Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

МАРИЯ Г. КАРАТОПРАКЛИЕВА

В работе получены необходимые и достаточные условия для локальной разрешимости и гипоэллиптичности одного класса дифференциальных операторов с двукратными характеристиками.

В работе рассматривается вопрос о локальной разрешимости и гипоэллиптичности оператора:

$$P \equiv -D_t^2 + at^m D_x^2 - (\alpha + i\beta t^n) D_x,$$

где a, α и β — вещественные константы, $a\beta \neq 0$, m и n — целые неотрицательные числа, x и t — одномерные переменные, $i = \sqrt{-1}$.

Р. Рубинштейн [2] показал, что если $a = -1$, $\alpha = \beta = 1$, $n \geqq 1$ — нечетное и $m > 4n+2$ — натуральное число, то оператор P локально неразрешим в точке $(0, 0)$. При его доказательстве используется метод теории возмущений, приводящий к бо́льшим техническим трудностям — к исканию подходящих приближенных решений для нелинейного частного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от большого параметра. Случай $m = 4n+2$ этим методом не охватывается.

В работе П. Р. Попиванова [7] установлена локальная неразрешимость оператора P в точке $(0, 0)$ в случае $n = 1$, $m = 6$ и $\alpha \neq 0$. При доказательстве используется метод В. В. Грушина [4], модифицированный А. Мениковым [1].

В настоящей работе, аналогичным способом, как в [7], дается простое доказательство локальной неразрешимости оператора P в точке $(0, 0)$ в более общем случае $m \geqq 4n+2$, $n \geqq 1$ — нечетное и $\alpha \neq 0$. Получены также необходимые условия для гипоэллиптичности этого оператора в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^2$ при $m \geqq 4n+2$ и $n \geqq 1$ — нечетное, и показано, что при $\alpha = 0$, $a < 0$, $m \geqq 0$ — четное и $n \geqq 0$ — целое, оператор P — гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^2$.

1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \mu^{2m_0}(\alpha + i\beta s^n \mu^{-4n} + as^m \mu^{-2m_0})v = 0, \tag{1.1}$$

где a и β — вещественные константы, $a\beta \neq 0$, $\alpha > 0$ — константа, n — натуральное число, m — целое число, $m \geqq 4n+2$, $m_0 = m-2$ и $\mu \geqq 1$ — параметр.

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 367—377.

Теорема 1.1. *Если* $m_0=4n$, *то уравнение* (1.1) *имеет формальное асимптотическое решение вида*

$$y(s,\mu)=[\sum_{j=0}^{\infty} r_j(s)\mu^{-j}]\exp[(i\mu^{m_0}s\sqrt{\alpha}-d_1s^{n+1})\operatorname{sign}\beta], \tag{1.2}$$

где $r_j(s)$ — *многочлен* ($j=0,1,\ldots$), $r_0(s)\equiv 1$, $r_j(s)\equiv 0$ ($j=1,2,\ldots,m_0-1$) *и* $r_j(0)=0$ ($j=m_0, m_0+1,\ldots$), *а* $d_1>0$ *для* $\beta>0$ *и* $d_1<0$ *для* $\beta<0$.

Если k — *натуральное число и* $4kn<m_0\leqq 4(k+1)n$, *то уравнение* (1.1) *имеет формальное асимптотическое решение вида*

$$y(s,\mu)=[\sum_{j=0}^{\infty} a_j(s)\mu^{-j}]\exp\{[i\mu^{m_0}s\sqrt{\alpha}+\sum_{l=1}^{k}\mu^{m_0-4ln}(-i)^{l+1}d_ls^{ln+1}]\operatorname{sign}\beta\}, \tag{1.3}$$

где $a_j(s)$ — *многочлен* ($j=0,1,\ldots$) *для* $4kn<m_0<4(k+1)n$, $a_0(0)=1$ *и* $a_j(0)=0$ ($j=1,2,\ldots$), *а для* $m_0=4(k+1)n$

$$a_j(s)=r_j(s)\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}\operatorname{sign}\beta], \tag{1.4}$$

где $r_j(s)$ — *многочлен* ($j=0,1,\ldots$), $r_0(0)=1$, $r_j(0)=0$ ($j=1,2,\ldots$), $d_{k+1}>0$ *при* $\beta>0$ *и при* $\beta<0$, k — *нечетное и* $d_{k+1}<0$ *при* $\beta<0$, k — *четное число. Кроме этого,* $d_l>0$ ($l=1,\ldots,k$), *если* $\beta>0$, *а* $d_l>0$ *для* l — *четное и* $d_l<0$ *для* l — *нечетное* ($l=1,\ldots,k$), *если* $\beta<0$.

