Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

РОСИЦА И. СЕМЕРДЖИЕВА

В настоящей работе исследуются краевые задачи для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, вся главная часть которых вырождается. Доказывается существование и единственность сильного решения и исследуется гладкость этого решения.

1. Основные определения и вывод априорных оценок. Пусть — G конечная односвязная область трехмерного пространства R^3 точек $x=(x_1, x_2, x_3)$ с кусочно-гладкой границей Г. Рассмотрим в области G вырождающееся гиперболическое уравнение

$$(1)\qquad Lu=k(x_3)u_{x_1x_1}-l_1(x_3)u_{x_2x_2}-\partial_{x_3}(l_2(x_3)u_{x_3})+a_1(x)u_{x_1}+a_2(x)u_{x_2}+c(x)u=f(x),$$

где $k(x_3)\in C^1(\Delta)$, $\Delta=[0, d_3]$, $d_3=\sup_{x\in \bar G} x_3$, $k(x_3)>0$ для $x_3>0$, $k(0)=0$, $l_1(x_3)\in C^1(\Delta)$, $l_2(x_3)\in C^2(\Delta)$, $l_i(x_3)>0$ для $x_3>0$, $l_i(0)=0$, $l'_i(0)>0$, $a_i(x)\in C^1(\bar G)$ $(i=1$ $2)$, $c(x)\in C(\bar G)$.

Будем предполагать, что $\Gamma=\cup_{i=1}^5\Gamma_i$, где

$$\Gamma_1: x_1=\int_0^{x_3}\sqrt{k(t)/l_2(t)}dt,$$

$$\Gamma_2: x_1=-\int_0^{x_3}\sqrt{k(t)/l_2(t)}\,dt+d_1,\ d_1=\text{const}>0,$$

$$\Gamma_3: x_3=0,\ \Gamma_4: x_2=0,\ \Gamma_5: x_2=d_2,\ d_2=\text{const}>0.$$

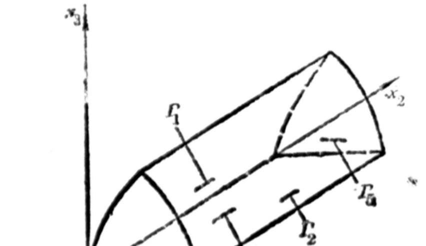

Рис. 1

Заметим, что поверхности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 являются характеристиками уравнения (1) (рис. 1).

Рассмотрим следующие две краевые задачи.

Задача М. *Найти в области G решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$(2)\qquad u=0 \text{ на } \Gamma_1\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5.$$

Задача Р. *Найти в области G решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$(3)\qquad u=0 \text{ на } \Gamma_1,\ u_{x_2}=0 \text{ на } \Gamma_4\cup\Gamma_5.$$

Дальше, рассматривая задачу P, дополнително будем предполагать, что $a_2(x)=0$ на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$. Сопряженная задача к задаче M имеет вид

$$L^*v=g(x) \text{ в } G, \tag{4}$$

$$v=0 \text{ на } \Gamma_2\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5, \tag{5}$$

а сопряженная задача к задаче P —

$$L^*v=g(x) \text{ в } G, \tag{6}$$

$$v=0 \text{ на } \Gamma_2 \text{ и } v_{x_2}=0 \text{ на } \Gamma_4\cup\Gamma_5, \tag{7}$$

где L^* — оператор, сопряженный к L,

$$L^*v=k(x_3)v_{x_1x_1}-l_1(x_3)v_{x_2x_2}-\partial_{x_3}(l_2(x_3)v_{x_3})-\partial_{x_1}(a_1v)-\partial_{x_2}(a_2v)+cv.$$

Обозначим через $C^2_M(\bar G)$ и $C^{2,*}_M(\bar G)$ ($C^2_P(\bar G)$ и $C^{2,*}_P(\bar G)$) совокупность всех функций из $C^2(\bar G)$, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (2) и (5) ((3) и (7)), а через $W^1_M(G)$ и $W^{1,*}_M(G)$ ($W^1_P(G)$ и $W^{1,*}_P(G)$) их замыкания по норме $\|\cdot\|_1$ пространства Соболева $W^1_2(G)$. Через $\|\cdot\|_{-1,M}$ ($\|\cdot\|_{-1,P}$) обозначаем норму в негативном пространстве $W^{-1}_M(G)$ ($W^{-1}_P(G)$), сопряженном к $W^1_M(G)$ ($W^1_P(G)$) [10]. Обозначим через $C^\infty_M(\bar G)$ и $C^{\infty,*}_M(\bar G)$ ($C^\infty_P(\bar G)$ и $C^{\infty,*}_P(\bar G)$) множества всех бесконечно дифференцируемых в $\bar G$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2) и (5) ((3) и (7)). Скалярное произведение и норму в $L_2(G)$ обозначаем через $(.,.)_0$ и $\|\cdot\|_0$. Пусть $f(x)\in L_2(G)$.

