Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ, I

ГЕОРГИ К. ГЕНОВ, ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

Указан независимый базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над любым конечным полем.

В работе [1] Е. Н. Кузьмин и Ю. Н. Мальцев указали базис тождеств алгебры матриц второго порядка над любым конечным полем. Для алгебры матриц третьего порядка над конечным полем базис тождеств был получен К. К. Геновым в работе [2]. Настоящая статья является естественным продолжением статьи [2]. Все необходимые понятия и результаты о конечных алгебрах, которые используются здесь, можно найти в [3; 8; 2; 4].

Далее через K будем обозначать конечное поле характеристики p, содержащее q элементов, т. е. $K=GF(q)$. В работе мы рассматриваем только ассоциативные K-алгебры. Основная наша цель — указать независимую систему тождеств, которая является базисом тождеств алгебры $M_4(K)$ матриц порядка 4 над полем K. Многообразие $\mathfrak{M}_4=\mathrm{Var}(M_4(K))$, порожденное алгеброй $M_4(F)$, — локально конечно, а его нильпотентные алгебры удовлетворяют тождеству $x_1x_2x_3x_4=0$ (см. [4]). Поэтому в первой части работы мы изучаем критические K-алгебры, нильпотентные подалгебры которых имеют ступень нильпотентности, не превышающую 4. Мы указываем 84 серии конечных монолитических алгебр, среди которых содержатся все вопросные критические алгебры. Строение алгебр первых серий полностью описано, но алгебры следующих серий описываются все менее подробно, так как для основной цели достаточно заметить, что новополученная алгебра имеет факторы, изоморфные некоторым алгебрам из предшествующих серий.

Во второй части работы мы строим независимую систему из пятнадцати тождеств алгебры $M_4(K)$ и, используя результаты первой части, проверяем, что эта система является базисом тождеств алгебры $M_4(K)$.

1. В настоящем параграфе мы будем интересоваться критическими алгебрами, нильпотентные подалгебры которых удовлетворяют тождеству $x_1x_2x_3x_4=0$. Если F — поле, то подалгебра строго треугольных матриц полной матричной алгебры $M_n(F)$ является нильпотентной ступени n алгеброй. С другой стороны, каждая нильпотентная подалгебра алгебры $M_n(F)$ имеет ступень нильпотентности, не выше n и, следовательно, простые критические алгебры над конечным полем K, удовлетворяющие поставленному условию, исчерпываются матричными алгебрами $M_n(F)$, $n=1, 2, 3, 4$, где F — конечное расширение поля K.

Лемма 1.1. [2, лемма 2.1]. *Пусть A — конечная монолитическая алгебра с монолитом M, с ненулевым радикалом R и с полупростой ком-*

понентой B. Тогда монолит M совпадает с двусторонним аннулятором радикала R в R и если $BM+MB\neq(0)$, то M является неприводимым (B, B)-модулем.

Следствие 1.2. [2, Следствие 2.2]. *В условиях предшествующей леммы, если $R^n=(0)$, но $R^{n-1}\neq(0)$, то $M=R^{n-1}$.*

Мы будем использовать следующий критерий некритичности кольца, указанный В. Н. Латышевым в [5]:

Теорема 1.3. *Пусть аддитивная группа конечного ассоциативного кольца A распадается в сумму аддитивных групп его подколец A_i ($i=1, 2, \ldots, k$), причем для всякого неупорядоченного набора $\lambda\subseteq\langle 1, 2, \ldots, k\rangle$ выполняется одно из следующих двух условий:*

(1) *подкольца A_i, $i\in\lambda$ не порождают кольца A,*

(2) *справедливы равенства $A_{i_1}A^*A_{i_2}A^*\ldots A^*A_{i_p}=(0)$, где $\lambda=\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $A^*=A+\{1\}$.*

Тогда A не является критическим.

Часть первая. Здесь мы будем рассматривать конечные алгебры, для радикала R которых выполняется условие $R\neq(0)$, но $R^2=(0)$. В работе [2] содержится классификация критических алгебр с этим условием, и поэтому мы приводим ее без доказательств.

Пусть $A=B+R$ — критическая алгебра, где B — полупростая компонента алгебры A, а R — ее радикал и $R\neq(0)$, но $R^2=0$.

1. $A=R$, т. е. A — нильпотентна. Тогда A — одномерное линейное пространство над K с нулевым умножением.

2. $A=B+R$, $B\neq(0)$ — простая алгебра.

2.1. $BR=R$, $RB=(0)$. Этим условиям удовлетворяет серия алгебр $A_1(m, n)$, m и n — натуральные числа, которые имеют следующее представление матрицами порядка $n+1$:

$$A_1(m, n)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid a\in M_n(K_m),\quad b\in M_{n\times 1}(K_m)\right\},$$

где $K_m=GF(q^m)$, а $M_{n\times 1}(K_m)$ — матрицы над K типа $n\times 1$.

2.2. $BR=(0)$, $RB=R$. Получается серия алгебр $A_2(m, n)$, антиизоморфных соответствуюшим алгебрам из предшествующей серии.

2.3. $BR=R$, $RB=R$. Получается серия алгебр $A_3(m, n, \sigma)$, где m, n — натуральные числа, а σ — автоморфизм поля $K_m=GF(q^m)$ над K, т. е. σ содержится в группе Галуа $G(K_m/K)$. Эти алгебры имеют представление матрицами порядка $2n$:

$$A_3(m, n, \sigma)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a^\sigma\end{pmatrix} \mid a,\ b\in M_n(K_m)\right\},$$

где a^σ — образ матрицы a при автоморфизме алгебры $M_n(K_m)$, индуцированном автоморфизом $\sigma\in G(K_m/K)$.

3. $A=B+R$, $B=B_1\oplus B_2$, $B_1R=R$, $RB_2=R$; B_1, B_2 — простые алгебры. Получается серия алгебр $A_4(m, n, k, l)$. Эти алгебры имеют представление матрицами порядка $n+l$:

$$A_4(m, n, k, l)=\left\{\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\right.,$$

где $a \in M_n(K_m)$, $b \in M_l(K_k)$, $c \in M_{n\times l}(K_{[m,\,k]})$, $K_{[m,\,k]} = K_m \cup K_k$ — композит полей K_m и K_k.

