Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ, 2

ГЕОРГИ К. ГЕНОВ, ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

Эта работа является второй частью статьи под тем же названием [9]. Мы строим независимую систему из пятнадцати тождеств алгебры $M_4(K)$ и, используя результаты первой части, проверяем, что эта система является базисом тождеств алгебры $M_4(K)$.

Здесь, во втором параграфе, мы указываем некоторые тождества, выполняющиеся в алгебре $M_4(K)$ матриц порядка 4 над конечным полем $K=GF(q)$. Используя результаты первой части работы, в третьем параграфе мы проверяем, что пятнадцать из этих тождеств образуют независимую систему и что эта система является базисом тождеств алгебры $M_4(K)$. Точнее, мы получаем следующий основной результат.

Теорема. *Система тождеств* $F_1=0$, $F_1^t=0$, $F_2=0$, $F_2^t=0$, $F_3=0$, $F_4=0$, $F_5=0$, $F_5^t=0$, $F_6=0$, $F_7=0$, $F_8=0$, $F_8^t=0$, $F_9=0$, $F_9^t=0$, $F_{10}=0$ *независима и является базисом тождеств алгебры* $M_4(K)$ *матриц четвертого порядка над конечным полем* K *из* q *элементов.*

Эти пятнадцать тождеств вместе с тождеством $px=0$ ($p=\mathrm{char}\,K$) образуют базис тождеств кольца $M_4(K)$, но мы приводим доказательство только для случая алгебр над полем K. В указанном базисе любое из тождеств $F_3=0$ и $F_4=0$ может быть заменено на его транспонированное, соответственно, $F_3^t=0$ и $F_4^t=0$.

2. Пусть $u=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ — одночлен из свободной ассоциативной алгебры $K\langle X\rangle$ счетного ранга и со свободными образующими $x_1, x_2, \dots$ (которые часто будем обозначать и другими буквами). Будем говорить, что одночлен $u^t=x_{i_n}x_{i_{n-1}}\dots x_{i_1}$ является транспонированным к одночлену u. Многочлен f^t будем называть транспонированным к многочлену f, если он получается из f заменой всех одночленов в записи f на транспонированные с ними.

Через e_{ij} будем обозначать матричные единицы алгебры $M_4(K)$, а $e=\Sigma_{i=1}^n e_{ii}$ — единица этой алгебры.

Пусть $g(x)=(x^{q^2}-x)(x^{q^3}-x)\dots(x^{q^n}-x)$. Через $F_1(n, q, x, y)$ мы будем обозначать многочлен

$$(1)\qquad g(x)\,[1-(y(\mathrm{ad}\,x)^{n-1})^{q-1}]\,[1-(y(\mathrm{ad}\,x)^{n-2})^{q-1}]\dots[1-(y\,\mathrm{ad}\,x)^{q-1}]\,(y^{q}-y),$$

где $y\,\mathrm{ad}\,x=[y, x]=yx-xy$. Для краткости, при $n=4$ будем обозначать $F_1(4, q, x, y)$ через F_1.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 351—366.

Предложение 2.1 [2, предложение 1.4]. *Тождество* $F_1(n, q, x, y)=0$ *выполняется в алгебре* $M_n(K)$ *матриц порядка* n *над полем* $K=GF(q)$.

Очевидно транспонированный многочлен $F_1^t(n, q, x, y)$ совпадает с многочленом

$$(2)\qquad (y^q-y)[1-(y\,\mathrm{ad}\,x)^{q-1}][1-(y(\mathrm{ad}\,x)^2)^{q-1}]\dots[1-(y(\mathrm{ad}\,x)^{n-1})^{q-1}]g(x).$$

Из предшествующего предложения и из [2, лемма 1.1] непосредственно вытекает

Следствие 2.2. *Тождество* $F_1^t(n, q, x, y)=0$ *выполняется в алгебре* $M_n(K)$ *матриц порядка* n *над полем* $K=GF(q)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только тождества алгебры $M_4(K)$.

Обозначим

$$(3)\qquad \tau=\tau(x)=(x^{q^4}-x^q)^{3-1},$$

$$(4)\qquad \sigma=\sigma(x)=(x^{q^3}-x^q)^{4-1}.$$

Рассмотрим, какие значения принимают эти многочлены в алгебре $M_4(K)$. Пусть $f(x)$ — характеристический многочлен матрицы a из $M_4(K)$. Возможны следующие случаи:

(А) $f(x)$ — многочлен, неприводимый над K четвертой степени,

(В) $f(x)$ — произведение неприводимого над K многочлена степени 3 на многочлен степени 1 над K,

(С) $f(x)$ — произведение двух неприводимых над K многочленов степени два,

(Д) $f(x)$ — произведение одного неприводимого над K многочлена степени два и двух многочленов степени один,

(Е) $f(x)$ разлагается на линейные множители над K.

В случаях (А), (С), (Д), (Е) многочлен $f(x)$ делить $\tau(x)$ и, следовательно, $\tau(a)=0$. В случае (В) матрица a подобна (над полем $K_3=GF(q^3)$) жордановой матрице вида $\alpha e_{11}+\beta e_{22}+\gamma e_{33}+\delta e_{44}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in K_3\setminus K$, $\delta\in K$. Тогда $\tau(a)$ подобна над K матрице $e_{11}+e_{22}+e_{33}$.

В случаях (В) и (Е) многочлен $f(x)$ делит $\sigma(x)$ и, следовательно, $\sigma(a)=0$. В случае (А) матрица a подобна (над полем $K_4=GF(q^4)$) матрице вида $\Sigma_{i=1}^4\alpha_i e_{ii}$, где $\alpha_i\in K_4\setminus K$ $(i=1, 2, 3, 4)$. Тогда $\sigma(a)=e=\Sigma_{i=1}^4 e_{ii}$. Аналогичным способом проверяется, что в случае (С) мы имеем также $\sigma(a)=e$. В случае (Д) матрица a подобна (над полем $K_2=GF(q^2)$) матрице вида $\alpha e_{11}+\beta e_{22}+\gamma e_{33}+\delta e_{44}$ или $\alpha e_{11}+\beta e_{22}+\gamma e_{33}+\delta e_{44}+e_{34}$, где $\alpha, \beta\in K_2\setminus K$; $\gamma, \delta\in K$. Тогда $\sigma(a)$ подобна над K матрице $e_{11}+e_{22}$. Таким образом мы получили

Лемма 2.3. *Если* $a\in M_4(K)$, *то* $\tau(a)=0$ *или* $\tau(a)$ — *матрица, подобная над* K *матрице* $e_{11}+e_{22}+e_{33}$; $\sigma(a)=0$, e *или* $\sigma(a)$ *подобна над* K *матрице* $e_{11}+e_{22}$.

Замечание 2.4. Если $b\in M_4(K)$, а $f(x)$ — многочлен вида (В), то $\tau(a)\,b\tau(a)$ подобна матрице (α_{ij}), для которой выполняются равенства $\alpha_{i4}=\alpha_{4i}=0$ $(i=1, 2, 3, 4)$, а $(1-\tau(a))xb(1-\tau(a))$ подобна матрице вида αe_{44}, $\alpha\in K$. При этом можно осуществить одновременно подобие между матрицами двух пар. Если $f(x)$ — многочлен вида (Д), то $\sigma(a)\,b\sigma(a)$ (соответственно $(1-\sigma(a))\times b(1-\sigma(a)))$ подобна матрице, в которой 3 и 4 строка и 3 и 4 столбец (соответственно, 1 и 2 строка и 1 и 2 столбец) — нулевые.

Из леммы 2.3 мы получаем

Предложение 2.5. *Тождество*

$$F_5 = F_5(x, y) = \tau y \sigma = 0 \tag{5}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Действительно, если $a \in M_4(K)$, то $\tau(a) \neq 0$ только в случае (B), но тогда $\sigma(a) = 0$.