Доказательство. Известно (см. [5]), что уравнение (1.1) имеет формальное асимптотическое решение вида

$$y(s,\mu)=[\sum_{j=0}^{\infty} a_j(s)\mu^{-j}]\exp[\sum_{l=1}^{m_0} g_l(s)\mu^l]. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), для неизвестных функций $g_1(s),\ldots,g_{m_0}(s)$ при условии $a_0(0)=1$, находим уравнения

$$g_{m_0}'^2+\alpha=0, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=0}^{p} g'_{m_0-j}g'_{m_0-p+j}=0 \quad \text{для} \quad 1\leqq p\leqq m_0-1,\ p\neq 4n, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=0}^{p} g'_{m_0-j}g'_{m_0-p+j}+i\beta s^n=0 \quad \text{для} \quad p=4n. \tag{1.8}$$

Отметим, что если $p=4ln$, то $l\leqq k$ при $4kn<m_0\leqq 4(k+1)n$, где k — натуральное число. Положим

$$g'_{m_0}=i\sqrt{\alpha}\operatorname{sign}\beta. \tag{1.9}$$

Дальше будем предполагать, что $\beta>0$. Случай $\beta<0$ рассматривается аналогично. Из (1.7) получаем

$$g'_{m_0-1}=0,\ldots,g'_{m_0-4n+1}=0. \tag{1.10}$$

Пусть $4kn<m_0\leqq 4(k+1)n$, где k — натуральное число. Тогда из (1.8) следует, что

$$g'_{m_0-4n}=(-i)^2c_1s^n, \quad c_1=\beta/2\sqrt{\alpha}>0. \tag{1.11}$$

Предположим, что для $4n \leq j \leq p-1 \leq m_0-2$

$$g'_{m_0-j} = \begin{cases} (-i)^{l+1} c_l s^{ln}, & \text{если } j = 4ln \\ 0, & \text{если } j \text{ не имеет вида } 4ln, \end{cases}$$

где $c_l > 0$ — константа, l — целое и $1 \leq l \leq k$. Покажем, что

$$g'_{m_0-p} = 0, \text{ если } p \text{ не имеет вида } 4qn, \text{ и} \tag{1.12}$$

$$g'_{m_0-p} = (-i)^{q+1} c_q s^{qn}, \text{ если } p = 4qn, \tag{1.13}$$

где $c_q > 0$ — константа, q — целое и $1 \leq q \leq k$.

В силу сделанного предположения $g'_{m_0-j} g'_{m_0-p+j} \neq 0$ для $1 \leq j \leq p-1$ тогда и только тогда, когда $j = 4l_1 n$ и $p-j = 4l_2 n$, где l_1 и l_2 — целые и $1 \leq l_1, l_2 \leq k$, т. е. $p = 4(l_1+l_2)n$ для $1 \leq l_1 + l_2 \leq k$. Ввиду (1.7) имеет место (1.12).

Пусть $p = 4qn$ для q-целого и $1 \leq q \leq k$, $1 \leq j \leq p-1$ и $j = 4ln$ для l-целого и $1 \leq l \leq q-1$. Тогда $p-j = 4(q-l)n$ и в силу предположения $g'_{m_0-j} g'_{m_0-p+j} = (-i)^{q+2} c_{q-l} c_l s^{qn}$, где $c_{q-l} c_l > 0$. Так как $p > 4n$, то при $q = 2$ в левой части (1.7) входит слагаемое $g'^2_{m_0-4n}$, а при $q > 2$ — слагаемое $g'_{m_0-4n} g'_{m_0-4(q-1)n}$. Принимая во внимание (1.7) и (1.9), получаем (1.13).

Положим

$$g_{m_0-j}(s) = \begin{cases} is\sqrt{\alpha}, & \text{если } j = 0, \\ 0, & \text{если } j \text{ не имеет вида } 4ln, \\ (-i)^{l+1} d_l s^{ln+1}, & \text{если } j = 4ln, \end{cases} \tag{1.14}$$

где $d_l = c_l/(ln+1) > 0$, l — целое и $1 \leq l \leq k$.

Подставляя (1.5) в (1.1) и имея в виду, что $g''_{m_0} = 0$, для неизвестных функций $a_l(s)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ получаем следующие уравнения:

$$2g'_{m_0} a'_0 = -b_{m_0} a_0, \tag{1.15}$$

$$2g'_{m_0} a'_l = -b_{m_0} a_l - \sum_{j=1}^{l} (2g'_{m_0-j} a'_{l-j} + g''_{m_0-j} a_{l-j}) - \sum_{j=1}^{\sigma} a_{l-j} b_{m_0-j} \tag{1.16}$$

для $1 \leq l \leq m_0 - 1$, где $\sigma = \min(l, m_0-2)$, и

$$2g'_{m_0} a'_l = -b_{m_0} a_l - \sum_{j=1}^{m_0-1} (2g'_{m_0-j} a'_{l-j} + g''_{m_0-j} a_{l-j}) - \sum_{j=2}^{m_0-1} a_{l+j-m_0} b_j - a''_{l-m_0} - as^m a_{l-m}, \tag{1.17}$$

для $l \geq m_0$, где $b_p = \sum_{j=1}^{p-1} g'_j g'_{p-j}$ $(p = 2, \ldots, m_0)$. Легко видеть, что

$$b_{m_0}(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 4kn < m_0 < 4(k+1)n, \\ (-i)^{k+3} c_{k+1} 2\sqrt{\alpha} s^{(k+1)n}, & \text{если } m_0 = 4(k+1)n, \end{cases} \tag{1.18}$$

где $c_{k+1} > 0$ — константа.

