoton wachsende Funktionen von dominierter Variation als wichtiges Hilfsmittel. Diese Funktionen wurden in [5] eingeführt.

Die Klasse D der monoton wachsenden Funktionen von dominierter Variation enthält alle wachsenden Funktionen $A:(0,\infty)\to(0,\infty)$, für die Konstanten a, $0\leqq a<\infty$, und A_0, $1\leqq A_0<\infty$, existieren, so daß für beliebige $k\geqq 1$ gilt:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, A(kx)/A(x)\leqq A_0\cdot k^a. \tag{2.1}$$

Wir betrachten nun folgende Unterklasse.

Die Menge der Funktionen $V^-(a\,|\,A_0)$ enthält alle unbeschränkten Funktionen $A\in D$, für die (2.1) gilt. Zur Menge der Funktionen $V^\pm(a|A_0)$ gehören alle Funktionen $A\in V^-(a\,|\,A_0)$, für die außerdem für beliebige $k\geqq 1$ noch gilt

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, A(kx)/A(x)\geqq k^a/A_0. \tag{2.2}$$

Funktionen aus der Klasse $V^\pm(a|1)$ sind Funktionen von regulärer Variation mit dem Regularitätsexponenten a. (Beispiele: $x^{2+\sin(\ln_3 x)}\in V^-(3|1)$, $x^3\in V^\pm(3|1)$, $\ln x\in V^\pm(0|1)$, $e^{[\ln_2 x]}\in V^-(0|e)$, wobei $[y]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als y ist, bezeichnet.)

In [4] werden Zusammenhänge zwischen dem asymptotischen Verhalten der Funktionen $B(\tau(x))/A(x)$ $(x\to\infty)$ und $A(\mu(r))/B(r)$ $(r\to\infty)$ hergeleitet.

Satz 2.1. *Sei F eine Vf. und $\gamma\in[0,\infty]$, $A\in V^-(a/1)$ sowie $B\in V^-(b|1)$. Falls $ab>0$ und $\gamma\in(0,\infty)$ ist, so sei $B\in V^\pm(b|1)$; falls $\gamma=\infty$ ist, werde vorausgesetzt, daß F eine g. ch. F. hat.*

Es gilt $\underline{\lim}_{x\to\infty} B(\tau(x))/A(x)\varnothing=1/\gamma$ genau dann, wenn F eine g. ch. F. hat, die der Bedingung $\overline{\lim}_{r\to\infty} A(\mu(r))/B(r)=\gamma\, a^a b^b/(a+b)^{a+b}$ genügt ($a^a b^b/(a+b)^{a+b}=1$, wenn $ab=0$).

Satz 2.2. *F sei eine Vf., für die $-\ln T(x)$ streng konvex ist und die eine g. ch. F. hat. Es sei $\gamma\in[0,\infty]$, $A\in V^-(a|1)$ und $B\in V^-(b\,|1)$. Falls $ab>0$ und $\gamma\in(0,\infty)$ ist, so sei $B\in V^\pm(b|1)$.*

Es gilt $\overline{\lim}_{x\to\infty}\, B(\tau(x))/A(x)=1/\gamma$ genau dann, wenn $\underline{\lim}_{r\to\infty}\, A(\mu(r))/B(r)$ $=\gamma a^a b^b/(a+b)^{a+b}$ ist.

Ähnliche Sätze sind auch in [1] und [2] bewiesen worden.

3. Konstruktion von Verteilungsfunktionen, deren charakteristische Funktionen ganz sind und ein vorgegebenes Wachstum haben. Wir wollen eine Vf. F. konstruieren, für die $-\ln T(x)$ streng konvex ist und für gegebene Funktionen $A \in V^{-}(a|1)$, $B \in V^{-}(b|1)$ und Zahlen $c_1 \geqq c_2$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, A(\mu(r))/B(r) = c_1, \quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, A(\mu)(r))/B(r) = c_2$$

gilt. Gemäß der Sätze 1.1 und 1.2 werden wir eine Vf. F angeben, für die

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, \frac{B(\tau(x))}{A(x)} = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}\, \frac{1}{c_1} = : d_1, \tag{3.1}$$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, \frac{B(\tau(x))}{A(x)} = \frac{a^a b^b}{(a+)^{a+b}}\, \frac{1}{c_2} = : d_2 \tag{3.2}$$

gilt.