Часть вторая. Здесь мы будем рассматривать критические алгебры, для радикала R которых выполняется условие $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$.

Лемма 1.4. [2, лемма 2.5]. *Пусть A — критическая ненильпотентная алгебра с полупростой компонентой $B \neq (0)$ и радикалом R. Если $R^2 \neq (0)$, но $R^3 = (0)$, то R разлагается в прямую сумму двух или трех минимальных (B, B)-модулей, один из которых есть монолит $M = R^2$.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 2.7 из [2].

Лемма 2. 5. *Пусть A — ненильпотентная критическая алгебра с радикалом R и $R^2 = (0)$, но $R^3 \neq (0)$. Тогда полупростая компонента алгебры A разлагается в прямую сумму не более трех простых компонент.*

При помощи предшествующих утверждений легко получается следующий список критических алгебр $A = B + R$, в нильпотентных подалгебрах которых выполняется тождество $x_1x_2x_3x_4 = 0$ и для радикала R которых выполняется условие $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$ (мы продолжаем нумерацию списка из первой части):

4. A — нильпотентна. Тогда ступень нильпотентности A не более трех. Точное описание этих алгебр не будет нужным для доказательства основного результата.

5. $A = B + R$, $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$, $B^3 \neq (0)$, $R = M + N$ — прямая сумма двух минимальных (B, B)-модулей, $R^2 = M$ — монолит алгебры A. Тогда $M = R^2 = N^2$. Если $BN = NB = (0)$, то и $BM = MB = = (0)$ и B был бы двусторонним идеалом, не содержащим M, что невозможно. Следовательно, $BN \neq (0)$ или $NB \neq (0)$. Пусть, например, $BN \neq (0)$. Тогда и $NB \neq (0)$ (иначе $M = N^2 = BNBN = (0)$). В этом случае B — простая алгебра. Действительно, если $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_{k+1}$ — прямое разложение полупростой алгебры B и $k > 0$, то пусть, например, $B_1N \neq (0)$. Тогда и $NB_1 \neq (0)$. Так как $M = N^2$, то $B_1N = N = NB_1$, $B_1M = M = MB_1$, т. е. $B_1R = RB_1 = R \neq (0)$. Но в этом случае $B_2 \oplus \cdots \oplus B_{k+1}$ — двусторонний идеал A, не содержаший M, что невозможно. Итак, $B = M_n(K_m)$. Мы покажем, что $n = 1$, то есть B — поле. Допустим, что $n > 1$. Левый аннулятор идеала M в B является двусторонним идеалом в B и так как $BM = M \neq (0)$, то он — нулевой идеал. Тогда $e_{12}M \neq (0)$ и $Be_{12}M = M$. Аналогично получается, что $Me_{12} = Be_{12}Me_{12} \neq (0)$. Следовательно, $e_{12}Me_{12} = e_{12}R^2e_{12} \neq (0)$. Тогда алгебра D, порожденная e_{12} и R, нильпотентна (потому что R и D/R — нильпотентны) ступени нильпотентности выше 4. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. В этом случае получается серия алгебр, которые имеют следующее представление матрицами порядка 3:

$$A_5(m, \sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha^{\sigma} & \beta^{\sigma} \\ 0 & 0 & \alpha^{\sigma^2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha,\ \beta,\ \gamma \in K_m \right\},$$

где $m \geq 1$, а $\sigma \in G(K_m/K)$.

6. $A = B + R$, $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$, $B \neq (0)$, $R = M + N_1 + N_2$ — прямая сумма трех минимальных (B, B)-модулей, где $M = R^2$ — монолит алгебры A. Мы можем считать, что $M = R^2 = N_1N_2$, так как если $N_1N_2 = N_2N_1 = (0)$, то A не является критической (теорема 1.3).

6.1. $BM=MB=(0)$. Тогда $BN_1=(0)=N_2B$ и $N_1B=N_1$, $BN_2=N_2$ (если допустим, что $N_1B=(0)=BN_2$, то B был бы двусторонним идеалом, не содержащим M). В этом случае $N_1^2=N_2^2=N_2N_1=(0)$, $B=N_n(K_m)$ — простая алгебра. При этом, $n=1, 2$, так как при $n>2$ мы нашли бы в A, как в случае 5, нильпотентную подалгебру ступени нильпотентности выше 4. Монолит $M=Kh$ — одномерное пространство над K, потому что является минимальным идеалом и лежит в аннуляторе алгебры A. Пусть $N_1=fB$, $N_2=Bg$, $B=Be$. Тогда, если $a, b\in B$, то $(fa)(bg)=\lambda(ab)h$, где $\lambda: M_n(K_m)\to K$ является K-линейным отображением $M_n(K_m)$ на K. Это отображение и числа m и n вполне определяют алгебру $A_6(m, n, \lambda)=Be+fB+Bg+Kh$. Эта алгебра является фактор-алгеброй алгебры

$$A_6(m, n)=\left\{\begin{pmatrix}0 & \beta & \delta\\ 0 & \alpha & \gamma\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \alpha\in M_n(K_m),\quad \beta\in M_{1\times n}(K_m),\quad \gamma\in M_{n\times 1}(K_m),\ \delta\in K_m\right\}$$

$(n=1, 2)$ по идеалу размерности $m-1$, который содержится в аннуляторе $\{\delta e_{13}\mid \delta\in K_m\}$ алгебры $A_6(m, n)$. Очевидно, алгебра $A_6(m, n, \lambda)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_1(m, n)$.

6.2. $BM=M$, $MB=(0)$. Тогда $N_2B=(0)$, $B_1N_1=N_1$, где B_1 — некоторая простая компонента алгебры B.

6.2.1. $N_1BN_2=(0)$. Тогда $B=B_1$ — простая алгебра, $B=B_1=M_n(K_m)$, $n=1, 2$. Получаем серию алгебр, которые имеют представление матрицами порядка 3:

$$A_7(m, n)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 0 & 0 & \delta\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mid \alpha\in M_n(K_m),\quad \delta\in K,\quad \beta,\ \gamma\in M_{n\times 1}(K_m)\right\},$$

$n=1, 2$, $m\geq 1$. Алгебра $A_7(m, n)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_1(m, n)$.