Определение 1. *Функцию $u(x)\in L_2(G)$ называем слабым решением задачи M (P), если $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ для каждой функции $v(x)\in C^{2,*}_M(\bar G)$ ($v(x)\in C^{2,*}_P(\bar G)$) и $v(x)=0$ в окрестности Γ_3.*

Определение 2. *Функцию $u(x)\in L_2(G)$ называем сильным решением задачи M (P), если существует последовательность функций $u_n\in C^2_M(\bar G)$ ($u_n\in C^2_P(\bar G)$), таких, что $\|u_n-u\|\to 0$, $\|Lu_n-f\|_0\to 0$ при $n\to\infty$.*

Лемма 1. *Если $a_1(x)>0$ на Γ_3 и $|a_2(x)|$ достаточно мало в окрестности Γ_3, то для каждой функции $u(x)\in C^2_M(\bar G)$ ($u(x)\in C^2_P(\bar G)$) имеет место априорная оценка*

$$(e^{-\lambda x_1}(\mu u_{x_1}-u_{x_3}),\ Lu)_0\geq C\|u\|_1^2,\quad C=\text{const}>0, \tag{8}$$

где $\lambda>0$, $\mu>0$ — достаточно большие постоянные.

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу M. Пусть $u(x)\in C^2_M(\bar G)$ и $\alpha(x_1)$, $\beta(x_1)$ — пока произвольные, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, d_1]$ функции. Интегрированием по частям получаем

$$2\int_G(\alpha u_{x_1}+\beta u_{x_3})Lu\,dx \tag{9}$$

$$=\int_G A(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})dx+\int_\Gamma B(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})ds+2\int_G(\alpha u_{x_1}+\beta u_{x_3})cu\,dx,$$

где

$$A(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})=(-\alpha'k+\beta k'+2\alpha a_1)u^2_{x_1}+(-\alpha'l_1-\beta l_1')u^2_{x_2}$$

$$+(-\alpha'l_2-\beta l_2')u^2_{x_3}+2\alpha a_2u_{x_1}u_{x_2}+2\beta a_2u_{x_3}u_{x_2}+2(-\beta'k+\beta a_1)u_{x_1}u_{x_3},$$

$$B(u_{x_1},\ u_{x_2},\ u_{x_3})=(\alpha kn_1-\beta kn_3)u_{x_1}^2+(\alpha l_1n_1+\beta l_1n_3)u_{x_2}^2$$

$$+(\alpha l_1n_1-\beta l_1n_3)u_{x_3}^2-2\alpha l_1n_2u_{x_1}u_{x_2}-2\beta l_1n_2u_{x_2}u_{x_3}+2(-\alpha l_2n_3+\beta kn_1)u_{x_1}u_{x_3},$$

$n=(n_1,\ n_2,\ n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Выбираем $\alpha(x_1)=\mu e^{-\lambda x_1}$, $\beta(x_1)=-e^{-\lambda x_1}$, где $\lambda,\ \mu>0$ — пока достаточно большие постоянные. Легко видеть, что

(10) $$B(u_{x_1},\ u_{x_2},\ u_{x_3})\geqq 0 \text{ на } \Gamma.$$

Заметим только, что при $\alpha n_1+\beta n_3\neq 0$ квадратичную форму $B(u_{x_1},\ u_{x_2},\ u_{x_3})$ можно записать в виде

$$B(u_{x_1},\ u_{x_2},\ u_{x_3})=(\alpha n_1+\beta n_3)^{-1}\{(\alpha^2l_2-\beta^2k)(n_1u_{x_3}-n_3u_{x_1})^2$$

$$+l_1[\alpha(n_1u_{x_2}-n_2u_{x_1})+\beta(n_3u_{x_2}-n_2u_{x_3})]^2+H(\alpha u_{x_1}+\beta u_{x_3})^2\},$$

где $H=kn_1^2-l_1n_2^2-l_2n_3^2$.

Ввиду того, что

$$\int_G e^{-\lambda x_1}(\lambda u^2-2uu_{x_1})dx=-\int_G(e^{-\lambda x_1}u^2)_{x_1}dx=-\int_\Gamma e^{-\lambda x_1}u^2n_1ds\leqq 0,$$

то из (9) и (10) получаем

(11) $$2\int_G e^{-\lambda x_1}(\mu u_{x_1}-u_{x_3})Lu\,dx$$

$$\geqq\int_G e^{-\lambda x_1}[(\lambda\mu k-k'+2\mu a_1)u_{x_1}^2+(\lambda\mu l_1+l_1')u_{x_2}^2$$

$$+(\lambda\mu l_2+l_2')u_{x_3}^2+\lambda u^2+2\mu a_2u_{x_1}u_{x_2}-2a_2u_{x_2}u_{x_3}$$

$$-2(\lambda k+a_1)u_{x_1}u_{x_3}+2(\mu c-1)uu_{x_1}-2cuu_{x_3}]dx.$$

В силу сделанных предположений следует, что существует такое положительное число ε_0, что $a_1(x)\geqq\varepsilon_0$ и $l_i'(x_3)\geqq\varepsilon_0$ $(i=1,\ 2)$ в некоторой окрестности $K=\{x\in\bar G:\ 0\leqq x_3\leqq\delta_0,\ \delta_0=\mathrm{const}>0\}$ плоскости Γ_3.