$h_i : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$, seien zwei Funktionen, für die die Funktionen $g_i(x) = x h_i(x)$, $i = 1, 2$, monoton wachsend und konvex sind. Außerdem gelte

$$\lim_{x\to\infty} B(h_i(x))/A(x) = d_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

$$h_1(x) \leqq h_2(x). \tag{3.4}$$

Wir zeigen nun, daß eine monoton wachsende und streng konvexe Funktion g mit den Eigenschaften

$$g_1(x) \leqq g(x) \leqq g_2(x) \tag{3.5}$$

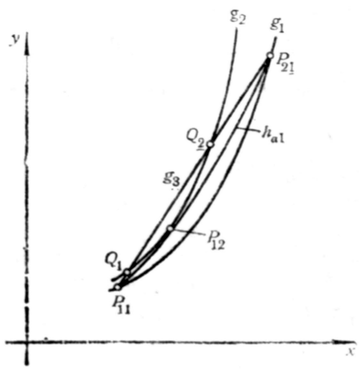
und

$$g(x_{ni}) = g_i(x_{ni}) \tag{3.6}$$

für eine Folge $\{x_{ni}\}$, $x_{ni} \to \infty (n \to \infty)$, $i = 1, 2$, existiert. Offensichtlich gibt es eine Gerade $y = \alpha x + \beta = g_3(x)$, auf der irgendein Punkt $P_{11} = (x_{11}, g_1(x_{11}))$ des Graphen von $y = g_1(x)$ liegt und die den Graphen von $y = g_2(x)$ in den Punkten $Q_1 \neq Q_2$ schneidet sowie den Graphen von $y = g_1(x)$ in einem Punkt $P_{21} = (x_{21}, g_1(x_{21}))$. Die Menge M_1 von Funktionen

$$M_1 : = \{h_\alpha | h_\alpha = \alpha g_1 + (1-\alpha) g_3, \quad \alpha \in [0, 1], \ h_\alpha \leqq g_2 \text{ für } [x_{11}, x_{21}]\}$$

ist nicht leer. Deshalb ist die Funktion $h_{\alpha 1}$ mit $\alpha_1 = \inf \{\alpha | h_\alpha \in M_1\}$ monoton wachsend und streng konvex in $[x_{11}, x_{21}]$, und auf dem Graphen von $y = g_2(x)$ befindet sich ein Punkt $P_{12} = (x_{12}, g_2(x_{12}))$, so daß $h_{\alpha 1}(x_{12}) = g_2(x_{12})$ gilt. Indem wir die obige Konstruktion mit P_{21} als Anfangspunkt wiederholen, konstrueren wir eine Funktion $h_{\alpha 2}$ im Intervall $[x_{21}, x_{31}]$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $\{x_{ni}\}$, für $n \to \infty$, $x_{ni} \to \infty$, $i = 1, 2$, und eine Folge von Funktionen $\{h_{\alpha j}\}_{j \geqq 1}$, die auf $[x_{j1}, x_{j+1,1}]$ definiert sind und für die $h_{\alpha j}(x_{ji}) = g_i(x_{ji})$, $i = 1, 2$, gilt. Die gesuchte Funktion g definieren wir mittels $g(x) = h_{\alpha j}(x)$ für $x \in [x_{j1}, x_{j+1,1}]$. (Zwischen 0 and x_{11} ergänzen wir g auf beliebige Weise zu einer für alle $x \geqq 0$ nichtnegativen, monoton wachsenden und streng konvexen Funktion.)



Setzen wir

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ 1 - \exp(-g(x)) & x > 0\,, \end{cases}$$

so sehen wir, daß F eine Vf. ist, für die $-\ln T(x)$ streng konvex ist. Gemäß (3.3), (3.5) und (3.6) erhalten wir (3.1) und (3.2).

Im folgenden wenden wir die dargelegte Methode für spezielle Funktionen A and B an.

3.1. Ordnung und untere Ordnung vorgegeben. Wir setzen $A(x):=\ln x$, $B(x):=\ln x$, $A, B \in V^{\pm}(0|1)$, um Beispiele für Vf. zu erhalten, deren g. ch. F. die gegebene Ordnung ρ und die untere Ordnung ρ^* besitzt. Wie man die Konstanten d_i und die Funktionen g_i, $i=1, 2$, auswählt, ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

Tabelle 1

d_1	d_2	g_1	g_2	ρ^*	ρ	
$(\rho-1)^{-1}$	$(\rho^*-1)^{-1}$	$\rho/x^{(\rho-1)}$	$\rho^*/x^{(\rho^*-1)}$	ρ^*	ρ	$1<\rho^*\leqq\rho<\infty$
$(\rho-1)^{-1}$	∞	$\rho/x^{(\rho-1)}$	e^x	1	ρ	$1=\rho^*<\rho<\infty$
∞	∞	e^x	e^x	1	1	$\rho^*=\rho=1$
0	$(\rho^*-1)^{-1}$	$x\ln x$	$\rho^*/x^{(\rho^*-1)}$	ρ^*	∞	$1<\rho^*<\rho=\infty$
0	∞	$x\ln x$	e^x	1	∞	$1=\rho^*<\rho=\infty$
0	0	$x\ln x$	$x\ln x$	∞	∞	$\rho^*=\rho=\infty$

Ein anderes Verfahren zur Konstruktion von Vf. so daß die zugehörige c F. ganz ist und eine vorgegebene Ordnung sowie untere Ordnung hat, finden wir in [2].