Пусть $4kn < m_0 < 4(k+1)n$. Тогда ввиду (1.18), из (1.15) получаем, что $a'_0 = 0$. Так как по предположению $a_0(0) = 1$, то $a_0(s) \equiv 1$. Предположим, что $a_j(s)$ — многочлен для $1 \leq j \leq l-1$. Тогда из (1.16) и (1.17) следует, что

$a_l(s)$ — многочлен. Для $j \geq 1$ многочлены $a_j(s)$ можно подобрать таким образом, чтобы $a_j(0)=0$.

Пусть $m_0=4(k+1)n$. Учитывая (1.18), из (1.15) получаем, что если $a_0(0)=1$, то $a_0(s)=\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}]$, где $d_{k+1}=c_{k+1}/[(k+1)n+1]>0$. Предположим, что для $1 \leq j \leq l-1$ имеем $a_j(s)=r_j(s)\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}]$, где $r_j(s)$ — многочлен и $r_j(0)=0$. Покажем, что если $a_l(0)=0$, то

$$a_l(s)=r_l(s)\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}], \tag{1.19}$$

где $r_l(s)$ — многочлен и $r_l(0)=0$.

В самом деле, из (1.16) и (1.17) получаем, что

$$2g'_{m_0}a'_l=-b_{m_0}a_l+q_l(s)\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}], \tag{1.20}$$

где $q_l(s)$ — многочлен. Полагая $r_l(s)=-\frac{i}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^s q_l(\tau)d\tau$, видим, что $r_l(s)$ — многочлен, $r_l(0)=0$ и что (1.20) можно записать в виде

$$a'_l=(-i)^{k+2}c_{k+1}s^{(k+1)n}a_l+r'_l(s)\exp[(-i)^{k+2}d_{k+1}s^{(k+1)n+1}].$$

Отсюда следует (1.19), если $a_l(0)=0$.

Итак, случай $4kn<m_0\leq 4(k+1)n$, где k — натуральное число, полностью рассмотрен.

Пусть теперь $m_0=4n$. Принимая во внимание (1.9) и (1.10), для неизвестных функций $a_j(s)$ ($j=0, 1, \ldots$) получаем уравнения

$$2g'_{m_0}a'_j+i\beta s^n a_j=0 \tag{1.21}$$

для $j=0, \ldots, m_0-1$ и

$$2g'_{m_0}a'_j+i\beta s^n a_j+a''_{j-m_0}+as^m a_{j-m_0}=0$$

для $j\geq m_0$. Из (1.21) при $a_j(0)=\delta_0^j$ (δ_0^j — символ Кронекера) следует, что $a_0(s)=\exp(-d_1s^{n+1})$, $a_1(s)\equiv 0, \ldots, a_{m_0-1}(s)\equiv 0$, где $d_1=\beta/[2\sqrt{\alpha}(n+1)]>0$. По индукции легко доказывается, что для $j\geq m_0$ имеем $a_j(s)=r_j(s)\exp(-d_1s^{n+1})$, где $r_j(s)$ — многочлен и $r_j(0)=0$. Теорема 1.1 доказана.

2. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P\equiv -D_t^2+at^mD_x^2-(\alpha+i\beta t^n)D_x, \tag{2.1}$$

где a, α и β — вещественные константы, $a\beta\neq 0$, $n\geq 1$ — нечетное число, $m\geq 4n+2$ — натуральное число, x и t — одномерные переменные, $i=\sqrt{-1}$. Напомним следующее

Определение 2.1. *Линейный дифференциальный оператор L с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$, называется локально разрешимым в точке $x_0\in\Omega$, если существует окрестность $\omega\subset\Omega$ точки x_0, в которой для каждой функции $f\in C_0^\infty(\omega)$ найдется распределение $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ такое, что $Lu=f$ в ω.*

Теорема 2.1. *Если оператор P локально разрешим в точке $(0,0)$, то $\alpha=0$. Это справедливо и для формально сопряженного оператора P^*.*

Доказательство. Пусть оператор P локально разрешим в точке $(0,0)$. Тогда, как известно (см. [8]), существуют открытая окрестность ω

этой точки, целое число $p \geqq 0$ и константа $c>0$ такие, что для каждой пары функций f и v класса $C_0^\infty(\omega)$ выполняется неравенство

$$(2.2) \qquad \left|\iint fv\,dx\,dt\right| \leqq c \sum_{l+q\leqq p} \sup_\omega |D_x^l D_t^q f| \sum_{l+q\leqq p} \sup_\omega |D_x^l D_t^q P^* v|.$$

Предположим, что $\alpha>0$ и $\beta>0$. Пусть ξ — двойственная переменная к переменной x. После преобразования Фурье относительно x и замены переменных

$$(2.3) \qquad t = s\xi^{-2/(m+2)}, \quad \xi>0,$$

$$(2.4) \qquad \mu = \xi^{1/2(m+2)}$$

оператор

$$(2.5) \qquad P^* = -D_t^2 + at^m D_x^2 + (\alpha + i\beta t^n) D_x$$

переходит в оператор

$$(2.6) \qquad \mu^8\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mu^{2m_0}(\alpha + i\beta s^n \mu^{-4n} + as^m \mu^{-2m_0})\right],$$