Следствие 2.6. *Тождество*

$$F_5^t = F_5^t(x, y) = \sigma y \tau = 0 \tag{6}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Предложение 2.7. *Тождество*

$$F_7 = F_7(x, y, z) = [(1-\tau) y \tau z (1-\tau)]^q - (1-\tau) y \tau z (1-\tau) \tag{7}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Доказательство. Пусть $g(x, y, z) = (1-\tau) y \tau z (1-\tau)$. Если $a, b, c \in M_4(K)$, то в силу леммы 2.4 и замечания 2.5 матрица $g(a, b, c)$ — нулевая матрица или подобна матрице αe_{14}, $\alpha \in K$. Но в обоих случаях мы имеем $F_7(a, b, c) = (g(a, b, c))^q - g(a, b, c) = 0$.

Предложение 2.8. *Тождество*

$$F_8 = F_8(x, y, z) = \tau y [((1-\tau) z (1-\tau))^q - (1-\tau) z (1-\tau)] \tag{8}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Действительно, как и выше, если $\tau(a) \neq 0$, то

$$((1-\tau(a)) c (1-\tau(a)))^q - (1-\tau(a)) c (1-\tau(a)) = 0, \quad a, c \in M_4(K).$$

Следствие 2.9. *Тождество*

$$F_8^t = F_8^t(x, y, z) = [((1-\tau) z (1-\tau))^q - (1-\tau) z (1-\tau)] y \tau \tag{9}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Предложение 2.10. *Тождество*

$$F_2 = F_2(x, y, z, t) = (y_1^{q^2} - y_1)(1 - [y_1, z_1]^{q-1})(y_1^q - y_1) t (1-\sigma), \tag{10}$$

где $y_1 = \sigma y \sigma$, $z_1 = \sigma z \sigma$, *выполняется в алгебре* $M_4(K)$.

Доказательство. Пусть $a, b, c, d \in M_4(K)$. Если $\sigma(a) = 0$ или e, то $F_2(a, b, c, d) = 0$. В остальных случаях, в силу замечания 2.4, матрицы $b_1 = \sigma(a) b \sigma(a)$ и $c_1 = \sigma(a) c \sigma(a)$ содержатся в подалгебре алгебры $M_4(K)$, изоморфной алгебре $M_2(K)$. Из предложения 2.1 снова получаем $F_2(a, b, c, d) = 0$.

Следствие 2.11. *Тождество*

$$F_2^t = F_2^t(x, y, z, t) = (1-\sigma) t (z_1^q - z_1)(1 - [y_1, z_1]^{q-1})(y_1^{q^2} - y_1) \tag{11}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Аналогичными рассуждениями проверяется, что справедливы следующие утверждения:

Предложение 2.12. *Тождество*

$$F_9 = F_9(x, y_1, y_2, y_3) = ((z_1 z_2)^{q^2} - z_1 z_2)(1 - [z_3, z_1 z_2]^{q-1})(z_3^q - z_3), \tag{12}$$

где $z_1=(1-\sigma)y_1\sigma$, $z_2=\sigma y_2(1-\sigma)$, $z_3=(1-\sigma)y_3(1-\sigma)$, *выполняется в алгебре* $M_4(K)$.

Следствие 2.13. *Тождество*

$$F_9^t=F_9^t(x,y_1,y_2,y_3)=(z_3^q-z_3)(1-[z_3,z_2^tz_1^t]^{q-1})((z_2^tz_1^t)^{q2}-z_2^tz_1^t), \tag{13}$$

где $z_1^t=\sigma y_1(1-\sigma)$, $z_2^t=(1-\sigma)y_2\sigma$, $z_3^t=z_3=(1-\sigma)y_3(1-\sigma)$,

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Следующие четыре тождества получаются более сложно и мы построим их в несколько шагов.

Пусть $\rho=\rho(x)=(x^{q^3-1}-1)(x^{q^2}-x)$,

$f_1(x,y)=(1-[\rho^2,y]^{q-1})\rho(1-[\rho^2,y]^{q-1})$,

$f_2(x,y)=(1-[\rho^2,y^2]^{q-1})f_1(x,y)(1-[\rho^2,y^2]^{q-1})$,

$f_3(x,y)=(1-[\rho,y]^{q-1})f_2(x,y)(1-[\rho,y]^{q-1})$,

$f_4(x,y)=(1-[\rho,y^2]^{q-1})f_3(x,y)(1-[\rho,y^2]^{q-1})$,

$H(3,q,x,y)=f_4(x,y)\psi(y)$,

где $\psi(y)=(y^{q^2}-y)(y^q-y)^2$.

Предложение 2.14 *Тождество*

$$F_4=F_4(x,y,z)=H(3,q,x_1,y_1)=0, \tag{14}$$

где $x_1=\tau(z)x\tau(z)$, $y_1=\tau(z)y\tau(z)$, *выполняется в алгебре* $M_4(K)$.

Действительно, предложение 1.11 работы [2] утверждает, что тождество $H(3,q,x,y)=0$ выполняется в алгебре $M_3(K)$. Поэтому предложение 2.14 следует из леммы 2.3 и замечания 2.4.

Приступим к построению следующего тождества. Пусть

$$\varphi=\varphi(y)=y-y^{q^{12}},$$

$$f_1(x,y)=(1-[\varphi^3,x]^{q-1})\varphi^2(1-[\varphi^3,x]^{q-1}),$$

$$f_2(x,y)=(1-[\varphi^2,x]^{q-1})f_1(x,y)(1-[\varphi^2,x]^{q-1}),$$

$$f_3(x,y)=(1-[\varphi^3,x^2]^{q-1})f_2(x,y)(1-[\varphi^3,x^2]^{q-1}),$$

$$f_4(x,y)=(1-[\varphi^2,x^2]^{q-1})f_3(x,y)(1-[\varphi^2,x^2]^{q-1}),$$

$$f_5(x,y)=(1-[\varphi,x]^{q-1})f_4(x,y)(1-[\varphi,x]^{q-1}),$$

$$F_6=F_6(x,y)=(x^q-x)f_5(x,y)(x^q-x).$$

Предложение 2.15. *Тождество*

$$F_6=0 \tag{15}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Доказательство. Подставим на месте x и y произвольные матрицы (которые для удобства будем обозначать также через x и y) алгебры $M_4(K)$. Матрица $\varphi(y)$ нильпотентна и если $\varphi^2(y)\neq 0$, возможны два случая:

I. $\varphi(y)$ подобна (и тогда мы можем считать ее равной) матрице $e_{12} + e_{23} + e_{34}$.

II. $\varphi(y)$ подобна (и тогда мы можем считать ее равной) матрице $e_{12} + e_{23}$.

Первый случай: $\varphi(y) = e_{12} + e_{23} + e_{34}$. Тогда $\varphi^2(y) = e_{13} + e_{24}$ и $\varphi^3(y) = e_{14}$. Пусть $x = (\alpha_{ij})$. Мы имеем

$$[\varphi^3(y), x] = \begin{pmatrix} \alpha_{41} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{41} \end{pmatrix}.$$

I.1. $\alpha_{41} \neq 0$. Тогда $f_1(x, y) = 0$.

I.2. $\alpha_{41} = 0$. Тогда $f_1(x, y) = e_{13} + e_{24}$,

$$[\varphi^2(y), x] = \begin{pmatrix} \alpha_{31} & * & * & * \\ 0 & \alpha_{42} & * & * \\ 0 & 0 & -\alpha_{31} & * \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{42} \end{pmatrix}.$$

I.2.1. $\alpha_{42} \neq 0 \neq \alpha_{31}$. Тогда $f_2(x, y) = 0$.

I.2.2. $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{42} \neq 0$. Тогда $f_2(x, y) = e_{13} + * e_{14}$, где $*$ — произвольный элемент поля K. Пусть $x^2 = (\beta_{ij})$. Мы имеем $\beta_{41} = \alpha_{42}\alpha_{21}$.