6.2.2. $N_1B_1N_2\neq(0)$. И в этом случае $B=B_1$, но $B_1=K_m$ — поле, и мы получаем серию алгебр

$$A_8(m, \sigma)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 0 & \alpha^\sigma & \delta\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mid \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in K_m\right\},$$

где $m\geq 1$, а $\sigma\in G(K_m/K)$. Алгебра $A_8(m, \sigma)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_3(m, 1, \sigma)$.

6.2.3. $N_1B_2N_2\neq(0)$. Тогда $B=B_1\oplus B_2$, N_1 — унитарный неприводимый (B_1, B_2)-модуль, N_2 — левый B_2-модуль, а M — левый B_1-модуль. При этом, B_1 или B_2 является полем, т. е. одна из них — поле, а другая — матричная алгебра порядка, не более двух. Ясно, что $N_1^2=N_2^2=N_2N_1=(0)$. Если $n_i\in N_i$ $(i=1, 2)$, то $n_1n_2=\lambda(n_1\otimes n_2)\in M$, где $\lambda: N_1\otimes_{B_2}N_2\to M$ — эпиморфизм левых B_1-модулей. Мы получаем серию алгебр $A_9(n, k, m, \lambda)=B_1\oplus B_2+M+N_1+N_2$, $n+k=2, 3$, где $B_1=M_n((K_l)$, $B_2=M_k(K_m)$. Легко видеть, что алгебра $A_9(n, l, k, m, \lambda)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_7(n, l)$ и $A_6(k, m, \lambda')$ для некоторого λ'.

6.3. $BM=(0)$, $MB=M$. Этот случай симметричен предшествующему случаю 6.2, и мы получаем следующие серии алгебр: $A_{10}(m, n)$, $A_{11}(m, \sigma)$,

$A_{12}(n, l, k, m, \lambda)$, антиизоморфные соответственно алгебрам $A_7(m, n)$, $A_8(m, \sigma)$, $A_9(k, m, \lambda')$.

6.4. $BM \neq (0)$, $MB \neq (0)$.

6.4.1. $B_1M = M = MB_1$, $N_1BN_2 = (0)$. Тогда $B = B_1 = K_l$ — поле и мы получаем серию алгебр

$$A_{13}(l, \sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K_l \right\},$$

где $l \geqq 1$, $\sigma \in G(K_l/A)$.

6.4.2. $B_1M = M$, $MB_2 = M$, $N_1BN_2 = (0)$. В этом случае $B = B_1 \oplus B_2$. Одна из простых компонент B_1, B_2 — поле, а другая — поле или матричная алгебра второго порядка. Если $B_1 = M_n(K_l)$, $B_2 = M_k(K_m)$, то N_1 — неприводимый левый B_1-модуль, N_2 — неприводимый правый B_2-модуль, M — неприводимый (B_1, B_2)-модуль. Получается серия алгебр $A_{14}(n, l, k, m, \lambda) = B_1 \oplus B_2 + M + N_1 + N_2$, где $n + k = 2, 3$, $n_1n_2 = \lambda(n_1 \otimes n_2) \in M$, $\lambda : N_1 \otimes_K N_2 \to M$ — эпиморфизм (B_1, B_2)-модулей. Алгебра $A_{14}(n, l, k, m, \lambda)$ имеет факторы, изоморфные $A_7(n, l)$, $A_{10}(k, m)$.

6.4.3. $B_1M = M = MB_1$, $N_1B_1N_2 \neq (0)$. Тогда $B = B_1 = K_m$ — поле и $N_1 = K_mf$, $N_2 = K_mg$, $f\alpha = \alpha^\sigma f$, $g\alpha = \alpha^\tau g$, $h = fg$, $M = K_mh$, $h\alpha = \alpha^{\tau\sigma}h$, $f^2 = \xi h$, $g^2 = \eta h$, $gf = \varsigma h$; $\xi, \eta, \varsigma \in K_m$; $\sigma, \tau \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{15}(m, \sigma, \tau \xi, \eta, \varsigma)$. Эта алгебра имеет подалгебру, изоморфную $A_3(m, 1, \sigma\tau)$, и факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_1(m, 1)$, $A_2(m, 1)$.

6.4.4. $B_1M = M$, $MB_2 = M$, $N_1B_1N_2 \neq (0)$. Тогда $B = B_1 \oplus B_2$, $N_1^2 = N_2^2 = N_2N_1 = (0)$. Подалгебра B_1 — поле, а B_2 — поле или матричная алгебра второго порядка. Если $B_1 = K_l$, $B_2 = M_k(K_m)$, то $k = 1, 2$; $l, m \geqq 1$, $N_1 = B_1f$ — одномерное пространство над $K_l = B_1$, $f\alpha = \alpha^\sigma f$, $\alpha \in K_l$, $\sigma \in G(K_l/K)$, N_2 — неприводимый (B_1, B_2)-модуль, M — неприводимый (B_1, B_2)-модуль и $n_1n_2 = \lambda(n_1 \otimes n_2) \in M$, где $\lambda : N_1 \otimes_{B_1} N_2 \to M$ — эпиморфизм (B_1, B_2)-модулей. Получается серия алгебр $A_{16}(l, k, m, \sigma, \lambda) = B_1 \oplus B_2 + M + N_1 + N_2$. Алгебра $A_{16}(l, k, m, \sigma, \lambda)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_8(l, \sigma)$, $A_{10}(m, k)$.

6.4.5. $B_1M = M$, $MB_2 = M$, $N_1B_2N_2 \neq (0)$. Получается серия алгебр $A_{17}(k, m, l, \lambda, \sigma)$, антиизоморфные соответствуюшим алгебрам $A_{16}(l, k, m, \sigma, \lambda)$.

6.4.6. $B_1M = M = MB_1$, $N_1B_2N_2 \neq (0)$. В этом случае $B = B_1 \oplus B_2$, $B_1 = K_l$ — поле, а $B_2 = M_k(K_m)$ — поле или матричная алгебра второго порядка. Получается серия алгебр $A_{18}(l, m, k, \sigma, \lambda) = B + M + N_1 + N_2$, $M = B_1h$, $h\alpha = \alpha^\sigma h$, $\alpha \in B_1$, $\sigma \in G(K_l/K)$, N_1 — неприводимый (B_1, B_2)-модуль, N_2 — неприводимый (B_2, B_1)-модуль, $n_1n_2 = \lambda(n_1 \otimes n_2) \in M$, $n_i \in N_i$, $i = 1, 2$, где $\lambda : N_1 \otimes_{B_2} N_2 \to M$ — эпиморфизм (B_1, B_1)-модулей. Алгебры этой серии имеют факторы, изоморфные алгебрам $A_{13}(l, \sigma)$ для некоторого σ и $A_6(m, k, \lambda)$ для некоторого λ.