Применяя неравенство $2ab\leqq\varepsilon_1a^2+\varepsilon_1^{-1}b^2$, $\varepsilon_1=\mathrm{const}>0$, a, b — произвольные числа, из (11) получаем

(12) $$2\int_G e^{-\lambda x_1}(\mu u_{x_1}-u_{x_3})Lu\,dx\geqq\int_G e^{-\lambda x_1}\Phi(x)dx=\int_K e^{-\lambda x_1}\Phi(x)dx+\int_{G\setminus K}e^{-\lambda x_1}\Phi(x)dx,$$

где

$$\Phi(x)=(\lambda k(\mu-1)-k'+2\mu a_1-4a_1^2/\varepsilon_0-\varepsilon_0/2-4\mu^2a_2^2/\varepsilon_0)u_{x_1}^2$$

$$+(\lambda\mu l_1+l_1'-\varepsilon_0/2)u_{x_2}^2+(l_2^1-\varepsilon_0/2+\lambda l_2(\mu-k/l_2)-4a_2^2/\varepsilon_0)u_{x_3}^2$$

$$+(\lambda-4\mu^2c^2/\varepsilon_0-4/\varepsilon_0-4c^2/\varepsilon_0)u^2.$$

Выбираем $\mu>0$ столь большим, что $-k'+2\mu a_1-4a_1^2/\varepsilon_0\geqq\varepsilon_0$, $\forall x\in K$, $\mu>\max(1,\ \sup_{x_3\in[0,\ \delta_0]}|k(x_3)/l_2(x_3)|)$ и фиксируем μ.

Очевидно, что если $|a_2(x)|$ достаточно мало в окрестности K плоскости Γ_3, то $\varepsilon_0/2-4\mu^2a_2^2/\varepsilon_0\geqq\varepsilon_0/3$, $\forall x\in K$.

Потом выбираем число $\lambda > 0$ столь большим, что

$$\lambda k(\mu-1)-k'+2\mu a_1-4a_1^2/\varepsilon_0-4\mu^2 a_2^2/\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_0, \quad \forall x \in \overline{G\setminus K},$$

$$\lambda\mu l_1+l_1' \geqq \varepsilon_0, \quad \forall x \in \overline{G\setminus K},$$

$$l_2'+\lambda l_2(\mu-k/l_2)-4a_2^2/\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_0, \quad \forall x \in \overline{G\setminus K},$$

$$\lambda-(4\mu^2 c^2+4+4c^2)/\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_0/2, \quad \forall x \in \bar{G}$$

и фиксируем λ.

Тогда из (12) получаем оценку

$$(e^{-\lambda x_1}(\mu u_{x_1}-u_{x_2}),\ Lu)_0 \geqq C\|u\|_1^2,$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x)$.

Отметим, что для задачи P доказательство леммы 1 проводится аналогичным образом.

2. Существование и единственность сильного решения. Имеет место следующая

Теорема 1. *Если выполняются условия леммы* 1, *то задача* M (P) *может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство. Из оценки (8) следует энергетическое неравенство

$$\|Lu\|_0 \geqq C\|u\|_1, \quad \forall u(x) \in C_M^2(\bar{G}) \quad (u(x) \in C_P^2(\bar{G})), \tag{13}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x)$. Из этого неравенства вытекает единственность сильного решения задачи M (P).

Следствие 1. *Если* $u(x)$ *сильное решение задачи* M (P), *то* $u(x) \in W_M^1(G)(u(x) \in W_P^1(G))$.

Теорема 2. *Если выполняются условия леммы* 1, *то существует слабое решение* $u(x) \in W_M^1(G)\,(u(x) \in W_P^1(G))$ *задачи* M (P) *для любой функции* $f(x) \in L_2(G)$.

Доказательство. Пусть $v(x) \in C_M^{2,*}(\bar{G})(v(x) \in C_P^{2,*}(\bar{G}))$ и $v(x)=0$ в окрестности Γ_3. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} e^{-\lambda x_2}(\mu u_{x_1}-u_{x_2})=v \text{ в } G, \\ u=0 \text{ на } \Gamma_1\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5 \ (u=0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } u_{x_2}=0 \text{ на } \Gamma_4\cup\Gamma_5). \end{cases}$$

Легко видеть, что эта задача имеет единственное решение $\tilde{u}(x) \in C_M^2(\bar{G})(\tilde{u}(x) \in C_P^2(\bar{G}))$. Тогда из (8) получаем

$$\|L^*v\|_{-1,M}\|\tilde{u}\|_1 \geqq (L^*v,\ \tilde{u})_0=(v,\ L\tilde{u})_0=(e^{-\lambda x_1}(\mu\tilde{u}_{x_1}-\tilde{u}_{x_2}),\ L\tilde{u})_0 \geqq C_1\|\tilde{u}\|_1^2.$$

Так как $\|\tilde{u}\|_1 \geqq C_2\|v\|_0$, отсюда получаем $\|L^*v\|_{-1,M} \geqq C\|v\|_0$ $(\|L^*v\|_{-1,P} \geqq C\|v\|_0)$ для каждой функции $v(x) \in C_M^{2,*}(\bar{G})(v(x) \in C_P^{2,*}(\bar{G}))$ и $v(x)=0$ в окрестности Γ_3. Из этого неравенства, как известно [10], вытекает существование слабого решения $u(x) \in W_M^1(G)(u(x) \in W_P^1(G))$ задачи M (P). Теорема 2 доказана.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Если выполняются условия леммы* 1, *то существует сильное решение* $u(x) \in W_M^1(G)(u(x) \in W_P^1(G))$ *задачи* M (P) *для любой функции* $f(x) \in L_2(G)$ *и слабое решение* $u(x) \in W_M^1(G)(u(x) \in W_P^1(G))$ *единственно.*