I.2.2.1. $\alpha_{21} \neq 0$ (мы имеем $\alpha_{42} \neq 0$). Тогда $f_3(x, y) = 0$.

I.2.2.2. $\alpha_{21} = 0$. Тогда $f_3(x, y) = e_{13} + * e_{14}$. Мы имеем

$$1 - [\varphi^2(y), x^2]^{q-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & \varepsilon & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0{,}1,$$

$$f_4(x, y) = e_{13} + * e_{14}, \ f_5(x, y) = \sum_{j=1}^{4} * e_{1j}, \ F_6(x, y) = 0.$$

I.2.3. $\alpha_{31} \neq 0$, $\alpha_{42} = 0$. Этот случай симметричен случаю I.2.2 и рассматривается аналогично.

I.2.4. $\alpha_{31} = \alpha_{42} = 0$. Мы имеем $f_1(x, y) = e_{13} + e_{24}$. Тогда $f_2(x, y) = e_{13} + e_{24} + * e_{14}$, $f_3(x,y) = l_{13} + e_{24} + * e_{14}$. Если $x^2 = (\beta_{ij})$, то $\beta_{31} = \alpha_{32}\alpha_{21}$, $\beta_{42} = \alpha_{43}\alpha_{32}$ и

$$[\varphi^2(y), x^2] = \begin{pmatrix} \alpha_{32}\alpha_{21} & * & * & * \\ 0 & \alpha_{43}\alpha_{32} & * & * \\ 0 & 0 & -\alpha_{32}\alpha_{21} & * \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{43}\alpha_{32} \end{pmatrix}.$$

I.2.4.1. $\alpha_{32} \neq 0$, $\alpha_{43} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$. Тогда $f_4(x, y) = 0$.

I.2.4.2. $\alpha_{32}=0$, $\alpha_{43}\neq 0$; $\alpha_{21}\neq 0$. Тогда $f_4(x, y)=e_{13}+e_{24}$,

$$[\varphi(y), x]=\begin{pmatrix} \alpha_{21} & * & * & * \\ 0 & -\alpha_{21} & * & * \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & * \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{43} \end{pmatrix}, \quad f_5(x, y)=0.$$

I.2.4.3. $\alpha_{32}\neq 0$, $\alpha_{43}=0$, $\alpha_{21}\neq 0$. Мы имеем $f_3(x, y)=e_{13}+e_{24}+*e_{14}$. Тогда $\beta_{31}=\alpha_{32}\alpha_{21}$ и

$$1-[\varphi^2(y), x^2]^{q-1}=\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_4(x, y)=e_{24}+*e_{14},$$

$$1-[\varphi(y), x]^{q-1}=\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_5(x, y)=*e_{14},$$

$$F_6(x, y)=0.$$

Делая аналогичные вычисления, можно рассмотреть и остальные случаи, а именно:

I.2.4.4. $\alpha_{32}\neq 0$, $\alpha_{43}\neq 0$, $\alpha_{21}=0$,

I.2.4.5. $\alpha_{32}\neq 0$, $\alpha_{43}=0$, $\alpha_{21}=0$,

I.2.4.6. $\alpha_{32}=0$, $\alpha_{43}=0$, $\alpha_{21}\neq 0$,

I.2.4.7. $\alpha_{32}=0$, $\alpha_{43}\neq 0$, $\alpha_{21}=0$,

I.2.4.8. $\alpha_{32}=0$, $\alpha_{43}=0$, $\alpha_{21}=0$.

Второй случай: $\varphi(y)=e_{12}+e_{23}$, $\varphi^2(y)=e_{13}$. Имея в виду, что в этом случае $\varphi^3(y)=0$, мы должны проверить только, что для любого выбора матрицы $x\in M_4(K)$ выполняется $g_4(x, y)=0$, где

$$g_1(x, y)=(1-[\varphi^2, x]^{q-1})\varphi^2(1-[\varphi^2, x]^{q-1}),$$

$$g_2(x, y)=(1-[\varphi^2, x^2]^{q-1})g_1(x, y)(1-[\varphi^2, x^2]^{q-1}),$$

$$g_3(x, y)=(1-[\varphi, x]^{q-1})g_2(x, y)(1-[\varphi, x]^{q-1}),$$

$$g_4(x, y)=(x^q-x)g_3(x, y)(x^q-x).$$

Мы имеем

$$[\varphi^2(y), x]=\begin{pmatrix} \alpha_{31} & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{31} & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

II.1. $\alpha_{31} \neq 0$. Тогда $g_1(x, y) = 0$.

II.2. $\alpha_{31} = 0$. Тогда $g_1(x, y) = e_{13}$, $\beta_{31} = \alpha_{32}\alpha_{21} + \alpha_{34}\alpha_{41}$, $g_2(x, y) = \varepsilon e_{13}$, $\varepsilon = 0, 1$,

$$[\varphi(y), x] = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & -\alpha_{32} & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.1. $\alpha_{21} \neq 0$ или $\alpha_{32} \neq 0$. Тогда $g_3(x, y) = 0$.

II.2.2. $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{32} = 0$. Тогда $\beta_{31} = \alpha_{34}\alpha_{41}$.

II.2.2.1. $\alpha_{34} \neq 0$, $\alpha_{41} \neq 0$. Тогда $g_2(x, y) = 0$.

II.2.2.2. $\alpha_{34} = 0$ или $\alpha_{41} = 0$. Тогда $g_3(x, y) = \varepsilon e_{13}$, $g_4(x, y) = 0$.

Этим все случаи рассмотрены, и предложение доказано.

Построим следующее тождество.

Пусть $\varphi = \varphi(x) = x - x^{q^{12}}$. Рассмотрим следующие полиномы:

$$f_1(x, y) = (1 - [y, \varphi^2, \varphi]^{q^2(q-1)})\varphi(1 - [y, \varphi^2, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_2(x, y) = (1 - [y, \varphi^2[^{q^2(q-1)})f_1(x, y)(1 - [y, \varphi^2]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_3(x, y) = (1 - [y, \varphi]^{q^2(q-1)})f_2(x, y)(1 - [y, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_4(x, y) = (1 - [y^2, \varphi^2, \varphi]^{q^2(q-1)})f_3(x, y)(1 - [y^2, \varphi^2, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_5(x, y) = (1 - [y^2, \varphi^2]^{q^2(q-1)})f_4(x, y)(1 - [y^2, \varphi^2]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_6(x, y) = (1 - [y^2, \varphi]^{q^2(q-1)})f_5(x, y)(1 - [y^2, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_7(x, y) = (1 - [y^3, \varphi]^{q^2(q-1)})f_6(x, y)(1 - [y^3, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$F_3 = F_3(x, y) = f_7(x, y)(y^{q^3} - y)(y^{q^2} - y)^3.$$

Предложение 2.16. *Тождество*

$$F_3 = 0 \tag{16}$$

выполняется в алгебре $M_4(K)$.

Доказательство. Подставим на месте x и y произвольные матрицы из $M_4(K)$ (которые будем обозначать также через x и y). Ясно, что $(y^{q^3} - y)(y^{q^2} - y)^3 \neq 0$ только тогда, когда характеристический многочлен матрицы y неприводим (четвертой степени) над K. Проверим, что в этом случае выполняется $f_7(x, y) = 0$.

Так как матрица $\varphi(x)$ нильпотентна, то она подобна (и мы можем считать ее равной) одной из следующих матриц: 1) $\varphi(x) = e_{12} + e_{23} + e_{34}$, 2) $\varphi(x) = e_{12} + e_{23}$, 3) $\varphi(x) = e_{12}$, 4) $\varphi(x) = e_{12} + e_{34}$.

Первый случай: $\varphi(x) = e_{12} + e_{23} + e_{34}$. Пусть $y = (\alpha_{ij})$. Мы имеем $\varphi^2(x) = e_{13} + e_{24}$,

$$[y, \varphi^2(x), \varphi(x)] = \begin{pmatrix} \alpha_{41} & * & * & * \\ 0 & -\alpha_{41} & * & * \\ 0 & 0 & -\alpha_{41} & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{41} \end{pmatrix}.$$

1. $\alpha_{41} \neq 0$. Тогда $f_1(x, y) = 0$.