6.4.7. $B_1M = M = MB_3$, $N_1B_2N_2 \neq (0)$. В этом случае $B = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, две из простых компонент — поля, а третья — поле или матричная алгебра второго порядка. N_1 — неприводимый (B_1, B_2)-модуль, N_2 — неприводимый (B_2, B_3)-модуль, M — неприводимый (B_1, B_3)-модуль, $n_1n_2 = \lambda(n_1 \otimes n_2) \in M$ ($n_i \in N_i$, $i = 1, 2$), $\lambda : N_1 \otimes_{B_2} N_2 \to M$ — эпиморфизм (B_1, B_3)-модулей. Если $B_1 = M_n(K_l)$, $B_2 = M_k(K_m)$, $B_3 = M_sK_t)$, то $n + k + s = 3, 4$; $l, m, t \geqq 1$. Получается серия алгебр $A_{19}(l, n, m, k, t, s, \lambda) = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 + M + N_1 + N_2$. Эти алгебры имеют факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{14}(n, l, k, l, \lambda')$, $A_6(m, k, \lambda')$ для некоторого λ'.

Часть третья. Здесь мы будем рассматривать критические алгебры, для радикала R которых выполняется условие $R^3 \neq (0)$, $R^4 = (0)$.

Лемма 1.6. *Пусть A — критическая алгебра с радикалом R, полупростой компонентой $B \neq (0)$ и $R^3 \neq (0)$, но $R^4 = (0)$. Если в нильпотентных подалгебрах A выполняется тождество $x_1x_2x_3x_4 = 0$, то B — коммутативная подалгебра.*

Доказательство. Пусть $B = B_1 \oplus B'$, $B_1 = M_n(F)$, где $n \geq 2$ и F — конечное расширение поля K. Так как R и e_{12} порождают нильпотентную подалгебру в A, то в ней выполняется тождество $x_1x_2x_3x_4 = 0$ и, следовательно, $e_{12}R^3 = R^3e_{12} = Re_{12}R^2 = R^2e_{12}R = (0)$. Все элементы $x \in B_1$, для которых $xR^3 = R^3x = RxR^2 = R^2xR = (0)$, образуют двусторонний идеал в простой алгебре B_1. Поэтому мы имеем $B_1R^3 = R^3B_1 = RB_1R^2 = R^2B_1R = (0)$. Рассмотрим B_1R^2. Так как $B_1R^2 \subseteq \mathrm{Ann}_R R = M$, то $B_1R^2 \subseteq R^3$, и поэтому $(0) = B_1(B_1R^2) = B_1R^2$. Аналогично получается и равенство $R^2B_1 = (0)$. Идеал RB_1R содержится также в $\mathrm{Ann}_R R = R^3 = M$. Допустим, что $RB_1R \neq (0)$. Пусть $R_1 = RB_1 + R^2$, $R_2 = B_1R + R^2$, $R_3 = \{r \in R \mid rB_1 = B_1r = (0)\}$. Легко видеть, что R_1, R_2, R_3 — идеалы в A и что $R = R_1 + R_2 + R_3$. При этом, $R_{i_1}R_{i_2}R_{i_3} = (0)$ для любой пермутации $i_1i_2i_3$ чисел 1, 2, 3. Кроме того, идеалы $R_1 + R_2$, $R_1 + R_3$, $R_2 + R_3$ не совпадают с R. Действительно, если $R = R_1 + R_2$, то $R^3 = R_1R^2 + R_2R^2 = RB_1R^2 + B_1R^3 = (0)$, что неверно. Если $R = R_2 + R_3$ то $RB_1R = B_1RB_1R + R^2B_1R = (0)$, что неверно. Наконец, если $R = R_1 + R_3$, то $RB_1R = RB_1RB_1 + RB_1R^2 = (0)$. Следовательно, подкольца B, R_1, R_2, R_3 удовлетворяют условиям теоремы 1.3 и A не является критической алгеброй. Это противоречит условиям леммы. Поэтому $RB_1R = (0)$.

Рассмотрим теперь B_1R. Так как $B_1R^2 = (0)$ и $RB_1R = (0)$, то $B_1R \subseteq \mathrm{Ann}_R R = R^3 = M$. Но $B_1M = (0)$, и поэтому $B_1R = B_1(B_1R) \subseteq B_1M = (0)$, т. е. $B_1R = (0)$. Аналогично получается и равенство $RB_1 = (0)$. Но тогда B_1 является идеалом в A, не содержащим монолит M, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что B — коммутативная подалгебра в A. Лемма доказана.

Доказательства следующих двух лемм аналогичны соответственно доказательствам леммы 2.5 и леммы 2.7 работы [2].

Лемма 1.7. *Если A — критическая ненильпотентная алгебра с радикалом R и полупростой компонентой B, $R^3 \neq (0)$, $R^4 = (0)$, то R/R^2 разлагается в прямую сумму не более трех минимальных (B, B)-модулей.*

Лемма 1.8. *Пусть A — критическая алгебра с радикалом R, с ненулевой полупростой компонентой B и $R^3 \neq (0)$, $R^4 = (0)$. Тогда B разлагается в прямую сумму не более четырех полей.*

Лемма 1.9. *Пусть A — ненильпотентная критическая алгебра $A = B + R$, $R^3 \neq (0)$, $R^4 = (0)$ и для монолита $M = R^3$ алгебры A выполняется условие $BM = MB = (0)$. Тогда $R = R^2 + N_1 + N_2 + N_3$, где N_i — ненулевые минимальные (B, B)-модули.*

Доказательство. Допустим, что $R = R^2 + N_1$ и N_1 — минимальный (B, B)-модуль. Так как $BM = MB = (0)$ и $M = R^3 = N_1^3$, то $BN_1 = N_1B = (0)$. Так как N_1 порождает R как алгебра, мы имели бы $BR = RB = (0)$. Но тогда B был бы двусторонним идеалом, не содержащим M, что невозможно.