Доказательство проводится также, как в работах [2—7]. Сначала локализируем задачу. Обозначим $U_i=G_{i,\varepsilon'}=\{x\in R^3:\ \rho(x, G_i)<\varepsilon'\}$ $(i=1, 2)$, где $G_1=G\cap\{x:\ x_2<d_2/2\}$, $G_2=G\cap\{x:\ x_2>d_2/2\}$, $\rho(x, G_i)$ — расстояние от x до G_i и $0<\varepsilon'<d_2/4$. Пусть $\{\eta_1(x), \eta_2(x)\}$ — такие функции, что $\eta_i(x)\in C_0^\infty(R^3)$, $\operatorname{supp}\eta_i(x)\subset U_i$, $0\leq\eta_i(x)\leq 1$ для $x\in U_i$ и $\eta_i(x)=1$ для $x\in G_{i,\varepsilon'/2}$ $(i=1, 2)$. Очевидно $\partial_{x_2}\eta_i(x)=0$ на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$ $(i=1, 2)$. Пусть функция $\eta(x)\in C^\infty(R^3)$, $\eta(x)=0$ на $G_{\varepsilon'/8}=\{x\in R^3:\ \rho(x, G)<\varepsilon'/8\}$ и $\eta(x)+\eta_1(x)+\eta_2(x)>0$ $\forall x\in R^3$. Обозначим $\varphi_i(x)=\eta_i(x)/(\eta(x)+\eta_1(x)+\eta_2(x))$ $(i=1, 2)$. Легко видеть, что функции $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ образуют разбиение единицы для $\bar{G}$, соответствующим покрытию $\{U_1, U_2\}$, т. е. $\varphi_i(x)\in C_0^\infty(R^3)$, $\operatorname{supp}\varphi_i(x)\subset U_i$ $(i=1, 2)$, $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=1$ на $\bar{G}$. Очевидно $\partial_{x_2}\varphi_i(x)=0$ на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$ $(i=1, 2)$.

Нетрудно установить, что если $u(x)\in W_M^1(G)$ $(u(x)\in W_P^1(G))$ — слабое решение задачи M (P), то функции $u_i=\varphi_i u$ $(i=1, 2)$ являются слабыми решениями задачи M (P) для уравнения $Lu_i=f_i$, где

$$f_i=\varphi_i f+2(k\partial_{x_1}\varphi_i\,.\,u_{x_1}-l_1\partial_{x_2}\varphi_i\,.\,u_{x_2}-l_2\partial_{x_3}\varphi_i\,.\,u_{x_3})+uL\varphi_i-c\varphi_i u. \tag{14}$$

Если докажем, что функции u_i являются сильными решениями задачи M (P) для уравнения (14), то функция $u=u_1+u_2$ будет сильным решением задачи M (P).

Рассмотрим задачу P. Без ограничения общности можно предполагать, что $c(x)=a_2(x)=0$ в G. Действительно, если $u(x)\in W_P^1(G)$ — слабое решение задачи P для уравнения (1), то $u(x)$ — слабое решение задачи P для уравнения

$$L_1u=ku_{x_1x_1}-l_1u_{x_2x_2}-(l_2u_{x_3})_{x_3}+a_1u_{x_1}=\Phi(x), \tag{15}$$

где $\Phi(x)=f(x)-a_2u_{x_2}-cu$, $\Phi(x)\in L_2(G)$. Допустим, что $u(x)$ — сильное решение задачи P для уравнения (15), т. е. существует последовательность функций $u_s(x)\in C_P^2(\bar{G})$ $(s=1, 2, \dots)$, такие, что $\|u_s-u\|_0+\|L_1u_s-\Phi\|_0\to 0$ при $s\to\infty$. Тогда из оценки (13) для оператора L_1 получаем, что $\|u_s-u\|_1\to 0$ при $s\to\infty$. Следовательно, $\|u_s-u\|_0+\|Lu_s-f\|_0\to 0$ при $s\to\infty$, т. е. $u(x)$ — сильное решение задачи P для уравнения (1).

Пусть $\operatorname{supp}u_1\subset U_1$. Обозначим $G_1'=U_1\cap G$, $\Gamma_i'=U_1\cap\Gamma_i$ $(i=1, 2, 3)$, $G_1'^*$ и $\Gamma_i'^*$ — зеркальные отражения G_1' и Γ_i' через $x_2=0$, $\Omega=G_1'\cup G_1'^*$. Пусть $\tilde{u}_1(x)$ $\tilde{f}_1(x)$, $\tilde{a}_1(x)$ — четные продолжения функций $u_1(x)$, $f_1(x)$, $a_1(x)$ через $x_2=0$, т. е.

$$\tilde{u}_1(x)=\begin{cases} u_1(x_1,\ x_2,\ x_3), & x\in\bar{G}_1' \\ u_1(x_1,\ -x_2,\ x_3), & x\in\bar{G}_1'^* \end{cases}$$

и аналогично для $\tilde{f}_1(x)$ и $\tilde{a}_1(x)$.