2. $\alpha_{41} = 0$. Тогда $f_1(x, y) = \varphi(x) = e_{12} + e_{23} + e_{34}$.

В этом случае

$$[y, \varphi^2(x)] = \begin{pmatrix} -\alpha_{31} & * & * & * \\ 0 & -\alpha_{42} & * & * \\ 0 & 0 & \alpha_{31} & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{42} \end{pmatrix}.$$

2.1. $\alpha_{31} \neq 0$, $\alpha_{42} \neq 0$. Тогда $f_2(x, y) = 0$.

2.2. $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{42} \neq 0$. Тогда $f_2(x, y) = *e_{13} + e_{14}$ и

$$[y, \varphi(x)] = \begin{pmatrix} -\alpha_{21} & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha_{21} = 0$, то характеристический многочлен матрицы y был бы приводимым (даже имел бы корень в поле K). Следовательно, $\alpha_{21} \neq 0$ и первый столбец матрицы $1 - [y, \varphi(x)]^{q^2(q-1)}$ нулевой. Но тогда $f_3(x, y) = 0$.

2.3. $\alpha_{31} \neq 0$, $\alpha_{42} = 0$. Этот случай симметричен случаю 2.2 и рассматривается аналогично.

2.4. $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{42} = 0$. Тогда $f_2(x, y) = \varphi(x) = e_{12} + e_{23} + e_{34}$. Если некоторый из элементов α_{21}, α_{32}, α_{43} равен нулю, то характеристический многочлен матрицы y был бы приводимым. Следовательно, $\alpha_{21} \neq 0$, $\alpha_{32} \neq 0$, $\alpha_{43} \neq 0$. Если $y^2 = (\beta_{ij})$, то $\beta_{31} = \alpha_{32}\alpha_{21} \neq 0$, $\beta_{42} = \alpha_{43}\alpha_{32} \neq 0$ и $f_5(x, y) = 0$ или $f_6(x, y) = 0$.

Этим все подслучаи первого случая рассмотрены.

Рассуждения для второго случая, когда $\varphi(x) = e_{12} + e_{23}$, не отличаются по существу от рассуждений для первого случая, и мы их опускаем.

Третий и четвертый случай также аналогичны друг другу, и мы рассмотрим только третий, когда $\varphi(x) = e_{12}$. Так как $\varphi^2(x) = 0$, то мы должны проверить только, что $h_4(x, y) = 0$, где

$$h_1(x, y) = (1 - [y, \varphi]^{q^2(q-1)})\varphi(1 - [y, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$h_2(x, y) = (1 - [y^2, \varphi]^{q^2(q-1)})h_1(x, y)(1 - [y^2, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$h_3(x, y) = (1 - [y^3, \varphi]^{q^2(q-1)})h_2(x, y)(1 - [y^3, \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$h_4(x, y) = h_3(x, y)(y^{q^3} - y)(y^{q^2} - y)^3.$$

Как и прежде, мы покажем, что в случае, когда характеристический многочлен матрицы y неприводим над K, то $h_3(x, y) = 0$.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис четырехмерного пространства над K, в котором матрица (оператор) $\varphi(x)$ имеет вид e_{12}. Пусть $y = (\alpha_{ij})$, $y^2 = (\beta_{ij})$. Если $\alpha_{31} \neq 0$ и $\alpha_{41} \neq 0$, то заменой базиса $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = \alpha_{31}e_3 + \alpha_{41}e_4$, $e_4' = e_4$ мы получаем (не меняя вид $\varphi(x)$) новую матрицу $y' = (\alpha_{ij}')$, для которой $\alpha_{41}' = 0$. Вот почему мы будем считать, что $\alpha_{31} = 0$ или $\alpha_{41} = 0$.

Пусть сначала $\alpha_{41}=0$. Так как

$$[y, \varphi(x)] = \begin{pmatrix} -\alpha_{21} & * & * & * \\ 0 & \alpha_{21} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то, чтобы $h_1(x, y) \neq 0$, необходимо $\alpha_{21}=0$. Тогда $\alpha_{31} \neq 0$, потому что все характеристические корни матрицы y лежат вне поля K. Если $h_2(x, y) \neq 0$, то $\beta_{21}=\alpha_{23}\alpha_{31}=0$. Тогда $\alpha_{23}=0$. Пусть $y^3=(\gamma_{ij})$. Если $h_3(x, y) \neq 0$, то $\gamma_{21}=\alpha_{24}\beta_{41}=0$. Но $\alpha_{24} \neq 0$, потому что характеристические корни матрицы y лежат вне поля K. Тогда $\beta_{41}=\alpha_{43}\alpha_{31}=0$ и так как $\alpha_{31} \neq 0$, то $\alpha_{43}=0$. Но тогда y является матрицей вида

$$y = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix},$$

и характеристический многочлен этой матрицы представим в виде произведения двух многочленов второй степени.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha_{31}=0$. В этом случае используется тот факт, что характеристический многочлен матрицы вида

$$y = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

также представим в виде произведения двух многочленов второй степени.

Как мы уже отметили выше, рассуждения для четвертого случая, когда $\varphi(x)=e_{12}+e_{34}$, аналогичны рассуждениям для третьего случая. Предложение доказано.

Обозначим через $F=0$ тождество вида

$$F=F(x, y, z, t)=xyzt+G(x, y, z, t)=0, \tag{17}$$

где все одночлены с ненулевым коэффициентом многочлена $G(x, y, z, t)$ имеют степень выше 4.

Следующее предложение доказывается совершенно простыми рассуждениями.

Предложение 2.17. *В многообразии $\mathfrak{B}$ выполняется тождество вида* (17) *тогда и только тогда, когда все нильпотентные алгебры этого многообразия имеют ступень нильпотентности не выше* 4.

Так как нильпотентные подалгебры (а, следовательно, и все нильпотентные факторы) алгебры $M_4(K)$ имеют ступень нильпотентности не выше 4, то, как известно (см., напр., [4]), в этой алгебре выполняется тождество вида (17). Здесь мы излагаем конструкцию одного тождества такого вида. В этой конструкции несколько раз применяется основная конструкция последнего рассмотренного тождества $F_3=0$. Поэтому доказательство, что это тождество выполняется в алгебре $M_4(K)$, по существу не отличается от доказательства для тождества $F_3=0$, но оно более длинное, и мы его здесь не будем приводить.

Пусть $\varphi=\varphi(x)=x-x^{q^{12}}$,

$$f_1(x,\ y)=(1-[\varphi(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)})\varphi(1-[\varphi(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_2(x,\ y)=(1-[\varphi(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)})f_1(x,\ y)(1-[\varphi(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_3(x,\ y)=(1-[\varphi(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)})f_2(x,\ y)(1-[\varphi(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_4(x,\ y)=(1-[\varphi^2(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)})f_3(x,\ y)(1-[\varphi^2(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_5(x,\ y)=(1-[\varphi^2(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)})f_4(x,\ y)(1-[\varphi^2(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_6(x,\ y)=(1-[\varphi^2(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)})f_5(x,\ y)(1-[\varphi^2(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_7(x,\ y)=(1-[\varphi^3(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)})f_6(x,\ y)(1-[\varphi^3(y),\ \varphi^2,\ \varphi]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_8(x,\ y)=(1-[\varphi^3(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)})f_7(x,\ y)(1-[\varphi^3(y),\ \varphi^2]^{q^2(q-1)}),$$

$$f_9(x,\ y)=(1-[\varphi^3(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)})f_8(x,\ y)(1-[\varphi^3(y),\ \varphi]^{q^2(q-1)}).$$