Допустим теперь, что $R = R^2 + N_1 + N_2$ и N_1 и N_2 — минимальные (B, B)-модули. Пусть $N_1N_2 = (0) = N_2N_1$. Тогда $R = R_1 + R_2$, где R_i — подалгебра, порожденная N_i $(i = 1, 2)$ и $R_1R_2 = R_2R_1 = (0)$. Легко заметить, что B, R_1, R_2 удовлетворяют требованиям теоремы 1.3, и алгебра A на может быть критической. Поэтому мы можем считать, что $N_1N_2 \neq (0)$. Так как нумерация

N_1 и N_2 не имеет значения, то возможны следующие случаи: 1) $N_1^3=M$, 2) $N_1^2N_2=M$, 3), $N_2N_1^2=M$, 4) $N_1N_2N_1=M$.

1) $N_1N_2\neq(0)$ и $N_1^3=M$. Тогда $BN_1=N_1B=(0)$. При этом, если $BN_2=N_2B=(0)$, то B был бы ненулевым идеалом, не содержащим M, что невозможно. Так как $N_1N_2\neq(0)$, то $BN_2=(0)$ и, следовательно, $N_2B=N_2$. Легко проверить, что в этом случае N_1N_2 — идеал и, следовательно, $M\subseteq N_1N_2$. Но если $N_2B_1\neq(0)$, то B_1 действует унитарным способом справа на N_2 (а значит и на N_1N_2) и нулевым способом на M, что невозможно.

2) $N_1N_2\neq(0)$ и $N_1^2N_2=M$. В этом случае будем иметь $BN_i=N_iB=(0)$ $(i=1, 2)$, что невозможно.

Точно также рассматриваются и случаи 3) и 4). Лемма доказана.

При помощи предшествующих утверждений уже нетрудно получается следующий список критических алгебр, в нильпотентных подалгебрах которых выполняется тождество $x_1x_2x_3x_4=0$, для радикала R которых выполняется условие $R^3\neq(0)$, но $R^4=(0)$ (мы продолжаем нумерацию списка второй части):

7. A — нильпотентна. Тогда она удовлетворяет тождеству $x_1x_2x_3x_4=0$. Точное описание этих алгебр нам не нужно.

8. $A=B+R$, $B\neq(0)$, $R^3=M$.

8.1. $BM=MB=(0)$. В силу леммы 1.9 мы имеем $R=R^2+N_1+N_2+N_3$, N_i — ненулевые минимальные (B, B)-модули $(i=1, 2, 3)$. Из теоремы 1.3 легко вытекает, что мы можем считать, что $N_1N_2N_3\neq(0)$, то есть $N_1N_2N_3=M$. В этом случае $BN_1=(0)$, $N_3B=(0)$. При этом, $N_1BN_2\neq(0)$ или $N_2BN_3\neq(0)$, так как в противном случае B был бы ненулевым идеалом, не содержащим M.

8.1.1. $N_1BN_2\neq(0)$, $N_2BN_3=(0)$ $(M=N_1BN_2N_3)$. Тогда $B=B_1=K_m$, N_1 — неприводимый правый B_1-модуль, N_2 — неприводимый левый B_1-модуль, N_3 — одномерное пространство над K. Получаем серию алгебр $A_{20}(m)=B_1+R^2+N_1+N_2+N_3$. Алгебра $A_{20}(m)$ имеет фактор, изоморфный $A_7(m, 1)$. Более подробное строение этих алгебр нам не нужно.

8.1.2. $N_1BN_2=(0)$, $N_2BN_3\neq(0)$ $(M=N_1N_2BN_3)$. Получается серия алгебр $A_{21}(m)$, антиизоморфные соответствующим алгебрам $A_{20}(m)$.

8.1.3. $N_1BN_2\neq(0)$, $N_2BN_3\neq(0)$.

8.1.3.1. $N_1B_1N_2\neq(0)$, $N_2B_1N_3\neq(0)$ $(M=N_1B_1N_2B_1N_3)$. Тогда $B=B_1=K_m$, N_1 — неприводимый правый B-модуль, N_2 — неприводимый (B, B)-модуль, N_3 — неприводимый левый B-модуль, $n_2\alpha=\alpha^\sigma n_2$, $n_2\in N_2$, $\alpha\in B$, $\sigma\in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{22}(m, \sigma)$, имеющих факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{11}(m, \sigma')$ и $A_8(m, \sigma'')$ для некоторых σ' и σ''.

8.1.3.2. $N_1B_1N_2\neq(0)$, $N_2B_2N_3\neq(0)$ $(M=N_1B_1N_2B_2N_3)$. Тогда $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$, N_1 — неприводимый правый B_1-модуль, N_2 — неприводимый (B_1, B_2)-модуль, N_3 — неприводимый левый B_2-модуль. Получается серия алгебр $A_{23}(m, l)$, имеющих факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_9(1, m, 1, l, \lambda')$ и $A_{12}(1, m, 1, l, \lambda'')$ для некоторых λ' и λ''.

8.2. $BM=M$, $MB=(0)$. Как и в случае 8.1 легко видеть, что не выполняется разложение $R=R^2+N_1$, где N_1 — минимальный (R, B)-модуль.

8.2.1. $R=R^2+N_1+N_2$. Если $N_1^3\neq(0)$ (или $N_2^3\neq(0)$), то $N_1^3=M$ и мы имели бы $BN_1\neq(0)$, $N_1B=(0)$, что невозможно. Действительно, если это так, то $N_1^2=(0)$. Так как нумерация N_1 и N_2 не имеет значения, мы должны рассмотреть следующие три случая: $M=N_1^2$. $N_2M=N_2N_1^2$, $M=N_1N_2N_1$. Рассмотрим все эти случаи.

8.2.1.1. $M=N_1^2N_2$. В этом случае $B_1N_2\neq(0)$ и так как $N_1^2\neq(0)$, то и $N_1B_1\neq(0)$. Тогда (так как $N_1^2N_2\neq(0)$) $B_1N_2\neq(0)$, $N_2B=0$ и $B=B_1=K_m$. Если $N_1=K_mn_1$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $\alpha\in K_m$, $\sigma\in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{24}(m, \sigma)$, имеющих факторы, изоморфные алгебрам $A_5(m, \sigma')$ для некоторого σ'.