3.2. Typ und unterer Typ vorgegeben. Mittels der angegebenen Methode konstruieren wir jetzt Vf., die eine g. ch. F. der Ordnung $\rho(\rho>1)$, des Typs σ und des unteren Typs σ^* besitzen. Wir setzen jetzt $A(x):x^{1/(\rho-1)}$, $B(x):=x$, $A\in V^{\pm}(\rho-1)^{-1}|1)$, $B\in V^{\pm}(1|1)$.

Tabelle 2

d_1	d_2	g_1	g_2	σ^*	σ	
$\dfrac{\rho-1}{(\sigma\,.\,\rho\rho)^{1/(\rho-1)}}$	$\dfrac{\rho-1}{(\sigma^*\,.\,\rho\rho)^{1/(\rho-1)}}$	$d_1\,.\,x^{\rho/(\rho-1)}$	$d_2\,.\,x^{\rho/(\rho-1)}$	σ^*	σ	$0<\sigma^*\leqq\sigma<\infty$
$\dfrac{\rho-1}{(\sigma\,.\,\rho\rho)^{1/(\rho-1)}}$	∞	$d_1\,.\,x^{\rho/(\rho-1)}$	$x^{\rho/(\rho-1)}\ln x$	0	σ	$0=\sigma^*<\sigma<\infty$
∞	∞	$x^{\rho/(\rho-1)}\ln x$	$x^{\rho/(\rho-1)}\ln x$	0	0	$\sigma^*=\sigma=0$
0	$\dfrac{\rho-1}{(\sigma^*\,.\,\rho\rho)^{1/(\rho-1)}}$	$x^{\rho/(\rho-1)}/\ln x$	$d_2\,.\,x^{\rho/(\rho-1)}$	σ^*	∞	$0<\sigma^*<\sigma=\infty$
0	∞	$x^{\rho/(\rho-1)}/\ln x$	$x^{\rho/(\rho-1)}\ln x$	0	∞	$0=\sigma^*<\sigma=\infty$
0	0	$x^{\rho/(\rho-1)}/\ln x$	$x^{\rho/(\rho-1)}/\ln x$	∞	∞	$\sigma^*=\sigma=\infty$

3.3. Verfeinerte Ordnung vorgegeben. Wir konstruieren jetzt Vf., die eine g. ch. F. vom Typ δ und vom unteren Typ δ^* bzgl. einer verfeinerten Ordnung $\rho(r)+1$ besitzen. Wir setzen dabei $A(x):=x^{\bar\rho(x)}$ und $B(x):=x$, wobei $\bar\rho$ eine in Lemma 3.3 definierte verfeinerte Ordnung ist, $A\in V^{\pm}(1/\rho|1)$.

Tabelle 3

d_1	d_2	g_1	g_2	
$\dfrac{\rho}{(\delta\,.\,(1+\rho)^{1+\rho})^{1/\rho}}$	$\dfrac{\rho}{(\delta^*\,.\,(1+\rho)^{1+\rho})^{1/\rho}}$	$d_1\,.\,x^{1+\bar\rho(x)}$	$d_2\,.\,x^{1+\bar\rho(x)}$	$0<\delta^*\leqq\delta<\infty$
$\dfrac{\rho}{(\delta\,.\,(1+\rho)^{1+\rho})^{1/\rho}}$	∞	$d_1\,.\,x^{1+\bar\rho(x)}$	$x^{1+\bar\rho(x)}\,.\ln x$	$0=\delta^*<\delta<\infty$

Wir benötigen folgenden Satz auf [6], der auf Karamata 1933 zurückgeht.