где $m_0 = m-2$. Обозначим

$$(2.7) \qquad L = \frac{d^2}{ds^2} + \mu^{2m_0}(\alpha + i\beta s^n \mu^{-4n} + as^m \mu^{-2m_0}).$$

Пусть $y(s, \mu)$ — решение (1.5) уравнения (1.1). Положим

$$(2.8) \qquad y_M(s, \mu) = \left[\sum_{j=0}^{M} a_j(s)\mu^{-j}\right] \exp\left[\sum_{l=1}^{m_0} g_l(s)\mu^l\right].$$

Легко проверить, что в силу теоремы 1.1

$$(2.9) \qquad Ly_M(s, \mu) = \mu^{-M} Q_M(s, \mu) \exp\left[\sum_{l=1}^{m_0} g_l(s)\mu^l\right],$$

где, если m_0 не имеет вида $4kn$ для натурального числа k, $Q_M(s, \mu)$ — многочлен переменных s и μ, степени m_0-1 относительно μ, и если $m_0 = 4kn$ для натурального числа k,

$$Q_M(s, \mu) = R_M(s, \mu) \exp\left[(-i)^{k+1} d_k s^{kn+1}\right],$$

где $d_k>0$ — константа и $R_M(s, \mu)$ — многочлен переменных s и μ, степени m_0-1 относительно μ.

Для определенности дальше будем считать, что выполняется условие $4kn \leqq m_0 < 4(k+1)n$, где k — натуральное число. Пусть ω — произвольная окрестность начала координат в R^2, $p \geqq 0$ — целое число и $c>0$ — константа. Мы найдем пару функций класса $C_0^\infty(\omega)$, для которых нарушается неравенство (2.2).

Пусть F — функция класса $C_0^\infty(\mathsf{R}^2)$ и такая, что $\iint F\,dx\,dt = 1$. Положим

$$(2.10) \qquad f_\lambda(x, t) = \lambda^5 F(\lambda^2 x, \lambda^2 t), \quad \lambda \geqq 1.$$

Очевидно $f_\lambda \in C_0^\infty(\omega)$ для всех достаточно больших значений параметра λ.

Пусть

$$w_M(t, \xi) = y_M(t\xi^{2/(m+2)}, \xi^{1/2(m+2)}). \tag{2.11}$$

Так как, ввиду (2.3) и (2.4), для $l \geqq 1$ имеем $\mu^{m_0-4ln}s^{ln+1} = \xi^{1/2}t^{ln+1}$, $\mu^{m_0}s = \xi^{1/2}t$ и для $m_0 = 4kn$ имеем $s^{kn+1} = \xi^{1/2}t^{kn+1}$, то из (2.8) и (2.11) следует, что

$$w_M(t, \xi) = [\sum_{j=0}^{M} b_j(t, \xi)\xi^{-j/2(m+2)}] \exp[\xi^{1/2}B_{m_0}(t)], \tag{2.12}$$

где

$$B_{m_0}(t) = it\sqrt{\alpha} + \sum_{l=1}^{k} (-i)^{l+1} d_l t^{ln+1} \tag{2.13}$$

и

$$b_j(t, \xi) = \begin{cases} a_j(t\xi^{2/(m+2)}) & \text{для } \ 4kn < m_0 < 4(k+1)n \\ r_j(t\xi^{2/(m+2)}) & \text{для } \ m_0 = 4kn. \end{cases} \tag{2.14}$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, $\varphi \equiv 1$ в окрестности ω' точки $(0, 0)$, $\omega' \subset\subset \omega$, а $\psi \in C_0^\infty([1, 2])$, $\psi \geqq 0$ и $\int \psi d\rho = 1$. Обозначим

$$v_{\lambda, M}(x, t) = \varphi(x, t) \int_{1/\lambda}^{2/\lambda} \psi(\rho\lambda) \exp(ix\rho\lambda^2) w_M(t, \rho\lambda^2) d\rho, \ \lambda \geqq 1. \tag{2.15}$$

Очевидно $v_{\lambda, M} \in C_0^\infty(\omega)$ для любого фиксированного λ и любого целого числа $M \geqq 0$.

После элементарной замены переменных находим, что

$$\iint f_\lambda(x, t) v_{\lambda, M}(x, t) dx dt$$

$$= \iiint \lambda(\frac{x}{\lambda^2}, \frac{t}{\lambda^2}) F(x, t) \exp(ix\frac{\rho}{\lambda}) \psi(\rho) w_M(\frac{t}{\lambda^2}, \rho\lambda) dx dt d\rho.$$