Назовем этот процесс действием многочлена $\varphi(x)$ на многочлен $\varphi(y$ с началом $\varphi(x)$. Следующие девять шагов конструкции являются действием многочлена $\varphi(x)$ на многочлен $\varphi(z)$ с началом $f_9(x,\ y)$. Потом следуют действия многочлена $\varphi(x)$ на многочлены $\varphi(t)$, $\varphi(z)\varphi(y)$, $\varphi^2(z)$, $\varphi(z)\varphi(t)$, $\varphi(t)\varphi(y)$, $\varphi^2(z)\varphi(y)$, $\varphi(z)\varphi(t)\varphi(y)$, $\varphi(z)\varphi^2(y)$. Так мы получаем многочлен $f_{90}(x,\ y,\ z,\ t)$. Наконец мы положим

$$F_{10}=F_{10}(x,\ y,\ z,\ t) \tag{18}$$

$$=\varphi(y)\,f_{90}(x,\ y,\ z,\ t)\,(\varphi(z)-\varphi^{q^2}(z))\,(1-[\varphi(z),\ \varphi(t)]^{q-1})\,(\varphi(t)-\varphi^q(t))=0.$$

3. Доказательство основной теоремы. Пусть $\mathfrak{M}_4$ — многообразие ассоциативных алгебр, порожденные алгеброй $M_4(K)$, а $\mathfrak{B}$ — многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождествами из формулировки основной теоремы. В силу результатов второго параграфа все эти тождества выполняются в алгебре $M_4(K)$, и поэтому мы имеем включение $\mathfrak{M}_4\subseteq\mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ — локально конечное многообразие (см. [4]), то оно порождается своими критическими алгебрами. В нильпотентных подалгебрах этих алгебр выполняется тождество $x_1\,x_2\,x_3\,x_4=0$ и, следовательно, они содержатся в списке критических алгебр, данном в первой части настоящей работы. Рассматривая последовательно все возможные случаи, мы покажем, что все критические алгебры многообразия $\mathfrak{B}$ содержатся в многообразии $\mathfrak{M}_4$. Этим будет доказано и обратное включение $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{M}_4$. В некоторых случаях мы воспользуемся результатом, доказанным впервые П. Н. Сидеровым [6], а позже У. Кальюлайдом [7] и С. В. Полином о том, что алгебра верхних треугольных матриц порядка 4 над K порождает произведение $\mathfrak{N}_4$ var (K) многообразия $\mathfrak{N}_4$ всех нильпотентных алгебр, ступени нильпотентности, не более четырех на многообразие, порожденном основным полем K. Из этого результата вытекает включение $\mathfrak{N}_4\,\mathrm{var}(K)\subseteq\mathfrak{M}_4$, которое мы и используем

Пусть A — любая критическая алгебра многообразия $\mathfrak{B}$.

1. Если A нильпотентна, то $A \in \mathfrak{N}_4 \subset \mathfrak{M}_4$.

2. A полупроста. Тогда $A = M_n(K_m)$, $m \geq 1$, $K_m = GF(q^m)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

2.1. Если $n = 1$, то $A = K_m$ — поле. Пусть θ — порождающий мультипликативной группы K_m^* поля K_m. Тогда $F_1(4, q, \theta, \theta) = (\theta^{q^4} - \theta)(\theta^{q^3} - \theta) \times (\theta^{q^2} - \theta)(\theta^q - \theta) = 0$. Следовательно, $m = 1, 2, 3, 4$. Но K_m при $m = 1, 2, 3, 4$ изоморфно вкладывается в $M_4(K)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}_4$.

2.2. Пусть $n = 2$ и $A = M_2(K_m)$. Так как поле K_{2m} изоморфно вкладывается в $M_2(K_m)$, то $2m \leq 4$, т. е. $m = 1, 2$. В обоих случаях A вкладывается в $M_4(K)$, т. е. $A \in \mathfrak{M}_4$.

2.3. Пусть $n = 3$, $A = M_3(K_m)$. Снова получаем $3m \leq 4$, т. е. $m = 1$ и $A \in \mathfrak{M}_4$.

2.4. Пусть $n = 4$ и $A = M_4(K_m)$. Тогда $m = 1$ и $A = M_4(K) \in \mathfrak{M}_4$.

3. $A = B + R$, $R \neq (0)$, $R^2 = (0)$, $B \neq (0)$.

3.1. $A = A_1(m, n)$. Пусть сначала $n = 1$. Тогда $B = K_m$ — поле и пусть θ — порождающий мультипликативной группы K_m^*. Мы имеем $A_1(m, n) = \{\alpha e_{11} + \beta e_{12} \mid \alpha, \beta \in K_m\}$. Если $m = 4$, то $\sigma(\theta e_{11}) = e_{11}$ и $F_2(\theta e_{11}, \theta e_{11}, \theta e_{11}, e_{12}) = (\theta^{q^2} - \theta)(\theta^q - \theta) e_{12} \neq 0$. Следовательно, $m \leq 3$ и $A_1(m, n) \subseteq M_4(K) \in \mathfrak{M}_4$. Так как $A_1(4, 1) \subseteq A_1(m, 4)$, то $n < 4$. Если $n = 3$, то мы знаем, что $m = 1$ и снова $A_1(1, 3) \subseteq M_4(K)$. Пусть $n = 2$. Тогда $m = 1$ или $m = 2$. Так как $A_1(4, 1) \subseteq A_1(2,2)$, то $m < 2$ и, следовательно, $m = 1$. Тогда $A_1(1, 2) \subseteq M_4(K)$.

Замечание 1. В алгебре $A_1(4,1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_2 = 0$.

3.2. $A = A_2(m, n)$. Так как алгебра $A_2(m, n)$ антиизоморфная алгебре $A_1(m, n)$, то рассуждения для нее аналогичны.

Замечание 2. В алгебре $A_2(4, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_2^t = 0$.

3.3. $A = A_3(m, n, \sigma)$. Пусть сначала $n = 1$. Тогда $A_3(m, 1, \sigma) = \{\alpha e_{11} + \alpha^\sigma e_{22} + \beta e_{13} \mid \alpha, \beta \in K_m\}$. Если $m = 4$, то $F_3(\beta e_{12}, \theta e_{11} + \theta^\sigma e_{22}) = ((\theta^\sigma)^{q^3} - \theta^\sigma)((\theta^\sigma)^{q^2} - \theta^\sigma)^3 e_{12} = 0$, что невозможно ($\theta$ — порождающий K_m^*). Если $m = 3$, то $F_4(e_{12}, \theta e_{11} + \theta^\sigma e_{22}, \theta e_{11} + \theta^\sigma e_{22}) = ((\theta^\sigma)^{q^2} - \theta^\sigma)((\theta^\sigma)^q - \theta^\sigma) e_{12} = 0$, что невозможно. Следовательно, $m \leq 2$, и в этом случае $A_3(m, 1, \sigma) \subseteq M_4(K) \in \mathfrak{M}_4$.

Если $n = 2$, то $m = 1$ (потому что $A_3(4, 1, \sigma) \subseteq A_3(2, 2, \sigma)$) и снова $A_3(1, 2, \sigma) \subseteq M_4(K)$.

Случаи $n = 3$ или $n = 4$ невозможны, потому что $A_3(3, 1, \sigma) \subseteq A_3(1, 3, \sigma)$, $A_3(4, 1, \sigma) \subseteq A_3(1, 4, \sigma)$.

Замечание 3. В алгебре $A_3(4, 1, \sigma)$ (при $\sigma \neq \mathrm{id}_B$) выполняются все остальные тождества, кроме $F_3 = 0$ (и $F_3^t = 0$).

Замечание 4. В алгебре $A_3(3, 1, \sigma)$ (при $\sigma \neq \mathrm{id}_B$) выполняются все остальные тождества, кроме $F_4 = 0$ (и $F_4^t = 0$).