Satz 3.1. a) *Eine in jedem beliebigen endlichen Intervall integrierbare Funktion von regulärer Variation A mit dem Regularitätsexponenten* ρ *gestattet folgende kanonische Darstellung*

$$A(x):=c(x)\,.\,\exp\Big(\int_1^x\frac{a(t)}{t}\,dt\Big). \tag{3.7}$$

wobei

$$\lim_{x\to\infty}c(x)=c_0,\quad 0<c_0<\infty, \tag{3.8}$$

$$\lim_{x\to\infty}a(x)=\rho. \tag{3.9}$$

b) *Eine Funktion der Gestalt* (3.7), *wobei c und a* (3.8) *und* (3.9) *denügen* $0\leqq\rho<\infty$, *ist von regulärer Variation.*

Lemma 3.1. *Sei* $A\in V^{\pm}(\rho|1)$. *Dann existiert eine für hinreichend große x differenzierbare Funktion* ρ, *sodaß*
$\lim\limits_{x\to\infty}\rho(x)=\rho$, $\lim\limits_{x\to\infty}x.\rho'(x).\ln x=0$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty}A(x)/x^{\rho(x)}=1$
gilt, d. h. A ist asymptotisch gleich $x^{\rho(x)}$.

Beweis. Gemäß Satz 3.1 gestattet die Funktion A die Darstellung (3.7). Indem wir die Folgerung 1.2.1 aus [6] benutzen, schließen wir, daß die Funktion,

$$\rho(x)=\{\ln c_0+\int_1^x\frac{a(t)}{t}\,dt\}/\ln x$$

alle geforderten Eigenschaften besitzt.

Im Falle $A\in V^{\pm}(\rho\,|\,1)$, $0<\rho<\infty$, ist die so gebildete Funktion ρ eine verfeinerte Ordnung.

Lemma 3.2. *Eine Funktion* $A\in V^{\pm}(\rho|1)$, $1<\rho<\infty$, *ist asymptotisch gleich einer monoton wachsenden streng konvexen Funktion* $A^*\in V^{\pm}(\rho|1)$.

Beweis. Gemäß Lemma 3.1 ist die Funktion A asymptotisch gleich einer Funktion $\mathbf{P}(x):=x^{\rho(x)}$, wobei $\rho(x)\to\rho$ für $x\to\infty$ eine verfeinerte Ordnung ist. Die Ableitung $\mathbf{P}'(x)=x^{\rho(x)-1}(\rho(x)+x\rho'(x)\,\ln x)$ gehört zur Menge $V^{\pm}(\rho-1|1)$ und ist deshalb asymptotisch gleich einer Funktion $\mathbf{P}^*(x)=x^{\rho^*(x)}$, wobei $\rho^*(x)\to\rho-1$ eine verfeinerte Ordnung ist. Folglich gilt für hinreichend große $x\geqq x_0$ $\mathbf{P}^*(x)>0$. Wir definieren

$$A^*(x) = \int_x^{\max(x,x_0)} \mathbf{P}^*(u)du.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $A^* \in V^{\pm}(\rho|1)$ monoton wachsend und streng konvex ist.

Lemma 3.3. *Sei $\rho(x)$ eine verfeinerte Ordnung und $x=\varphi(r)$ die Umkehrfunktion zu $r=x^{\rho(x)}$. Dann ist $\bar{\rho}(r)=1/\rho(\varphi(r))$ ebenfalls eine verfeinerte Ordnung (siehe* [7]).

LITERATUR

1. Н. И. Яковлева. О росте целых характеристических функций вероятностных законов. *Теор. функций, функц. анализ и их приложен.*, **15**, 1972, 43—49.
2. Н. И. Яковлева. О росте целых характеристических функций вероятностных законов. В: *Вопросы матем. физики и функц. анализа*, Киев, 1976, 43—54.
3. M. Dewess. Asymptotisches Verhalten von Verteilungsfunktionen und Wachstum der zugehörigen ganzen charakteristischen Funktionen. Diss., Karl-Marx-Univ. Leipzig, 1978.
4. M. Dewess. The tail behaviour of a distribution function and its connection to the growth of its entire characteristic function. *Math. Nachr.*, **81**, 1978, 217—231.
5. W. Feller. On regular variation and local limit theorems. In: *Proc. 5th Berkeley Sympos. math. Statist. Probab. Univ. Calif.* **1965**/1966, vol. II, 373—388.
6. L. de Haan. On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes. Amsterdam, 1970.
7. H.-J. Rossberg. Der Zusammenhang zwischen einer ganzen charakteristischen Funktion einer verfeinerten Ordnung und ihrer Verteilungsfunktion. *Czech. Math. J.*, **17** (92), 1967, 317—334.
8. G. Valiron. Lectures on the General Theory of integral Functions. Toulouse, 1923.

Karl-Marx-Universität
7010 Leipzig DDR

Eingegangen am 1. 9. 1980