Заметим, что $-3/2$ — самая большая степень параметра λ в выражении $(\rho\lambda)^{1/2}B_{m_0}(t/\lambda^2)$. В силу (2.14) и теоремы 1.1 имеем, что $b_j(t, \xi)$ — многочлен переменной $\tau = t\xi^{2/(m+2)}$, $b_j(0, \xi) = 0$ для $j \geq 1$ и $b_0(t, \xi) \equiv 1$. Тогда из (2.12) следует, что $w_M(t/\lambda^2, \rho\lambda) \to 1$ при $\lambda \to \infty$, если $1 \leq \rho \leq 2$ и $t \neq 0$, так как $2/(m+2) < 2$ для $m \geq 4n+2$, $n \geq 1$ — нечетное. Очевидно $w_M(0, \rho\lambda) = 1$. Таким образом получаем, что

$$\iint f_\lambda(x, t) v_{\lambda, M}(x, t) dx dt \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} \varphi(0, 0) \iint F(x, t) dx dt \int \psi(\rho) d\rho = 1. \tag{2.16}$$

Оценим правую сторону неравенства (2.2) для f_λ и $v_{\lambda, M}$. Для всех достаточно больших значений λ ввиду (2.10) имеем, что

$$\sum_{l+q \leq p} \sup_{\omega} |D_x^l D_t^q f_\lambda(x, t)| \leq \text{const}\, \lambda^{2p+5}. \tag{2.17}$$

Полагая

$$u_{\lambda, M}(x, t) = \int_{1/\lambda}^{2/\lambda} \psi(\rho\lambda) \exp(ix\rho\lambda^2) w_M(t, \rho\lambda^2) d\rho, \tag{2.18}$$

из (2.15) получаем, что

$$D_x^l D_t^q P^* v_{\lambda,M} = \varphi(D_x^l D_t^q P^* u_{\lambda,M}) + \sum_{\substack{l_1 \leqq l+1 \\ q_1 \leqq q+1}} K_{l_1 q_1}(x,t) D_x^{l_1} D_t^{q_1} u_{\lambda,M}, \tag{2.19}$$

где $K_{l_1q_1}(x, t)$ содержит хотя бы первую частную производную функции φ.

Принимая во внимание (2.5) — (2.9) и (2.11), легко показать, что

$$D_x^l D_t^q P^* u_{\lambda,M}(x,t) = \lambda^{-1} \int_1^2 \psi(\rho) \exp[ix\rho\lambda + (\rho\lambda)^{1/2} B_{m_0}(t)] \times H_M(t, \rho\lambda)\,(\rho\lambda)^{l+q/2+(7+m_0-M)/2(m+2)} d\rho, \tag{2.20}$$

где

$$|H_M(t,\xi)| \leqq T_M(|t|\,\xi^{2/(m+2)}) \quad \text{для} \quad 1 \leqq \xi \leqq 2. \tag{2.21}$$

$T_M(\tau)$ — многочлен, степень которого зависит от M. Полагая $\sigma = j_0$, если $k = 2j_0+1$, и $\sigma = j_0 - 1$, если $k = 2j_0$, получаем, что

$$\operatorname{Re}[B_{m_0}(t)] = -d_1 t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\sigma} (-i)^{2j+2} d_{2j+1} t^{(2j+1)n+1} \leqq -t^{n+1}\Big(d_1 - \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq \sigma \\ j\text{—нечетное}}} d_{2j+1} t^{2nj}\Big),$$

так как $n \geqq 1$ — нечетное число. Для $0 \leqq |t| \leqq \varepsilon$, где ε — достаточно малое число, зависящее только от m_0, имеем, что

$$\operatorname{Re}[B_{m_0}(t)] \leqq -d_1 t^{n+1}/2. \tag{2.22}$$

Кроме того,

$$-d_1 t^{n+1} \xi^{1/2}/2 \leqq -d_1(|t|\,\xi^{2/(m+2)})^{n+1}/2 \tag{2.23}$$

для $m \geqq 4n+2$ и $\xi \geqq 1$, и

$$T_M(\tau) \exp(-d_1 \tau^{n+1}/2) \leqq c_M \quad \text{для} \quad \tau \geqq 0. \tag{2.24}$$

Учитывая (2.21) — (2.24), из (2.20) получаем, что

$$|D_x^l D_t^q P^* u_{\lambda,M}(x,t)| \leqq c_{M,m_0,p} \lambda^{p-1+(7+m_0-M)/2(m+2)} \tag{2.25}$$

для любой точки $(x, t) \in \operatorname{supp}\varphi$ и $\operatorname{supp}\varphi$, содержащийся в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$.

Рассмотрим какое-нибудь другое слагаемое из выражения (2.19). Чтобы оценить его, достаточно получить оценку для $D_x^{l_1} D_t^{q_1} u_{\lambda,M}(x, t)$ в области $\{(x, t)\colon 0 \leqq |x| \leqq \varepsilon$ и $\delta \leqq |t| \leqq \varepsilon$ либо $\delta \leqq |x| \leqq \varepsilon$ и $0 \leqq |t| \leqq \varepsilon\}$, где $\delta > 0$ и ε — достаточно малое число.