3.4. $A = A_4(m, n, k, l)$. Пусть сначала $n = l = 1$. Из случая 3.1 мы знаем, что $m < 4$. Аналогично, $k < 4$. Пусть $m = 3$. Мы докажем, что $k = 1$. Допустим сначала, что $k = 3$. Тогда $B_1 \simeq B_2 \simeq K_3$ и пусть $\tau: B_1 \to B_2$ — изоморфизм. Тогда подалгебра, порожденная $\{\alpha + \alpha^{\tau\sigma} \mid \alpha \in B_1\}$ и R, изоморфна $A_3(3, 1, \sigma)$ и не содержится в $\mathfrak{B}$. Пусть $k = 2$. Тогда $F_5(\theta_1 + \theta_2, n) = e_1 n e_2 \neq 0$, где θ_i — порождающий B_i^* $(i = 1, 2)$, n — порождающий (B_1, B_2)-бимодуля R, e_i — единица B_i. Следовательно, $k = 1$ и тогда $A_4(3, 1, 1, 1) \subseteq M_4(K) \in \mathfrak{M}_4$. При $m = 2$, но $k = 3$, получается алгебра $A_4(2, 1, 3, 1)$, антиизоморфная $A_4(3, 1, 2, 1)$, и применяя $F_5^t=0$, проверяем, что $A_4(2, 1, 3, 1)\notin\mathfrak{B}$. Следовательно, при $m=2$ мы имеем $k\leq 2$, и тогда $A_4(2, 1, k, 1)\subseteq M_4(K)\in\mathfrak{M}_4$.

Так как $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$, то из рассмотренных уже случаев следует, что когда n или l больше 1 и $A_4(m, n, k, l)$ лежит в многообразии $\mathfrak{B}$, то она является подалгеброй $M_4(K)$.

Замечание 5. В алгебре $A_4(3, 1, 2, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_5=0$.

Замечание 6. В алгебре $A_4(2, 1, 3, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_5^t=0$.

4. $A=B+R$, $B\neq(0)$, $R^2\neq(0)$, $R^3=(0)$.

4.1. $A=A_5(m, \sigma)$. Если $N=K_m n$, то $n^2\neq 0$ и $F_6(\theta, n)=(\theta^q-\theta)n^2(\theta^q-\theta)$, где θ — порождающий K_m^*. Отсюда следует, что $m=1$ и $A_5(1, \sigma)\subseteq M_4(K)\in\mathfrak{M}_4$.

Замечание 7. В алгебре $A_5(2, \sigma)$ при $\sigma\neq\mathrm{id}_B$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_6=0$.

4.2. Пусть A является фактор-алгеброй алгебры $A_6(m, n)$ и пусть сначала $n=1$. Тогда $A_6(m, 1)=\{\alpha e_{22}+\beta e_{12}+\gamma e_{23}+\delta e_{13}\mid \alpha, \beta, \gamma, \delta\in K_m\}$. От случая 3.1 мы уже знаем, что $m<4$. Допустим, что $m=3$. Тогда $F_7(\theta e_{22}, e_{12}, e_{23})=e_{12}e_{22}e_{23}=e_{13}$. Притом ясно, что после факторизации $A_6(3, 1)$ по произвольному собственному подпространству аннулятора $\{\delta e_{13}\mid\delta\in K_3\}$ получим алгебру, в которой $F_7=0$ тоже не является тождеством. Следовательно, $m<3$, и тогда $A\subseteq M_4(K)$. Пусть $n>1$. Из уже рассмотренного случая для $n=1$ и из того, что $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$, мы получаем, что $n<3$, и если $n=2$, то $m=1$ и $A\subseteq M_4(K)$.

Замечание 8. В алгебре $A_6(3, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_7=0$.

4.3. $A=A_7(m, n)$. Из случая 3.1 мы знаем, что $m<4$. Пусть $m=3$. Тогда $A_7(3, 1)=\{\alpha e_{11}+\beta e_{12}+\gamma e_{13}+\delta e_{23}\mid \alpha, \beta, \gamma\in K_3, \delta\in K\}$ и $F_8(\theta e_{11}, e_{12}, e_{23})=e_{11}e_{12}e_{23}=e_{13}$. Следовательно, $m\leq 2$. Но $A_7(m, 1)\subseteq M_4(K)$ при $m=1, 2$. Пусть $n>1$. Снова используем, что $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$, и получаем, что $n<3$, и если $n=2$, то $m=1$. В этом случае $A_7(1, 2)\subseteq M_4(K)$.

Замечание 9. В алгебре $A_7(3, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_8=0$.

4.4. $A=A_8(m, \sigma)$. Из случая 3.3 мы знаем, что $m\leq 2$. Допустим, что $m=2$. Тогда $A_8(2, \sigma)=\{\alpha e_{11}+\beta e_{12}+\delta e_{13}+\alpha^\sigma e_{22}+\gamma e_{23}\mid \alpha, \beta, \gamma, \delta\in K_2\}$ и $F_2(\theta e_{11}+\theta^\sigma e_{22}, e_{12}, \theta e_{11}+\theta^\sigma e_{22}, e_{23})=e_{13}$. Следовательно, $m=1$ и $A_8(1, \sigma)\subseteq M_4(K)$.

4.5. $A=A_9(n, l, k, m, \lambda)$. Пусть сначала $n=k=1$, т. е. B_1 и B_2 — поля. Из случаев 4.3 и 4.2 мы знаем, что $m\leq 2$ и $l\leq 2$. Допустим, что $l=m=2$. Тогда $F_2(\theta_1+\theta_2, f, \theta_2, g)=f(\theta_2^q-\theta_2)g\neq 0$, где θ_i — порождающий $B_i^*(i=1, 2)$. Следовательно, $m=1$ или $l=1$. Тогда $A_9(1, l, 1, m, \lambda)$ является фактором $M_4(K)\in\mathfrak{M}_4$. Снова используя, что $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$, из уже доказанного следует, что если $n>1$ или $k>1$, то возможны следующие случаи: $n=2$, $l=k=m=1$ и $k=2$, $n=l=m=1$. В обоих случаях алгебра $A_9(n, l, k, m, \lambda)$ является фактором $M_4(K)$.

4.6. $A=A_{10}(m, n)$.

4.7. $A=A_{11}(m, \sigma)$.

4.8. $A=A_{12}(n, l, k, m, \lambda)$.

Эти три случая рассматриваются аналогично, как и последние три случая, так как эти алгебры антиизоморфны, соответственно, $A_7(m, n)$, $A_8(m, \sigma)$, $A_9(n, l, k, m, \lambda)$.

Замечание 10. В алгебре $A_{10}(3, 1)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_8^t=0$.

4.9. $A=A_{13}(l, \sigma)$. Так как $F_6(\theta e_{11}+\theta^\sigma e_{33},\ e_{12}+e_{23})=(\theta^q-\theta)(\theta^\sigma)^q-\theta^\sigma)l_{13}$, то $l=1$. Но $A_{13}(1, \sigma)\subseteq M_3(K)$.

4.10. $A=A_{14}(n, l, k, m, \lambda)$. Пусть сначала $n=k=1$. Из случаев 4.3 и 4.6 мы знаем, что $l\leq 2$ и $m\leq 2$. Допустим, что $l=m=2$ и пусть $\tau: B_1 \to B_2$ — изоморфизм. Тогда алгебра, порожденная $\{\alpha+\alpha^{\tau\sigma} \mid \alpha \in B_1\}$, N_1 и N_2, изоморфна $A_{13}(2, \sigma)$ и не принадлежит $\mathfrak{N}$. Следовательно, возможны только три случая: 1) $m=2$, $l=1$, 2) $m=1$, $l=2$ и 3) $l=m=1$. Во всех этих случаях $A_{14}(1, l, 1, m, \lambda)$ является фактором $M_4(K)\in\mathfrak{M}_4$. Используя снова, что $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$, мы получаем, что кроме рассмотренных случаев, возможны только случаи $n=2$, $k=l=m=1$ и $k=2$, $n=l=m=1$. В этих случаях алгебра $A_{14}(n, l, k, m, \lambda)$ снова является фактором $M_4(K)$.