8.2.1.2. $M=N_2N_1^2$. В этом случае $B_1N_2=N_2$, $N_1B=(0)$. Следовательно, (так как $N_1^2\neq(0)$), и $BN_1=(0)$. Тогда $N_2B=(0)$, $B=B_1=K_m$ и мы получаем серию алгебр $A_{25}(m)$, имеющих факторы, изоморфные алгебрам $A_7(m, 1)$.

8.2.1.3. $M=N_1N_2N_1$. В этом случае мы имеем $B_1N_1=N_1$, $N_1B=(0)$. Тогда (так как $N_1N_2N_1\neq(0)$) $BN_2=(0)$ $N_2B_1=N_2$ $(M=B_1N_1N_2B_1N_1)$, $B=B_1=K_m$. Мы получаем серию алгебр $A_{26}(m)$, имеющих факторы, изморфные $A_6(m, 1)$.

8.2.2. $R=R^2+N_1+N_2+N_3$, N_i — ненулевые минимальные (B, B)-модули $(i=1, 2, 3)$. В силу теоремы 1.3 мы можем считать, что $(0)\neq N_1N_2N_3=M$. Тогда $B_1N_1\neq(0)$ и $N_3B=(0)$.

8.2.2.1. $N_1BN_2=(0)$, $N_2BN_3=(0)$. Тогда $B=B_1=K_m$ и получаем серию алгебр $A_{27}(m)$, имеющих факторы, изоморфные $A_7(m, 1)$.

8.2.2.2. $N_1B_1N_2\neq(0)$, $N_2BN_3=(0)$. Тогда $B=B_1=K_m$, $N_1=K_mn_1$, $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $\alpha\in K_m$, $\sigma\in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{28}(m, \sigma)$, имеющих факторы, изоморфные $A_8(m, \sigma)$.

8.2.2.3. $N_1BN_2=(0)$, $N_2B_1N_3\neq(0)$. Тогда $B=B_1=K_m$. Мы получаем серию алгебр $A_{29}(m)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{13}(m, \sigma)$ для некоторого σ.

8.2.2.4. $N_1B_1N_2\neq(0)$, $N_2B_1N_3\neq(0)$. Тогда $B=B_1=K_m$, $N_1=K_mn_1$, $N_2=K_mn_2$ $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $n_2\alpha=\alpha^\tau_{n_2}\alpha\in K_m$, $\sigma, \tau\in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{30}(m, \sigma, \tau)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{15}(m, \sigma, \tau, \xi, \eta, \varsigma)$ для некоторых $\xi, \eta, \varsigma\in K_m$.

8.2.2.5. $N_1B_2N_2\neq(0)$, $N_2BN_3=(0)$. Тогда $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$. Мы получаем серию алгебр $A_{31}(m, l)$, имеющих факторы, изоморфные $A_9(1, m, 1, l, \lambda)$ для некоторого λ.

8.2.2.6. $N_1BN_2=(0)$, $N_2B_2N_3\neq(0)$, $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$. Получается серия алгебр $A_{32}(m, l)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{14}(1, m, 1, l, \lambda)$ для некоторого λ.

8.2.2.7. $N_1B_1N_2\neq(0)$, $N_2B_2N_3\neq(0)$, $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$. Если $N_1=K_mn_1$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $\alpha\in K_m$, $\sigma\in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{33}(m, l, \sigma)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{16}(m, 1, l, \sigma, \lambda)$ для некоторого λ.

8.2.2.8. $N_1B_2N_2\neq(0)$, $N_2B_1N_3\neq(0)$, $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$. Получается серия алгебр $A_{34}(m, l)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{18}(m, l, 1, \sigma, \lambda)$ для некоторых σ и λ и $A_9(1, m, 1, l, \lambda)$ для некоторого λ.

8.2.2.9. $N_1B_2N_2\neq(0)$, $N_2B_2N_3\neq(0)$, $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$; $N_2=K_ln_2$, $n_2\alpha=n^\sigma n_2$, $\alpha\in K_l$, $\sigma\in G(K_l/K)$. Получается серия алгебр $A_{35}(m, l, \sigma)$, имеющих факторы, изоморфные $A_{17}(1, m, l, \lambda, \sigma)$ для некоторого λ.

8.2.2.10. $N_1B_2N_2\neq(0)$, $N_2B_3N_3\neq(0)$. Тогда $B=B_1\oplus B_2\oplus B_3$, $B_1=K_m$, $B_2=K_n$, $B_3=K_l$. Получается серия алгебр $A_{36}(m, n, l)$, имеющих факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{19}(m, 1, n, 1, l, 1, \lambda)$ для некоторого λ и $A_9(1, n, 1, l, \lambda)$ для некоторого λ.

8.3. $BM=0$, $MB=M$. Этот случай симметричен случаю 8.2. Поэтому здесь прлучаются тринадцать серий алгебр $A_{37}, \ldots, A_{49}$ такие, что каждая алгебра серии A_{36+i} антиизоморфна алгебре из серии A_{23+i} $(i=1, 2, \ldots, 13)$ и обратно.

8.4. $BN=MB=M$.

8.4.1. $R=R^2+N_1$, где N_1 — минимальный (B, B)-модуль. Тогда $M=R^3=N_1^3$, $B_1N_1=N_1B_1=N_1$, $B=B_1=K_m$. Если $n_1 \in N_1$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $\alpha \in K_m$, $\sigma \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{50}(m, \sigma)$. Алгебра $A_{50}(m, \sigma)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_5(m, \sigma)$.

8.4.2. $R=R^2+N_1+N_2$, где N_1, N_2 — минимальные (B, B)-модули. Возможны (с точностью до нумерации N_1 и N_2) следующие случаи:

8.4.2.1. $M=N_1^3$. В этом случае $B=B_1=K_m$ — поле, а подалгебра в A, порожденная B и N_1, изоморфна некоторой из алгебр $A_{50}(m, \sigma)$. Следовательно, мы получаем серию алгебр A_{51} таких, что каждая из них имеет под алгебру из серии A_{50} и обе алгебры имеют одну и ту же полупростую часть B.