Очевидно, $\tilde{u}_1(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\tilde{f}_1(x)\in L_2(\Omega)$ и дифференциальный оператор $\tilde{L}=k\partial_{x_1}^2-l_1\partial_{x_2}^2-\partial_{x_3}(l_3\partial_{x_3})+\tilde{a}_1\partial_{x_1}$ имеет частично-гладкие коэффициенты. Нетрудно установить, что для каждой функции $v(x)\in C^2(\Omega)$, $v(x)=0$ на Γ_2' $\cup\,\Gamma_2'^*$ и $v(x)=0$ в окрестности $\Gamma_3'\cup\Gamma_3'^*$ выполнено

$$(\tilde{u}_1,\ \tilde{L}^*v)_{L_2(\Omega)}=(\tilde{f}_1,\ v)_{L_2(\Omega)}. \tag{16}$$

где $\tilde{L}^* = k\partial^2_{x_1} - l_1\partial^2_{x_2} - \partial_{x_3}(l_2\partial_{x_3}) - \partial_{x_1}\tilde{a}_1$. Действительно, пусть $\tilde{v}(x) = v(x_1, x_2, x_3) + v(x_1, -x_2, x_3)$, $x \in \bar{G}'_1$. Очевидно $\tilde{v}(x) \in C^2(\bar{G}'_1)$, $\tilde{v}(x) = 0$ на Γ'_2, $\partial_{x_2}\tilde{v}(x) = 0$ на Γ_4 и $\tilde{v}(x) = 0$ в окрестности Γ'_3. Тогда получаем

$$(\tilde{u}_1, \tilde{L}^* v)_{L_2(\Omega)} = (u_1, L^*\tilde{v})_{L_2(G'_1)} = (f_1, \tilde{v})_{L_2(G'_1)} = (\tilde{f}_1, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Отметим, что уравнение Γ_1 имеет вид $x_1 = F(x_3)$, где $F(x_3) = \int_0^{x_3}\sqrt{k(t)/l_2(t)}\,dt$ и удовлетворяет в $[0, d_3]$ условию Липшица

$$|F(x'_3) - F(x''_3)| \leq E|x'_3 - x''_3|, \quad E = \text{const} > 0.$$

Тогда $\Omega = \{x \in R^3 : F(x_3) \leq x_1 \leq -F(x_3) + d_1, \ -d_2/2 - \varepsilon' \leq x_2 \leq d_2/2 + \varepsilon', \ x_3 \geq 0\}$. Пусть $j(s)$ — бесконечно дифференцируемая в интервале $-\infty < s < +\infty$ функция, удовлетворяющая следующим условиям: $j(-s) = j(s)$, $j(s) \geq 0$, $j(s) = 0$ для $|s| \geq 1$ и $\int_{-1}^{1} j(s)ds = 1$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор осреднения

$$J_\varepsilon\tilde{u}_1(x) = \int_\Omega \varepsilon^{-3} j((x_1 - y_1)/\varepsilon - 3E - 2) j((x_2 - y_2)/\varepsilon) j((x_3 - y_3)/\varepsilon + 2)\tilde{u}_1(y)dy, \tag{17}$$

где E — константа Липшица. Как известно, $J_\varepsilon\tilde{u}_1(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\|J_\varepsilon\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если $v(x)$ — произвольная функция из $L_2(\Omega)$, то функция $J^*_\varepsilon v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условиям $J^*_\varepsilon v(x) = 0$ на $\Gamma'_2 \cup \Gamma'^*_2$, $J^*_3 v(x) = 0$ в окрестности $\Gamma'_3 \cup \Gamma'^*_3$. Тогда из (16) имеем

$$(\tilde{u}_1, \tilde{L}^* J^*_\varepsilon v)_{L_2(\Omega)} = (\tilde{f}_1, J^*_\varepsilon v)_{L_2(\Omega)}.$$

Дальше поступаем также, как в указанных выше работах.

Аналогично рассматривается случай, когда $\operatorname{supp} u_2 \subset U_2$.

Если рассматриваем задачу M, доказательство проводится аналогичным образом, однако здесь $u_1(x)$ и $f_1(x)$ продолжаем нечетно, а $a_1(x)$ — четно через $x_2 = 0$. Осредняющий оператор имеет вид (17).

Замечание 1. Отметим, что аппроксимирующая сильное решение задачи M последовательность состоит из функций $u_n(x) \in C^\infty_M(\bar{G})$, которые аннулируются в окрестности Γ_1 и $(u_n)_{x_2x_2} = 0$ на $\Gamma_4 \cup \Gamma_5$, а аппроксимирующая сильное решение задачи P последовательность состоит из функций $u_n(x) \in C^\infty_P(\bar{G})$, которые аннулируются в окрестности Γ_1.

Следствие 2. *Если выполняются условия леммы* 1, *то для любой функции* $g(x) \in L_2(G)$ *существует единственное сильное решение* $v(x) \in W^{1,*}_M(G)(v(x) \in W^{1,*}_P(G))$ *задачи* (4), (5) (*задачи* (6), (7)).

Следствие 3. *Если выполняются условия леммы* 1, *то каждое слабое решение* $u(x) \in L_2(G)$ *задачи* M (P) *является сильным и, следовательно, принадлежит* $W^1_M(G)(W^1_P(G))$.