4.11. $A=A_{15}(m, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta)$. Докажем, что $m=1$. Из случая 3.3 мы знаем, что $m\leq 2$. Если существует элемент $v\in R$, для которого $v^2\neq 0$, то $F_6(\theta, v)=(\theta^q-\theta)v^2(\theta^q-\theta)$ и, следовательно, $m=1$. Пусть для любого элемента $v\in R$ выполняется $v^2=0$ и допустим, что $m=2$. Тогда R — антикоммутативная алгебра, и мы имеем $0=(\theta f+g)^2=\theta fg+g\theta f=\theta fg+\theta^\tau gf=\theta fg-\theta^\tau fg=(\theta-\theta^\tau)fg$. Но тогда $\theta=\theta^\tau$ и $g\theta=\theta g$. Аналогично, из равенства $(f+\theta g)^2=0$ мы получаем $\theta=\theta^\sigma$ и $f\theta=\theta f$. Тогда $F_2(\theta+g, f, \theta, e)=f(\theta^q-\theta)\beta g\neq 0$, где $\beta=(\theta^{q^3}-\theta)^{q^4-2}$, а e — единица B_1. Итак, $m=1$ и $A\in\mathfrak{N}_3 \operatorname{var}(K)\subseteq\mathfrak{M}_4$.

4.12. $A=A_{16}(l, k, m, \sigma, \lambda)$. Пусть $k=1$. Из случаев 4.4 и 4.6 мы знаем, что $l=1$ и $m\leq 2$. В этом случае $A_{16}(1, 1, m, \sigma, \lambda)$ является фактором алгебры

$$C=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 0 & \alpha^\sigma & \delta \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \middle|\ \alpha, \beta\in K;\ \gamma, \delta, \varepsilon\in K_m\right\},$$

которая является подалгеброй $M_4(K)\in\mathfrak{M}_4$. Если $k>1$, как и выше, получаем что возможен только случай $k=2$, $l=m=1$, и алгебра $A_{16}(1, 2, 1, \sigma, \lambda)$ снова содержится в многообразии $\mathfrak{M}_4$.

4.13. $A=A_{17}(k, m, l, \lambda, \sigma)$. Этот случай рассматривается аналогично, потому что A антиизоморфна $A_{16}(l, k, m, \sigma, \lambda)$.

4.14. $A=A_{18}(l, m, k, \sigma, \lambda)$. Из случаев 4.9 и 4.2 мы знаем, что $l=1$ и если $k=1$, то $m\leq 2$. Тогда A является фактор-алгеброй алгебры

$$D=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix} \middle|\ \alpha\in K;\ \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\in K_m\right\}$$

по подпространству пространства $\{\varepsilon e_{13} \mid \varepsilon\in K_m\}$ коразмерности 1. В этом случае A — фактор алгебры $M_4(K)$. Как и выше (используя, что $K_{mn}\subseteq M_n(K_m)$), мы получаем, что если $k>1$, то возможен только случай $k=2$, $l=m=1$ и снова алгебра $A_{18}(1, 1, 2, \sigma, \lambda)$ является фактором $M_4(K)$.

4.15. $A=A_{19}(l, n, m, k, t, s, \lambda)$. Пусть $n=k=s=1$. Из случаев 4.2 и 4.10 следует, что $l\leq 2$, $m\leq 2$, $t\leq 2$ и некоторое из чисел l или t равно 1. Пусть, для определенности, $l=1$. Тогда $n=1$. Допустим, что $m=t=2$. Если θ_i — образующий B_i^*, а e_i — единица $B_i (i=1, 2, 3)$, то $F_2^t(\theta_2+\theta_3, g, \theta_2, f)=f(\theta_2^q$

$-\theta_2)g \neq 0$. Следовательно, $m=1$ или $t=1$. Если, например, $m=1$, $t=2$, то алгебра $A_{19}(1, 1, 1, 1, 2, 1, \lambda)$ — фактор алгебры

$$E=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in K;\ \delta, \varepsilon, \pi \in K_2\right\},$$

которая является фактором алгебры $M_4(K)$.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично.

5. $A=B+R$, $B\neq(0)$, $R^3\neq(0)$, $R^4=(0)$. Во всех рассматриваемых случаях мы покажем, что полупростая компонента B алгебры A является прямой суммой полей, изоморфных полю K. Из этого следует, что $A\in\mathfrak{N}_4 \operatorname{var}(K) \subseteq \mathfrak{M}_4$.

Все алгебры, которые будут рассмотрены ниже, имеют факторы, изоморфные некоторым уже рассмотренным алгебрам, откуда мы получаем, что для любой простой компоненты K_m алгебры B мы уже имеем неравенство $m\leq 2$. Остается доказать во всех случаях, что невозможно равенство $m=2$.

5.1. $A=A_{20}(m)$. Если $m=2$, то $F_9(\theta, f, g, h)=fgh\neq 0$, где θ — образующий K_m^*, $f\in N_1$, $g\in N_2$, $R\in N_3$.

Замечание 11. В алгебре $A_{20}(2)$ выполняются все остальные тождества, кроме $F_9=0$.

5.2. $A=A_{21}(m)$. Так как $A_{21}(m)$ антиизоморфна алгебре $A_{20}(m)$, то тождество $F_9^t=0$ доказывает равенство $m=1$.

Замечание 12. В алгебре $A_{21}(2)$ выполняется все остальные тождества, кроме $F_9^t=0$.

5.3. $A=A_{22}(m, \sigma)$. Из рассмотренного случая для $A_8(m, \sigma)$ мы получаем $m=1$.

5.4. $A=A_{23}(m, l)$. Здесь используем тождество $F_9^t=0$ $(x=\theta_1+\theta_2, y_1=f\in N_1, y_2=g\in N_2, y_3=h\in N_3)$ и получаем $m=1$.

5.5. $A=A_{24}(m, \sigma)$. Так как $A_5(m, \sigma)$ является фактором алгебры $A_{24}(m, \sigma)$, то $m=1$.

5.6. $A=A_{25}(m)$. Если $N_1=K_m f$, $N_2=K_m g$, то для элемента $v=f+g$ мы имеем $v^3=gf^2\neq 0$. Так как $F_1^t(4, q, v, \theta)=(\theta^q-\theta)v^3(\theta\in K_m)$, то $m=1$.

Замечание 13. В алгебре

$$A_{25}(2)=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & \varepsilon & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K_2;\ \varepsilon, \mu \in K\right\}$$

выполняются все остальные тождества, кроме $F_1^t=0$.

5.7. $A=A_{26}(m)$. Если $N_1=K_m f$, $N_2=gK_m$, то $v^3=(f+g)^3=fgf\neq 0$ и, используя снова $F_1^t=0$, получаем, что $m=1$.

5.8. $A=A_{27}(m)$. Если $n_i\in N_i$ $(i=1, 2, 3)$, то $(n_1+n_2+n_3)^3=n_1(n_2+n_3)^2$. Рассмотрим два случая:

Первый случай. Существует элемент $v\in R$, для которого $v^3\neq 0$. Тогда применяем $F_1^t=0$.

Второй случай. Для любого элемента $v \in R$ мы имеем $v^3=0$. Тогда $(n_1+n_2)^2=n_1n_2$ и $F_6(\theta+n_3,\ n_1+n_2)=-(\theta^q-\theta)n_1n_2n_3=0$, т. е. $m=1$.

Если $A=B+R$ изоморфна некоторой из алгебр A_{28}, A_{29}, A_{30}, A_{50}, A_{52}, A_{53}, A_{54}, A_{55}, A_{56}, A_{57}, A_{58}, A_{59}, A_{60}, A_{61}, A_{71}, A_{72}, A_{73}, то она имеет фактор, изоморфный некоторой алгебре из уже рассмотренных, откуда следует, что для любой простой компоненты K_m алгебры B выполняется $m=1$.