Пусть $0 \leqq |x| \leqq \varepsilon$ и $\delta \leqq |t| \leqq \varepsilon$. Имеем, что

$$D_t^{q_1} w_M(t,\xi) = \sum_{\nu=0}^{q_1} c_\nu^{q_1} \xi^{2\nu/(m+2)} \exp[\xi^{1/2} B_{m_0}(t)] \times H_{q_1-\nu}(t,\xi)\Big[\sum_{j=0}^{M} A_{j,\nu}(t\xi^{2/(m+2)})\xi^{-j/2(m+2)}\Big], \tag{2.26}$$

где $A_{j,\nu}(\tau)$ — многочлен и $H_{q_1-\nu}(t, \xi)$ — многочлен переменных t и ξ, степени $(q_1-\nu)/2$ относительно ξ. Тогда, ввиду (2.22),

$$|D_t^{q_1} w_M(t, \xi)| \leq \xi^{q_1[1/2+2/(m+2)]} \exp\left(-\frac{d_1}{2}\delta^{n+1}\xi^{1/2}\right) T_{q_1, M}(\xi^{2/(m+2)}),$$

где $T_{q_1, M}(\tau)$ — многочлен, степень которого зависит от m_0, M и q_1. Так как

$$T_{q_1, M}(\tau) \exp\left(-\frac{d_1}{2}\delta^{n+1}\tau^{(m+2)/4}\right) \leq c_{M, m_0, N_1, q_1, \delta}\tau^{-N_1}$$

для $\tau \geq 0$ и любого вещественного числа N_1, то $|D_t^{q_1} w_M(t, \xi)| \leq c_{M, m_0, N_1, q_1, \delta}\xi^{q_1-N_1}$, откуда легко получаем, что

(2.27) $$|D_x^{l_1} D_t^{q_1} u_{\lambda, M}(x, t)| \leq c_{M, m_0, N_1, q_1, l_1 \delta}\lambda^{l_1+q_1-N_1-1}$$

для $\lambda \geq 1$ и $M \geq 0$.

Пусть $\delta \leq |x| \leq \varepsilon$ и $0 \leq |t| \leq \varepsilon$. Имеем, что $\frac{\partial^r}{\partial\rho^r}[\exp(ix\rho\lambda^2)] = (ix\lambda^2)^r \exp(ix\rho\lambda^2)$. Тогда

(2.28) $$\begin{aligned} &|\lambda^{2r} x^r| \, |D_x^{l_1} D_t^{q_1} u_{\lambda, M}(x, t)| \\ &= \left|\int_{1/\lambda}^{2/\lambda} \psi(\rho\lambda)(\rho\lambda^2)^{l_1} \frac{\partial^r}{\partial\rho^r}[\exp(ix\rho\lambda^2)] D_t^{q_1} w_M(t, \rho\lambda^2) d\rho\right| \\ &= \lambda^{r+l_1-1}\left|\int_1^2 \exp(ix\rho\lambda)\frac{\partial^r}{\partial\rho^r}[\psi(\rho)\rho^{l_1} D_t^{q_1} w_M(t, \rho\lambda)] d\rho\right|. \end{aligned}$$

Достаточно оценить $\frac{\partial^\sigma}{\partial\rho^\sigma}[D_t^{q_1} w_M(t, \rho\lambda)]$. Используем обозначения формулы (2.26). Имеем, что

(2.29) $$\frac{\partial^{\sigma_1}}{\partial\rho^{\sigma_1}}[(\rho\lambda)^{2\nu/(m+2)}] = c_{\sigma_1}\lambda^{2\nu/(m+2)}\rho^{2\nu/(m+2)-\sigma_1},$$

где c_{σ_1} — константа. Для $\sigma_2 \geq 1$

(2.30) $$\frac{\partial^{\sigma_2}}{\partial\rho^{\sigma_2}}\{\exp[(\rho\lambda)^{1/2} B_{m_0}(t)]\} = \lambda^{\sigma_2/2} h_{\sigma_2}(t, \rho, \lambda)\exp[(\rho\lambda)^{1/2} B_{m_0}(t)],$$

где $h_{\sigma_2}(t, \rho, \lambda)$ — многочлен относительно t, который содержит ρ в отрицательной степени, а λ — в не положительной. Для $p_1+p_2=\sigma_3$, $1 \leq \rho \leq 2$ и $\lambda \geq 1$

(2.31) $$\left|\frac{\partial^{p_1}}{\partial\rho^{p_1}}[(\rho\lambda)^{-j/2(m+2)}]\right| \leq c_{p_1, j, m},$$

где $c_{p_1, j, m}$ — константа, и

(2.32) $$\frac{\partial^{p_2}}{\partial\rho^{p_2}}[A_{j,\nu}(t(\rho\lambda)^{2/(m+2)})] = \lambda^{2p_2/(m+2)} C_{j, \nu, p_2}(t, \rho\lambda),$$

где

(2.33) $$|C_{j, \nu, p_2}(t, \xi)| \leq T_{j, \nu, p_2, m}(|t|\xi^{2/(m+2)}).$$

$T_{j, \nu, p_2, m}(\tau)$ — многочлен, степень которого зависит от ν, p_2 и M. Наконец,

$$(2.34)\qquad \left| \frac{\partial^{\sigma_4}}{\partial\rho^{\sigma_4}} [H_{q_1-\nu}(t, \rho\lambda)] \right| \leqq c_{q_1, \nu, \sigma_4} \lambda^{(q_1-\nu)/2}$$

для $1 \leqq \rho \leqq 2$, $\lambda \geqq 1$ и $0 \leqq |t| \leqq \varepsilon$.