3. Гладкость сильного решения. В этом пункте используем метод исследования в работах [3, 4]. Обозначим через $W^{(n)}(G)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ множество функций $u(x) \in L_2(G)$, для которых $\partial^p_{x_1}\partial^q_{x_2}u(x) \in L_2(G)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, $q = 0, 1, \ldots, n$, $p + q \leq n$ и $l_2^{r-1}\partial^p_{x_1}\partial^q_{x_2}\partial^r_{x_3}u(x) \in L_2(G)$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, $r = 1, 2, \ldots, n$, $p + q + r \leq n$ (здесь производные понимаются в обобщенном смысле).

Далее будем предполагать, что выполнены условия леммы 1.

Лемма 2. *Если равенство* $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ *выполняется для функций* $v(x)\in C_M^{\infty,*}(\bar G)$, *которые аннулируются в окрестности* Γ_2 *и* $V_{x_2x_2}=0$ *на* $\Gamma_4\cup\Gamma_5$, *то функция* $u(x)\in L_2(G)$ *является сильным решением задачи* M *и* $u(x)\in W_M^1(G)$.

Доказательство. Из следствия 2 и замечания 1 для каждой функции $v(x)\in C_M^{2,*}(\bar G)$ и $v(x)=0$ в окрестности Γ_3 существует последовательность функций $v_s(x)\in C_M^{\infty,*}(\bar G)$, $v_s(x)=0$ в окрестности Γ_2, $(v_s)_{x_2x_2}=0$ на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$ и $\|v-v_s\|_0\to 0$, $\|L^*v-L^*v_s\|_0\to 0$ при $s\to\infty$. По предположению леммы 2 для $v_s(x)$ выполнено равенство $(u, L^*v_s)_0=(f, v_s)_0$. С помощью предельного перехода при $s\to\infty$ получаем $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ для каждой функции $v(x)\in C_M^{2,*}(\bar G)$ и $v(x)=0$ в окрестности Γ_3.

Следовательно, $u(x)\in L_2(G)$ является слабым решением задачи M.

Дальше, используя следствие 3, завершаем доказательство леммы 2.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3. *Если равенство* $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ *выполняется для функций* $v(x)\in C_P^{\infty,*}(\bar G)$, *которые аннулируются в окрестности* Γ_2, *то функция* $u(x)\in L_2(G)$ *является сильным решением задачи* P *и* $u(x)\in W_P^1(G)$.

Лемма 4. *Пусть* $f(x)\in W_2^1(G)$, $f(x)=0$ *на* $\Gamma_4\cup\Gamma_5$, $a_i(x)\in C^2(\bar G)$ $(i=1, 2)$, $a_2(x)=0$ *на* $\Gamma_4\cup\Gamma_5$, $c(x)\in C^1(\bar G)$. *Если* $u(x)\in W_M^1(G)$ — *сильное решение задачи* M *для уравнения* $Lu=f$, *то* u_{x_2} — *сильное решение задачи* P *для уравнения*

$$Lw=f_2(x)=f_{x_2}-(a_1)_{x_2}u_{x_1}-(a_2)_{x_2}u_{x_2}-c_{x_2}u \tag{18}$$

и $u_{x_2}\in W_P^1(G)$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать равенство $(u_{x_2}, L^*v)_0=(f_2, v)_0$ только для тех $v(x)\in C_P^{\infty,*}(\bar G)$, которые аннулируются в окрестности Γ_2. Нетрудно установить, что $v_{x_2}\in C_M^{\infty,*}(\bar G)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}(u_{x_2}, L^*v)_0&=-(u, (L^*v)_{x_2})_0=-(u, L^*(v_{x_2}))_0+(u, L^*(v_{x_2})-(L^*v)_{x_2})_0\\&=(f_{x_2}-(a_1)_{x_2}u_{x_1}-(a_2)_{x_2}u_{x_2}-c_{x_2}u, v)_0=(f_2, v)_0.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Аналогичным образом доказываются следующие две леммы.

Лемма 5. *Пусть* $f(x)\in W_2^1(G)$ *и для коэффициентов* $a_1(x)$, $a_2(x)$ *и* $c(x)$ *выполнены условия леммы* 4. *Тогда, если* $u(x)\in W_P^1(G)$ — *сильное решение задачи* P *для уравнения* $Lu=f$, *то* u_{x_2} — *сильное решение задачи* M *для уравнения* (18) *и* $u_{x_2}\in W_M^1(G)$.

Лемма 6. *Пусть* $f(x)\in W_2^1(G)$, $f(x)=0$ *на* Γ_1, $a_i(x)\in C^2(\bar G)$ $(i=1, 2)$, $c(x)\in C^1(\bar G)$. *Тогда, если* $u(x)\in W_M^1(G)(u(x)\in W_P^1(G))$ — *сильное решение задачи* M (P) *для уравнения* $Lu=f$, *то* u_{x_1} — *сильное решение задачи* M (P) *для уравнения*

$$Lw=f_1(x)=f_{x_1}-(a_1)_{x_1}u_{x_1}-(a_2)_{x_1}u_{x_2}-c_{x_1}u \tag{19}$$

и $u_{x_1}\in W_M^1(G)$ $(u_{x_1}\in W_P^1(G))$.

Пусть $t\in\mathbb{R}$. Обозначим через $[t]$ целую часть от t. Имеют место следующие две теоремы о гладкости сильного решения.

