Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ВАРИАНТЕ ГРАНИЧНОИ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДОЛЖЕНКО ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

ТОМА В. ТОНЕВ

В работе найдены необходимые и достаточные условия типа Долженко (1979) для того, чтобы замкнутое подмножество связной компактной группы с дуальной группой, изоморфной подгруппе рациональных чисел, было множеством единственности для некоторых классов обобщенно-аналитических функций с ограничениями роста вблизи подмножества, на связанном с группой большом круге.

Пусть G — связная компактная группа, дуальная группа $\widehat{G}$ которой (то есть группа характеров χ: $\chi(g_1g_2)=\chi(g_1)\chi(g_2)$) алгебраически изоморфна упорядоченной аддитивной группе R рациональных чисел (или ее подгруппе) Значит, мы можем считать характеры $\chi\in\widehat{G}$ занумерованными рациональным параметром: $\chi=\chi_{n/m}$, что и будем делать в дальнейшем. На большом круге (то есть на конусе над G): $\Delta_G=[0,\ 1)\times G/\{0\}\times G$ будем рассматривать продолжения $\widetilde{\chi}_{n/m}$ характеров $\chi_{n/m}$ для неотрицательных значениях параметра n/m, определяемые следующим образом: $\widetilde{\chi}_{n/m}(\lambda,\ g)=\lambda^{n/m}\chi_{n/m}(g)$, $\lambda\neq 0$, $n/m\neq 0$ $\widetilde{\chi}_0\equiv 1$, а $\widetilde{\chi}_{n/m}(*)=0$ для $n/m\neq 0$, где $*=\{0\}\times G/\{0\}\times G$ — вершина конуса Δ_G над G. Через $\mathrm{Hol}(\Delta_G)$ будем обозначать множество обобщенно-голоморфных на Δ_G функций, т. е. тех непрерывных на Δ_G функций, которые аппроксимируются равномерно на компактах Δ_G линейными комбинациями функций $\widetilde{\chi}_{n/m}$, а через A_G — множество непрерывных вплоть до границы G обобщенно-голоморфных функций (это так называемые обобщенно-аналитические функции в смысле Аренса—Зингера). Для функций из A_G существует аналог формулы Пуассона, а именно, для каждого $\lambda\in[0,\ 1)$ существует регулярная мера Бэра m_λ на G, такая, что для любой функции $f\in A_G$ имеет место [2]

$$f(\lambda,\ g)=\int_G f(hg)dm_\lambda(h)\ . \tag{1}$$

Заметим, что $m_0=d\sigma$ представляет собой меру Хаара на G. В нашем случае (когда $\widehat{G}\subset R$) меры m_λ с этим свойством единственны, для $\lambda\in(0,\ 1)$ меры m_λ взаимно абсолютно непрерывны, но, в отличие от классического случая, ни одна мера m_λ, $\lambda\in(0,\ 1)$, не является абсолютно непрерывной относительно меры Хаара $d\sigma$. На Δ_G можно рассматривать аналоги гармонических функций — это функции из $\mathrm{Re\,Hol}(\Delta_G)$. Имеется, однако, существенная разница между классическим и обобщенно-аналитическим случаем: не для всех

$f\in L^1(G)$ функции, определенные на Δ_G формулой (1), обязаны быть непрерывными. Один пример [2]. Имеется вложение j вещественной оси $\mathbb{R}^1$ в G с всюду плотным образом Λ: $j: \mathbb{R}^1\to G$, $\overline{j(\mathbb{R}^1)}=\bar\Lambda=G, d\sigma(\Lambda)=0$. Оказывается, что кроме $m_0=d\sigma$, все меры m_λ, $\lambda\in(0, 1)$ сосредоточены на множестве Λ. Продолжение характеристической функции X_Λ по формуле (1) равняется 1 в точках вида $\{(\lambda, g)\mid g\in\Lambda\}$ и 0 — в остальных точках, и, значит, она будет всюду разрывной на $\bar\Delta_G$. Однако продолжения непрерывных на G функций по формуле (1) оказываются опять непрерывными [2].