Принимая во внимание (2.26), (2.29) — (2.34) и (2.22) — (2.24), получаем, что

$$\left| \frac{\partial^{\sigma}}{\partial\rho^{\sigma}} [D_t^{q_1} w_M(t, \rho\lambda)] \right| \leqq c_{m, M, q_1, \sigma} \lambda^{q_1+\sigma[1/2+2/(m+2)]}$$

для $1 \leqq \rho \leqq 2$, $\lambda \geqq 1$ и $0 \leqq |t| \leqq \varepsilon$. Отсюда и из (2.28) следует, что

$$(2.35)\qquad |D_x^{l_1} D_t^{q_1} u_{\lambda, M}(x, t)| \leqq c_{M, m_0, r, l_1, q_1, \delta} \lambda^{l_1+q_1-1+r[2/(m+2)-1/2]},$$

где $2/(m+2) < 1/2$ для $m \geqq 4n+2$, $n \geqq 1$ — нечетное число.

Ввиду (2.25), (2.27) и (2.35) для произвольного числа $N \geqq 0$ и $\lambda \geqq 1$ имеем, что

$$(2.36)\qquad \sum_{l+q \leqq p} \sup_{\omega} |D_x^l D_t^q P^* v_{\lambda, M}(x, t)| \leqq \text{const}\, \lambda^{-N},$$

если $M = M(N) \geqq 0$ — достаточно большое целое число и $\operatorname{supp} \varphi$ содержится в достаточно малой окрестности точки (0, 0). Из (2.17) и (2.36) для всех достаточно больших значений λ и для $N = 2p+6$ получаем

$$c \sum_{l+q \leqq p} \sup_{\omega} |D_x^l D_t^q f_\lambda(x, t)| \sum_{l+q \leqq p} \sup_{\omega} |D_x^l D_t^q P^* v_{\lambda, M}(x, t)| \leqq \text{const}\, \lambda^{-1},$$

что противоречит (2.16). Итак, случай $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ невозможен. Подобным образом рассматривается случай $\alpha > 0$ и $\beta < 0$.

Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда для $f \in C_0^\infty(\omega)$, где ω — окрестность точки (0, 0) существует распределение $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$ такое, что $Pu = f$ в ω. Положим $x = -y$ и обозначим $v(y, t) = u(-y, t)$, где $\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi(-y, t) \rangle$ для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Тогда $v \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^2)$. Если ω переходит при этой замене переменных в Ω, то Ω также является окрестностью точки (0, 0), $f(-y, t) \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$-D_t^2 v + a t^m D_y^2 v - (-\alpha - i\beta t^n) D_y v = f(-y, t) \text{ в } \Omega.$$

Это приводит к противоречию с предположением, что $\alpha < 0$. Теорема 2.1 полностью доказана.

Заметим, что если $P(P^*)$ локально разрешим в точках вида $(x, 0)$, где $x \neq 0$, то опять $\alpha = 0$.

3. Дадим некоторые необходимые и достаточные условия для гипоэллиптичности оператора P из т. 2.

Т е о р е м а 3.1. *Если оператор $P(P^*)$ гипоэллиптичен в окрестности* (0, 0), *то* $\alpha = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 52.2 из [3], если оператор $P(P^*)$ гипоэллиптичен в окрестности точки (0, 0), то оператор $P^*(P)$ локально разрешим в этой окрестности и, в частности — в начале координат. Доказательство теоремы 3.1 заканчивается применением теоремы 2.1.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть оператор P задается формулой* (2.1), *где a и β — вещественные константы*, $a\beta \neq 0$, $\alpha = 0$, *m и n — целые неотрица-*

тельные числа. Если оператор $P(P^*)$ гипоэллиптичен в окрестности точки $(0, 0)$, то m является четным числом и $a<0$.

Доказательство. Пусть P — гипоэллиптический оператор в окрестности Ω начала координат. В силу теоремы 2.3.1 из [6] для любой точки $(x, t)\in\Omega$ выполняется условие

$$(3.1)\qquad \text{либо } \tau^2-at^m\xi^2\geqq 0, \text{ либо } \tau^2-at^m\xi^2\leqq 0$$

для всех точек $(\xi, \tau)\in \mathsf{R}^2$. Предположим, что $a>0$. Пусть $(x_0, t_0)\in\Omega$, $t_0>0$, $\tau_1\neq 0$ и $\xi_2\neq 0$. Выбирая $\xi_1=2\tau_1/\sqrt{at_0^m}$ и $\tau_2=2\xi_2\sqrt{at_0^m}$, получаем $\tau_1^2-at_0^m\xi_1^2=-3\tau_1^2<0$ и $\tau_2^2-at_0^m\xi_2^2=3at_0^m\xi_2^2>0$, что противоречит условию (3.1). Следовательно, $a<0$. Аналогичным образом показывается, что m — четное число, если $a<0$. Теорема 3.2 доказана.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)=x\in\mathsf{R}^n$ и Ω — область в R^n. Положим $X_j(x, D)=\Sigma_{l=1}^n a_{jl}(x)D_{x_l}$ $(j=0, \ldots, r)$, где $a_{jl}(x)$ есть вещественнозначная функция класса $C^\infty(\Omega)$ $(l=1, \ldots, n;\ j=0, \ldots, r)$. Пусть k — произвольное натуральное число, $0\leqq\alpha_l\leqq r$ и α_l — целое число $(l=1, \ldots, k)$, и

$$\lambda_l=\begin{cases}2, & \text{если } \alpha_l=0,\\ 1, & \text{если } 1\leqq\alpha_l\leqq r\end{cases}$$