Теорема 4. *Пусть*

$$k(x_3) \in C^{\max(1,\ m-1)}[0,\ d_3],\ l_1(x_3) \in C^{\max(1,\ m-1)}[0,\ d_3],$$

$$l_2(x_3) \in C^{m+1}[0,\ d_3],\ a_1(x) \in C^{\max(2,\ m)}(\bar{G}),$$

$$a_2(x) \in C^{\max(2,\ m)}(\bar{G}),\ c(x) \in C^m(\bar{G}),\quad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$\begin{cases} \partial_{x_2}^{2p} a_2 |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ [(m-1)/2]), \\ \partial_{x_2}^{2p-1} a_1 |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = \partial_{x_2}^{2p-1} c |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ [(m-1)/2];\ m \geq 3), \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} f(x) \in W^{(m)}(G),\ \partial_{x_1}^p f |_{\Gamma_1} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1), \\ \partial_{x_2}^{2p} f |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ [(m-1)/2]). \end{cases}$$

Тогда задача M *имеет единственное сильное решение* $u(x)$, *такое, что*

$$(21)\qquad \begin{cases} u(x) \in W^{(m+1)}(G),\ \partial_{x_1}^p u |_{\Gamma_1} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ m) \\ \partial_{x_2}^{2p} u |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ [m/2]). \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть*

$$k(x_3) \in C^{\max(1,\ m-1)}[0,\ d_3],\ l_1(x_3) \in C^{\max(1,\ m-1)}[0,\ d_3],$$

$$l_2(x_3) \in C^{m+1}[0,\ d_3],\ a_1(x) \in C^{\max(2,\ m)}(\bar{G}),$$

$$a_2(x) \in C^{\max(2,\ m)}(\bar{G}),\ c(x) \in C^m(\bar{G}),\quad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$\begin{cases} \partial_{x_2}^{2p} a_2 |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ \max(0,\ [m/2]-1)), \\ \partial_{x_2}^{2p-1} a_1 |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = \partial_{x_2}^{2p-1} c |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ [m/2];\ m \geq 2), \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} f(x) \in W^{(m)}(G),\ \partial_{x_1}^p f |_{\Gamma_1} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1), \\ \partial_{x_2}^{2p-1} f |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ [m/2];\ m \geq 2). \end{cases}$$

Тогда задача P *имеет единственное сильное решение* $u(x)$, *которое удовлетворяет*

$$\begin{cases} u(x) \in W^{(m+1)}(G),\ \partial_{x_1}^p u |_{\Gamma_1} = 0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ m), \\ \partial_{x_2}^{2p-1} u |_{\Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ [(m+1)/2]). \end{cases}$$

Теорему 4 и теорему 5 докажем одновременно индукцией по m.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что из предположений теоремы 4 (теоремы 5) для коэффициентов уравнения (1) при $m+1$ следуют предположения теоремы 5 (теоремы 4) для коэффициентов при m.

Из теоремы 3 следует, что задача M (P) имеет единственное сильное решение $u(x) \in W_M^1(G)(u(x) \in W_P^1(G))$ для любой функции $f(x) \in L_2(G)$.

Докажем теорему 4 в случае $m=1$. Из леммы 4 и леммы 6 вытекает, что $u_{x_1x_i}\in L_2(G)$, $u_{x_2x_i}\in L_2(G)$ $(i=1, 2, 3)$ и $u_{x_1}=0$ на Γ_1. С помощью равенства $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$, $\forall v(x)\in C_0^\infty(G)$ после интегрирования по частям получаем $(l_2u, v_{x_3x_3})=(\Phi_1, v)$, $\forall v(x)\in C_0^\infty(G)$, где $\Phi_1(x)=ku_{x_1x_1}-l_1u_{x_2x_2}+a_1u_{x_1}+a_2u_{x_2}+(l_2'u)_{x_3}+cu-f$, $\Phi_1(x)\in L_2(G)$.

Следовательно, существует обобщенная производная $(l_2u)_{x_3x_3}\in L_2(G)$, откуда получаем, что существует обобщенная производная $l_2u_{x_3x_3}\in L_2(G)$.

Следовательно, $u(x)\in W^{(2)}(G)$, и тем самым теорема 4 доказана в случае $m=1$.

Аналогичным образом доказывается теорема 5 при $m=1$.

Дальше легко проверяется, что теорема 4 и теорема 5 справедливы при $m=2$, 3.

Предположим, что для m теорема 4 и теорема 5 доказаны и докажем их для $m+1$. Пусть выполнены условия теоремы 4 при $m+1$, а, следовательно, и при m. Тогда сильное решение $u(x)$ задачи М удовлетворяет (21). Из леммы 4 следует, что $u_{x_2}\in W_P^1(G)$ — сильное решение задачи Р для уравнения (18).