Рассмотрим остальные случаи.

5.9. $A=A_{31}(m,\ l)$. Если $n_i \in N_i$ $(i=1,2,3)$, то $(n_1+n_2+n_3)^3=n_1n_2n_3$ и для B_1 применяем $F_1^t=0$ $(y=\theta_1,\ x=n_1+n_2+n_3)$, а для $B_2-F_9=0$ $(x=\theta_2,\ y_i=n_i (i=1,2,3))$.

5.10. $A=A_{32}(m,l)$. Как и выше, для B_1 и B_2 применяем $F_1^t=0$ и $F_9^t=0$ соответственно.

5.11. $A=A_{33}(m,\ l,\ \sigma)$. От случая для $A_{16}(m,\ 1,\ l,\ \sigma,\ \lambda)$ получаем $B_1 \cong K$, а для B_2 применяем $F_9^t=0$ $(x=\theta_2,\ y_i=n_i \in N_i\ (i=1,2,3))$.

5.12. $A=A_{34}(m,\ l)$. От случая для $A_{18}(m,l,1,\sigma,\lambda)$ получаем $B_1 \cong K$, а для B_2 применяем $F_9=0$ $(x=\theta_2,\ y_i=n_i \in N_i\ (i=1,2,3))$.

5.13. $A=A_{35}(m,l)$. Из случая для $A_{17}(1,m,l,\lambda,\sigma)$ получаем $B_2 \cong K$. Так как $(n_1+n_2+n_3)^3=n_1n_2n_3$, $n_i \in N_i$, $i=1,2,3$, то для B_1 применяем $F_1^t=0$ $(y=\theta_1,\ x=n_1+n_2+n_3)$.

5.14. $A=A_{36}(m,n,l)$. Снова применяем для $B_1-F_1^t=0$ $(y=\theta_1, x=n_1+n_2+n_3)$, а для B_2 (соответственно B_3) — $F_9=0$ (соответственно $F_9^t=0$) (в $F_9=0$ полагаем $x=\theta_2$, $y_i=n_i$, а в $F_9^t=0-x=\theta_3$, $y_i=n_i$ $(i=1,2,3)$).

Алгебры $A_{37}, \ldots, A_{49}$ антиизоморфны соответствующим алгебрам $A_{24}, \ldots, A_{36}$, и эти случаи рассматриваются аналогично.

Замечание 14. В алгебре $A_{38}(2)$ антиизоморфная алгебре $A_{25}(2)$) выполняются все остальные тождества, кроме $F_1=0$.

5.15. $A=A_{62}(m,n)$. Если $n_i \in N_i$ $(i=1,2,3)$, то $(n_1+n_2+n_3)^3=n_1n_2n_3$, и для B_1 и B_2 применяем $F_1^t=0$ и $F_1=0$ соответственно.

5.16. $A=A_{63}(m,n)$. Снова для B_1 применяем $F_1=0$ (или $F_1^t=0$)$(x=n_1+n_2+n_3,\ y=\theta_1)$, а для $B_2-F_9=0$ $(x=\theta_2,\ y_i=n_i\ (i=1,2,3))$.

5.17. $A=A_{64}(m,\sigma,n)$. От случая для $A_8(m,\sigma)$ мы имеем $B_1 \cong K$, а для B_2 применяем $F_1=0$ $(x=n_1+n_2+n_3,\ y=\theta_2)$.

5.18. $A=A_{65}(m,n)$. Из случая для $A_{13}(n,\sigma)$ получаем $B_2 \cong K$, а для B_1 применяем $F_1^t=0$ $(y=\theta_1,\ x=n_1+n_2+n_3)$.

Следующие три случая рассматриваются аналогично последним трем случаям, потому что соответствующие алгебры антиизоморфны.

5.19. $A=A_{69}(m,n)$. Из случая для $A_{16}(m,1,n,\sigma,\lambda)$ мы имеем $B_1 \cong K$, а для B_2 применяем $F_9^t=0$ $(x=\theta_2,\ y_i=n_i)$.

5.20. $A=A_{70}(m,n)$. Эта алгебра антиизоморфна алгебре $A_{69}(m,n)$.

5.21. $A=A_{74}(m,n,\sigma,\tau)$. Из случая для $A_{15}(m,\sigma,\tau,\xi,\eta,\zeta)$ мы получаем, что $B_1 \cong K$, а для B_2 применяем тождество $F_6=0$ $(x=n_1n_2+\theta,\ y=n_3, n_i \in N_i$ $(i=1,2,3)$, $\theta \in B_2)$.

5.22. $A=A_{75}(m,n,\sigma,\tau)$. Этот случай рассматривается аналогично предшествующему, потому что соответствующие алгебры антиизоморфны.

5.23. $A=A_{76}(m,n,l)$. Для B_1 применяем $F_1=0$, а для B_2 и $B_3-F_9=0$ и $F_9^t=0$ соответственно.

5.24. $A=A_{77}(m,n,l)$. Для B_1 и B_2 применяем $F_1^t=0$ и $F_1=0$, соответственно, а для $B_3-F_9=0$.

5.25. $A=A_{78}(m, n, l)$. Как и выше, используем $F_1^t=0$, $F_1=0$ и $F_9^t=0$.

5.26. $A=A_{79}(m, n, l)$. Из случая для $A_{16}(l, 1, n, \sigma, \lambda)$ мы получаем, что $B_3 \cong K$, а для B_1 и B_2 применяем $F_1^t=0$ и $F_1=0$ соответственно.

5.27. $A=A_{80}(m, n, l)$. Из случая для $A_{18}(m, l, 1, \sigma, \lambda)$ мы получаем, что $B_1 \cong K$, а для B_2 и B_3 применяем $F_1=0$ и $F_9=0$ соответственно.

5.28. $A=A_{81}(m, n, l)$. Из случая для $A_{17}(1, l, n, \lambda, \sigma)$ мы получаем, что $B_2 \cong K$, а для B_1 и B_3 применяем $F_1=0$ и $F_9=0$ соответственно.

5.29. $A=A_{82}(m, n, l)$.

5.30. $A=A_{83}(m, n, l)$.

В последних двух случаях алгебры антиизоморфны соответственно алгебрам $A_{80}(m, n, l)$, $A_{81}(m, n, l)$.

5.31. $A=A_{84}(m, n, l, s)$. Для B_1, B_2, B_3 и B_4 применяем соответственно тождества $F_1^t=0$, $F_9=0$, $F_9^t=0$, $F_1=0$.

Замечание 15. В алгебре Грассмана четырехмерного пространства над K выполняются все тождества, кроме $F_{10}=0$.

Этим все случаи рассмотрены, и мы доказали, что каждая критическая алгебра многообразия $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathfrak{M}_4$, откуда следует и равенство $\mathfrak{M}_4=\mathfrak{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев, Е. Н. Кузьмин. Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем. *Алгебра и логика*, 17, 1978, 28—32.
2. Г. К. Генов. Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем. *Алгебра и логика* (в печати).
3. Н. Джекобсон. Строение колец. Москва, 1961.
4. И. В. Львов. О многообразиях ассоциативных колец, I. *Алгебра и логика*, 12, 1973, 269—297.
5. В. Н. Латышев. Конечная базируемость тождеств некоторых колец. *Успехи мат. наук*, 32, 1977, № 4, 259—260.
6. П. Н. Сидеров. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем. *Плиска*, 2, 1981, 143—152.
7. У. Кальюлайд. Замечание о базисе тождеств верхних треугольных матриц. *Материалы конф. Методы алгебры и функц. анализа при исслед. семейств операторов, 1978*. Тарту, 1978, 105—107.
8. B. R. McDonald. Finite rings with identity. New York, 1974.
9. Г. К. Генов, П. Н. Сидеров. Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем, 1. *Сердика*, 8, 1982.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 9. 1980