$(l=1, \ldots, k)$. Для мультииндекса $I=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ положим $|I|=\Sigma_{l=1}^k\lambda_l$ и $X_I=\operatorname{ad} X_{\alpha_1}\ldots\operatorname{ad} X_{\alpha_{k-1}}X_{\alpha_k}$, где $\operatorname{ad} AB=[A, B]=AB-BA$ для любых двух операторов A и B.

Определение 3.1 (см. [6]). *Система дифференциальных операторов $\{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ называется системой ранга n в точке $x_0\in\Omega$, если существует такое число $R(x_0)>0$, что*

$$\sum_{|I|\leqq R(x_0)}|X_I(x_0, \xi)|>0 \quad \text{для} \quad \xi\neq 0,$$

где $X_I(x, \xi)$ — символ дифференциального оператора X_I.

Теорема 3.3. *Пусть P — оператор (2.1), где $a<0$ — константа, $\beta\neq 0$ — вещественная константа, $\alpha=0$, $n\geqq 0$ — целое и $m\geqq 0$ — четное число. Тогда оператор $P(P^*)$ гипоэллиптичен в R^2.*

Доказательство. Докажем утверждение для оператора P, используя теорему 2.5.2 из [6]. Рассмотрим оператор $L=-P$. Положим $X_0=\beta t^n D_x$, $X_1=D_t$ и $X_2=\sqrt{-a}t^k D_x$, где $m=2k$ для целого числа $k\geqq 0$. Тогда коэффициенты операторов X_0, X_1 и X_2 являются вещественнозначными функциями класса $C^\infty(\mathsf{R}^2)$ и $L=X_1^2+X_2^2+iX_0$. Для гипоэллиптичности L достаточно показать, что в произвольной точке $(x_0, t_0)\in\mathsf{R}^2$ система операторов $\{X_0, X_1, X_2\}$ имеет ранг 2.

Случаи $m=0$, $n=0$ и $t_0\neq 0$ — тривиальные. Пусть $m\geqq 2$, $n\geqq 1$ и $t_0=0$. Легко показать, что

$$\underbrace{\operatorname{ad} X_1\ldots\operatorname{ad} X_1}_{n} X_0=\beta n!\ D_x \quad \text{и} \quad \underbrace{\operatorname{ad} X_1\ldots\operatorname{ad} X_1}_{k} X_2=\sqrt{-a}k!\ D_x.$$

Очевидно $\operatorname{ad} X_0X_2=0$. Для $I=(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0)$ имеем, что $|I|=n+2$, а для $I=(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 2)-|I|=k+1$. Если $m\leqq 2n+2$, то положим $R(x_0, 0)=k+1$, а в противном случае $-R(x_0, 0)=n+2$. Тогда для $(\xi, \tau)\in\mathsf{R}^2/0$

$$\sum_{|I|\leqq R(x_0,\,0)} X_I(x_0,\,0,\,\xi,\,\tau)=\left\{\begin{matrix} |\tau|+n!\,|\beta\xi| & \text{для} \quad m>2n+2 \\ |\tau|+\sqrt{-a}k!\,|\xi| & \text{для} \quad m\leqq 2n+2 \end{matrix}\right\}>0.$$

Теорема 3.3 доказана.

Комбинируя доказанные в т. 3 утверждения и теорему 2.1, получаем

Следствие 3.1. *Пусть оператор P задается формулой* (2.1), *где* $a<0$, $\beta\neq 0$ — *вещественная константа,* $n\geqq 1$ — *нечетное и* $m\geqq 4n+2$ — *четное число. Тогда следующие условия эквивалентны:* 1. *Операторы P и P^* локально разрешимы в* R^2. 2. *Операторы P и P^* гипоэллиптичны в* R^2. 3. $\alpha=0$.

Выражаю благодарность П. Р. Попиванову за постановку задачи, постоянное внимание к этой работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Menikoff. Some examples of hypoelliptic P. D. O. *Math. Annalen*, **221**, 1976, 167—181.
2. R. Rubinstein. Some examples of locally nonsolvable P. D. E. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **199**, 1974, 123—130.
3. F. Treves. Topological vector spaces, distributions and kernels. New York, 1967.
4. В. В. Грушин. Об одном классе гипоэллиптических уравнений. *Мат. сб.*, **83**, 1970, 456—473.
5. А. Найфэ. Методы возмущений. Москва, 1976.
6. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Москва, 1971.
7. П. Р. Попиванов. Некоторые классы дифференциальных операторов с кратными характеристиками, не имеющих решений. *Плиска*, 3, 1981, 47—60.
8. Л. Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, 1965.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 13. 10. 1980