Теперь установим, что $f_2(x)$ удовлетворяет условия (22) теоремы 5 при m. Действительно, из $u(x)\in W^{(m+1)}(G)$, $f(x)\in W^{(m+1)}(G)$ и гладкости коэффициентов $a_i(x)$ $(i=1, 2)$ и $c(x)$ следует, что $f_2(x)\in W^{(m)}(G)$. Из $\partial_{x_1}^p u|_{\Gamma_1}=0$ и $\partial_{x_1}^p f|_{\Gamma_1}=0$ для $p=0, 1, \ldots, m$ следует, что $\partial_{x_1}^p f_2|_{\Gamma_1}=0$ для $p=0, 1, \ldots, m-1$. Рассмотрим

$$\partial_{x_2}^{2p-1} f_2(x)=\partial_{x_2}^{2p-1} f_{x_2}-\partial_{x_2}^{2p-1}(a_{1x_2}u_{x_1})-\partial_{x_2}^{2p-1}(a_{2x_2}u_{x_2})-\partial_{x_2}^{2p-1}(c_{x_2}u),$$

где $p=1, 2, \ldots, [m/2]$. Из предположений индукции следует, что $\partial_{x_2}^{2p-1}f_{x_2}=0$ на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$. Имеем

$$\partial_{x_2}^{2p-1}(a_{1x_2}u_{x_1})=\sum_{l=0}^{2p-1}\binom{2p-1}{l}\partial_{x_2}^{l+1}a_1\cdot\partial_{x_2}^{2p-l-1}u_{x_1}=0$$

на $\Gamma_4\cup\Gamma_5$, так как если l четное, то $\partial_{x_2}^{l+1}a_1|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0$, а если l нечетное, то $\partial_{x_2}^{2p-l-1}u_{x_1}|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0$. Аналогично проверяется, что

$$\partial_{x_2}^{2p-1}(a_{2x_2}u_{x_2})|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=\partial_{x_2}^{2p-1}(c_{x_2}u)|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0.$$

Таким образом получили, что $\partial_{x_2}^{2p-1}f_2(x)|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0$.

Следовательно для уравнения (18) справедливы все условия теоремы 5 при m. Тогда

$$(23)\qquad \begin{cases} u_{x_2}(x)\in W^{(m+1)}(G)\\ \partial_{x_2}^{2p}u(x)|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0 \quad (p=1, 2, \ldots, [(m+1)/2]).\end{cases}$$

Дальше из леммы 6 следует, что $u_{x_1}\in W_M^1(G)$ — сильное решение задачи М для уравнения (19). Как выше, проверяется, что $f_1(x)$ удовлетворяет условия (20) теоремы 4 при m и, следовательно,

$$(24)\qquad \begin{cases} u_{x_1}\in W^{(m+1)}(G)\\ \partial_{x_1}^p u|_{\Gamma_1}=0 \quad (p=0, 1, \ldots, m+1).\end{cases}$$

Теперь из (23), (24) и уравнения (1) следует, что существует обобщенная производная $l_2^{m+1}\partial_{x_3}^{m+2}u(x)\in L_2(G)$.

Итак, получили, что

$$\begin{cases} u(x)\in W^{(m+2)}(G), \\ \partial_{x_1}^p u(x)|_{\Gamma_1}=0 \quad (p=0,\ 1,\ \dots,\ m+1), \\ \partial_{x_2}^{2p} u(x)|_{\Gamma_4\cup\Gamma_5}=0 \quad (p=0,\ 1,\ \dots,\ [(m+1/2])\end{cases}$$

Этим теорема 4 доказана для $m+1$. Аналогичным образом доказывается теорема 5 для $m+1$.

Следовательно, теорема 4 и теорема 5 доказаны.

Замечание 2. Как в [3, 4], можно обобщить теорему 4 и теорему 5, заменяя условие $\partial_{x_1}^p f|_{\Gamma_1}=0$, $p=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$ менее ограничительным условием $\partial_{x_1}^p f\Big|_{\Gamma_1''}=0$, $p=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$, где $\Gamma_1''\subset\Gamma_1$ — малая окрестность $\Gamma_1\cap\Gamma_3$, но добавляя более сильные условия для гладкости $f(x)$ в окрестности Γ_1.

Отметим, что краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений, вся главная часть которых вырождается, мало исследованы. Такие задачи рассмотрены в работах А. В. Бицадзе, А. М. Нахушева [1], Н. И. Попиванова [6—8] и автора [9].

В заключение я хочу выразить искреннюю благодарность Г. Д. Каратопраклиеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **204**, 1972, 1289—1291.
2. Г. Д. Каратопраклиев. К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений, Докторская диссертация, Москва, 1972.
3. Г. Д. Дачев. Гранични задачи за частни диференциални уравнения от смесен тип. Канд. диссертация, София, 1979.
4. Г. Д. Дачев. Краевые задачи для одного класса гиперболо-параболических уравнений. *Доклады БАН*, **32**, 1979.
5. Н. Г. Сорокина. К обобщенной разрешимости граничных задач для уравнений смешанного типа. Применение функционального анализа к задачам математической физики, Киев, 1973.
6. Н. И. Попиванов. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений. *Дифференц. уравн.*, **14**, 1978, 80—93.
7. Н. И. Попиванов. Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. В сб. *Математика и математическо образование*, **7**, София, 1978, 438—448.
8. Н. И. Попиванов. Некоторые краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях. *Доклады АН СССР*, **243**, 1978, 584—587.
9. Р. И. Семерджиева. Об одной краевой задаче для вырождающегося гиперболического уравнения. *Доклады БАН*, **33**, 1980.
10. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.

Единый центр математики и механики 1090 София П. Я. 373

Поступила 6.10.1980