В Δ_G существует естественная метрика

$$d((\lambda,\ g),\ (\lambda_1,\ g_1))=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\,|\,\tilde\chi_{1/n}(\lambda,\ g)-\tilde\chi_{1/n}(\lambda_1,\ g_1)\,|.$$

Пусть ω — непрерывная, монотонно возрастающая на $[0, 1]$ функция, $0\leqq\omega(t)\leqq 1$ и $\omega(0)=0$. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$B(\omega,\ E)=\{f\in A_G\mid\ |f(\lambda,\ g)|\leqq\omega(d((\lambda,\ g),\ E))$ в некоторой окрестности множества $E\}$ и

$$I_\lambda(\omega,\ E)=\int_G\ln\frac{1}{\omega(d(g,\ E))}\,dm_\lambda(g).$$

Ясно, что $-\infty<I_\lambda(\omega,\ E)\leqq\infty$.

В [1] Долженко доказал, что если $G=S$ (т. е. когда большой круг совпадает с единичным кругом на плоскости, а обобщенно-аналитические функции совпадают с обычными аналитическими на круге функциями), условие $I_\lambda(\omega,\ E)<\infty$, $\lambda\in[0, 1)$ (сводящееся в этом случае к единственному условию $I_0(\omega,\ E)<\infty$) является необходимым и достаточным для нетривиальности класса $B(\omega, E)$. Мы распространяем эти результаты Долженко на случай более общих групп G.

Теорема 1. *Если существует $\lambda\in[0, 1)$, такое, что $I_\lambda(\omega,\ E)=\infty$, то класс $B(\omega,\ E)$ состоит из одной нулевой функции.*

Доказательство. Пусть $I_\lambda(\omega,\ E)=\infty$ для некоторого $\lambda\in[0, 1)$ и $f\in B(\omega,\ E)$. Как показал Аренс [3], если $f\in A_G$ и $f\neq 0$, то $\ln|f|\in L^1(m_\lambda)$ для всех $\lambda\in[0, 1)$. Но тогда

$$\int_G\ln|f(\lambda,\ g)|\,dm_\lambda(g)\leqq\int_G\ln\omega(d(g,\ E))dm_\lambda(g)=-\infty,$$

откуда $\int_G\ln|f(\lambda,\ g)|\,dm_\lambda(g)=-\infty$, что противоречит $L^1(m_\lambda)$-суммируемости функции $\ln|f|$. Следовательно $f\equiv 0$.

Если E — подмножество G, то через A_G^E будем обозначать множество тех обобщенно-голоморфных на Δ_G функций, которые непрерывны вплоть до множества $G\setminus E$, т. е. $A_G^E=\mathrm{Hol}(\Delta_G)\cap C(\bar\Delta_G\setminus E)$. Ясно, что в случае пустого множества алгебра $A_G^{\varnothing}$ совпадает с алгеброй A_G обобщенно-аналитических функций Аренса—Зингера.

Теорема 2. *Пусть E — такое замкнутое подмножество G, что $\ln\omega(d(g,\ E))\in\mathrm{Re}\,A_G^E$. Если для любого $\lambda\in[0, 1)$ выполнено $I_\lambda(\omega,\ E)<\infty$, то найдется такая функция $f\in A_G$, которая в близости к E удовлетворяла бы условию $|f(\lambda,\ g)|\leqq\omega(d((\lambda,\ g), E))$.*

Доказательство. Заметим сначала, что в обобщенно-аналитическом случае нет такого полезного факта о непрерывном продолжении вплоть до границы сопряженных гладких гармонических функций (да и само понятие гладкости до сих пор еще вполне не выяснено). Зато имеется более слабый факт, а именно, что функции из $\operatorname{Re} A_G|_G$ всюду равномерно плотны в $C_R(G)$, а заодно, что функции из A_G^E всюду плотны в пространстве $L_1(G, m_\lambda)$ для любого $\lambda \in [0, 1)$.