8.4.2.2. $M=N_1^2N_2$. Тогда $M=B_1N_1B_1N_1B_1N_2B_s$. Если $s=1$, то $B=B_1=K_m$. Если $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, $\alpha \in K_m$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $n_2\alpha=\alpha^\tau n_2$, $\sigma, \tau \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{52}(m, \sigma, \tau)$. Каждая алгебра $A_{52}(m,\sigma, \tau)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_5(m, \sigma)$. Если $s=2$, то $B_1=K_m$, $B_2=K_l$ и $B=B_1\oplus B_2$. Если $n_1 \in N_1$, $\alpha \in B_1$, то $n_1\alpha=a^\sigma n_1$. Получается серия алгебр $A_{53}(m, \sigma, l)$. Алгебра $A_{53}(m, \sigma, l)$ имеет фактор, изморфный алгебре $A_5(m, \sigma)$.

8.4.2.3. $M=N_2N_1^2$. Как и в предшествующем случае, получаются серии алгебр $A_{54}(m, \sigma, \tau)$, $A_{55}(m, \sigma, l)$, имеющих факторы, изоморфные $A_5(m, \sigma)$.

8.4.2.4. $M=N_1N_2N_1$. Тогда $B_1N_1=N_1$, $N_2B_1=N_2$. Если $N_1B_1=N_1$, то $B_1N_2=N_2$. В этом случае $B=B_1=K_m$. Пусть $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, $\alpha \in B_1$. Тогда $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $n_2\alpha=\alpha^\tau n_2$, $\sigma, \tau \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{56}(m, \sigma, \tau)$. Алгебра $A_{56}(m, \sigma, \tau)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_{15}(m, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta)$ для некоторых $\xi, \eta, \varsigma \in K_m$. Если $N_1B_2=N_1$, то $B_2N_2=N_2$. Тогда $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_l$. Получается серия алгебр $A_{57}(m, l)$. Алгебра $A_{57}(m, l)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{18}(m, l, 1, \sigma, \lambda)$ и $A_{18}(l, m, 1, \sigma, \lambda)$ для некоторых σ и λ.

8.4.3. $R=R^2+N_1+N_2+N_3$, где N_i — ненулевые минимальные (B, B)-модули. Можем считать, что $(0)\neq N_1N_2N_3=M$.

8.4.3.1. $B=B_1=K_m$. Тогда $B_1N_1=N_1$ и $N_3B_1=N_3$.

8.4.3.1.1. $N_1B_1=B_1N_2=N_2B_1=B_1N_3=(0)$. В этом случае получается серия алгебр $A_{58}(m)$. Алгебра $A_{58}(m)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_{13}(m, \sigma)$ для некоторого $\sigma \in G(K_m/K)$.

8.4.3.1.2. $N_1B_1=N_1$, $B_1N_2=N_2$, $N_2B_1=(0)=B_1N_3$. Если $n_1 \in N_1$ и $\alpha \in B_1=K_m$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $\sigma \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{59}(m, \sigma)$. Алгебра $A_{59}(m, \sigma)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_8(m, \sigma)$.

8.4.3.1.3. $N_1B_1=B_1N_2=(0)$, $N_2B_1=N_2$, $B_1N_3=N_3$. Получается серия алгебр $A_{60}(m, \sigma)$, антиизоморфных алгебрам $A_{59}(m, \sigma)$.

8.4.3.1.4. $N_1B_1=N_1$, $B_1N_2=N_2=N_2B_1$, $B_1N_3=N_3$. Если $n_i \in N_i$ $(i=1, 2, 3)$ и $\alpha \in B_1$, то $n_1\alpha=\alpha^\sigma n_1$, $n_2\alpha=\alpha^\tau \alpha_2$, $n_3\alpha=\alpha^\rho n_3, \sigma, \tau, \rho \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{61}(m, \sigma, \tau, \rho)$. Алгебра $A_{61}(m, \sigma, \tau, \rho)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_{11}(m\ \sigma, \tau, \xi, \eta, \varsigma)$ для некоторых $\xi, \eta, \varsigma \in K_m$.

8.4.3.2. $B=B_1\oplus B_2$, $B_1=K_m$, $B_2=K_n$.

8.4.3.2.1. $B_1N_1=N_1$, $N_3B_2=N_3$, $N_1B=BN_2=N_2B=BN_3=(0)$. Получается серия алгебр $A_{62}(m, n)$. Алгебра $A_{62}(m, n)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_7(m, 1)$ и $A_{10}(n, 1)$.

8.4.3.2.2. $M=B_1N_1BN_2N_3B$, $N_2B=BN_3=(0)$.

а) $M=B_1N_1B_2N_2N_3B_1$,

б) $M=B_1N_1B_1N_2N_3B_2$,

в) $M=B_1N_1B_2N_2N_3B_2$.

В первом случае получается серия алгебр $A_{63}(m, n)$. Алгебра $A_{63}(m, n)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_{14}(1, n, 1, m, \lambda)$ для некоторого λ.

Во втором случае, если $n_1 \in N_1$ и $\alpha \in K_m$, то $n_1\alpha = \alpha^\sigma n_1$, $\sigma \in G(K_m/K)$. Получается серия алгебр $A_{64}(m, \sigma, n)$. Алгебра $A_{64}(m, \sigma, n)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{14}(1, m, 1, n, \lambda)$ и $A_8(m, \sigma)$.

В третьем случае получается серия алгебр $A_{65}(m, n)$. Алгебра $A_{65}(m, n)$ имеет факторы $A_9(1, m, 1, n, \lambda)$, $A_{13}(n, \sigma)$ для некоторых λ и σ.

8.4.3.2.3 $M = B_1N_1N_2BN_3B$, $N_1B = BN_2 = (0)$. Этот случай симметричен предшествующему. Поэтому здесь получаются три серии алгебр $A_{66}(m, n)$, $A_{67}(m, n, \sigma)$, $A_{68}(m, n)$, которые антиизоморфны соответственно алгебрам $A_{63}(m, n)$, $A_{64}(m, n, \sigma)$, $A_{65}(m, n)$.

8.4.3.2.4. $M = B_1N_1BN_2BN_3B$.

8.4.3.2.4.1. $M = B_1N_1B_1N_2B_2N_3B_1$. В этом случае получается серия алгебр $A_{69}(m, \sigma, n)$. Алгебра $A_{69}(m, \sigma, n)$ имеет фактор, изоморфный алгебре $A_{16}(m, 1, n, \sigma, \lambda)$.

8.4.3.2.4.2. $M = B_1N_1B_2N_2B_1N_3B_1$. Получается серия алгебр $A_{70}(m, \sigma, n)$, антиизоморфных соответственно алгебрам $A_{69}(m, \sigma, n)$.

8.4.3.2.4.3. $M = B_1N_1B_2N_2B_2N_3B_1$. Получается серия алгебр $A_{71}(m, n)$. Алгебра $A_{71}(m, n)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{16}(n, 1, m, \sigma, \lambda)$, $A_{13}(m, \sigma)$.

8.4.3.2.4.4. $M = B_1N_1B_1N_2B_2N_3B_2$. В этом случае получается серия алгебр $A_{72}(m, \sigma, n, \tau)$, $\sigma \in G(K_m/K)$, $\tau \in G(K_n/K)$. Алгебра $A_{72}(m, \sigma, n, \tau)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{16}(m, 1, n, \sigma, \lambda)$, $A_{17}(1, n, m, \lambda, \sigma)$.

8.4.3.2.4.5. $M = B_1N_1B_2N_2B_1N_3B_2$. Получается серия алгебр $A_{73}(m, n)$. Алгебра $A_{73}(m, n)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{18}(m, n, 1, \sigma, \lambda)$ и $A_{18}(n, m, 1, \sigma, \lambda)$.

8.4.3.2.4.6. $M = B_1N_1B_1N_2B_1N_3B_2$. Серия алгебр $A_{74}(m, n, \sigma, \tau)$ ($\sigma, \tau \in G(K_m/K)$), которая получается в этом случае, такая, что $A_{74}(m, n, \sigma, \tau)$ имеет факторы, соответственно изоморфные алгебрам $A_{15}(m, \sigma, \tau, \xi, \eta, \varsigma)$ для некоторых $\xi, \eta, \varsigma \in B_1 = K_m$ и $A_{16}(m, 1, n, \sigma, \lambda)$ для некоторых σ, λ.

8.4.3.2.4.7. $M = B_1N_1B_2N_2B_2N_3B_2$. Серия алгебр $A_{75}(m, n, \sigma, \tau)$ ($\sigma, \tau \in G(K_m/K)$) составлена из алгебр, соответственно антиизоморфных алгебрам $A_{74}(n, m, \sigma, \tau)$.

8.4.3.3. $B = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, $B_1 = K_m$, $B_2 = K_n$, $B_3 = K_l$.

8.4.3.3.1. $M = B_1N_1B_2N_2B_3N_3B_1$. В этом случае получается серия алгебр $A_{76}(m, n, l)$. Алгебра $A_{76}(m, n, l)$ имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{19}(m, 1, n, 1, l, 1, \lambda)$ и $A_{19}(n, 1, l, 1, m, 1, \lambda)$.

8.4.3.3.2. $M = B_1N_1B_3N_2N_3B_2$, $N_2B = (0) = BN_3$. Каждая алгебра $A_{77}(m, n, l)$ серии, которая получается в этом случае, имеет факторы, изоморфные соответственно $A_{14}(1, l, 1, n, \lambda)$ и $A_9(1, m, 1, n, \lambda)$.

8.4.3.3.3. $M = B_1N_1N_2B_3N_3B_2$, $N_1B = (0) = BN_2$. Серия алгебр $A_{78}(m, n, l)$, которая получается в этом случае, составлена из алгебр, антиизоморфных алгебрам из предшествующей серии A_{77}.

8.4.3.3.4. $M = B_1N_1B_3N_2B_3N_3B_2$. В этом случае получается серия алгебр $A_{79}(m, n, l)$. Каждая из этих алгебр имеет факторы, изоморфные соответственно алгебрам $A_{16}(l, 1, n, \sigma, \lambda)$ и $A_{17}(1, m, l, \lambda, \sigma)$.

8.4.3.3.5. $M = B_1N_1B_3N_2B_1N_3B_2$. Каждая алгебра новой серии $A_{80}(m, n, l)$ имеет факторы, соответственно изоморфные алгебрам $A_{18}(m, l, 1, \sigma, \lambda)$ и $A_{19}(l, 1, m, 1, n, 1, \lambda)$.

8.4.3.3.6. $M=B_1N_1B_3N_2B_2N_3B_2$. В этом случае получаетея серия алгебр $A_{81}(m, n, l)$. Алгебра $A_{81}(m, n, l)$ имеет факторы, изоморфные алгебрам $A_{19}(m, 1, l, 1, n, 1, \lambda)$, $A_{17}(1, l, n, \lambda, \sigma)$.

8.4.3.3.7. $M=B_1N_1B_1N_2B_3N_3B_2$. Алгебры $A_{82}(m, n, l)$, которые получаются в этом случае, являются антиизоморфными алгебрам из предшествующей серии A_{81}.

8.4.3.3.8. $M=B_1N_1B_2N_2B_3N_3B_2$. Алгебры $A_{83}(m, n, l)$, которые получаются, антиизоморфны алгебрам серии A_{80}.

8.4.3.4. $B=B_1\oplus B_2\oplus B_3\oplus B_4$, $B_1=K_m$, $B_2=K_n$, $B_3=K_l$, $B_4=K_s$. Тогда $M=B_1N_1B_2N_2B_3N_3B_4$. Получается серия алгебр $A_{84}(m, n, l, s)$. Алгебра $A_{84}(m, n, l, s)$ имеет факторы, изоморфные алгебрам $A_{19}(m, 1, n, 1, l, 1, \lambda)$, $A_{19}(n, 1, l, 1, s, 1, \lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев, Е. Н. Кузьмин. Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем. *Алгебра и логика*, **17**, 1978, 28—32.
2. Г. К. Генов. Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем. *Алгебра и логика* (в печати).
3. Н. Джекобсон. Строение колец. Москва, 1961.
4. И. В. Львов. О многообразиях ассоциативных колец, I, *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 269—267.
5. В. Н. Латышев. Конечная базируемость тождеств некоторых колец. *Успехи мат. наук*, **32**, 1977, № 4, 259—260.
6. П. Н. Сидеров. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем. *Плиска*, **2**, 1981, 143—152.
7. У. Кальюлайд. Замечание о базисе тождеств верхних треугольных матриц. *Материалы конф. Методы алгебры и функц. анализа при исслед. семейств операторов*, 1978. Тарту, 1978, 105—107.
8. B. R. McDonald. Finite rings with identity. New York, 1974.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 16.9.1980