Пусть $u(\lambda, g) \in \operatorname{Re} A_G^E$, $u(\lambda, g)|_G = \ln \omega d(g, E)) \leq 0$ и пусть $w \in A_G^E$, $u = \operatorname{Re} w$. Рассмотрим функцию $f_0(\lambda, g) = e^{cw(\lambda, g)} \in A_G^E$, где постоянную $c \geq 0$ определим ниже. Поскольку $\max\limits_{\Delta_G} |e^{cw(\lambda, g)}| \leq \max\limits_{G} |e^{cw(1, g)}| \leq \max\limits_{G} e^{cu(1, g)} \leq 1$, то $|f_0(\lambda, g)| \leq 1$. Сейчас построим вспомогательную — „барьерную" функцию. Пусть $(\lambda_0, g_0) \in \bar{\Delta}_G \setminus E$ и пусть $g_1 \in E$ — ближайшая точка E к точке (λ_0, g_0). Пусть φ — характеристическая функция множества $S = \{g \in G | d(g, g_1) \leq d((\lambda_0, g_0), g_1)\}$. Число $\ln(\omega(d((\lambda_0, g_0), g_1)))$ обозначим для краткости через d_0. Поскольку на G выполняется неравенство $u(g) \leq \varphi(g) d_0 = \varphi_0(g) \leq 0$, то

$$\int\limits_G u(g \,.\, h) dm_\lambda(g) \leq \int\limits_G \varphi_0(g \,.\, h)\, dm_\lambda(g) = \tilde{\varphi}_0(\lambda, h)$$

из-за положительности m_λ. Нам будет нужна следующая

Лемма. *Существуют такие постоянные $b > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, что если $0 < \rho \leq b$, неравенство $\tilde{\varphi}(\lambda, g) \geq \alpha$ выполняется на всюду плотном подмножестве точек множества $Z_\rho = \{(\lambda, g) \in A_G | d((\lambda, g), (\lambda, g_1) \leq \rho\}$.*

Доказательство. Для каждого $is \in i\mathbb{R}^1$ определяется характер $e_s \in \hat{\hat{G}} \cong G$, а именно: $e_s(p) = e^{isp}$, $p \in \hat{G}$. Возникает вложение $j_0 : i\mathbb{R}^1 \to G$ (аналогичное упомянутому в начале вложении j) имагинерной оси $i\mathbb{R}^1$ на всюду плотной подгруппе G, которое продолжается на всю правую полуплоскость $\Pi = \{z | \operatorname{Re} z \geq 0\}$, как $j_0(x+iy) = (\lambda, g)$, где $\lambda = e^{-x}$, а $g = j_0(y)$. Притом $j_0(\Pi)$ оказывается всюду плотным подмножеством $\bar{\Delta}_G$, а композиции $f \circ j_0$ всех функций из $\operatorname{Hol}(\Delta_G)$ оказываются аналитическими функциями на Π [2, 4]. Поскольку множесто $j_0(i\mathbb{R}^1)$ содержит точку e, то множество $j_0(i\mathbb{R}^1) + g$ будет содержать точку g, т. е. полуплоскость Π можно вложить в $\bar{\Delta}_G$ так, что ее образ содержал фиксированную точку (λ, g), $\lambda \neq 0$. Если ψ — ограниченная функция Бэра на G, то

$$\int\limits_G \psi(gh) dm_\lambda(g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(j_0(iy)) \frac{x}{x^2 + (u-y)^2}\, dy,$$

где $x = -\ln \lambda$, $h = j_0(iu)$ [2]. Ради простоты мы будем считать, что $g_1 = e$, и пусть j_0 — вложение Π в $\bar{\Delta}_G$, проходящем через точки e. Пусть сперва точка z_0 принадлежит связной компоненте множества $j_0^{-1}(Z_\rho)$, $\rho > 0$, содержащей точки 0, и $z_0 = j_0^{-1}(\mu_0, h_0)$. Оценим снизу $\tilde{\varphi}(\mu_0, h_0) = \tilde{\varphi}(j_0(z_0))$. Поскольку $\tilde{\varphi}(j_0(z))|_{i\mathbb{R}^1} = \chi_{Z_\rho \cap G}(j(z)) \geq \chi_T(j(z))$, где T — компонента связности множества $j_0(i\mathbb{R}^1) \cap Z_\rho$, содержащей точки e, то

$$\tilde{\varphi}(j_0(z)) = \int\limits_G \varphi(gh) dm_\lambda(g)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(e_y)\frac{x}{x^2+(u-y)^2}\,dy\geq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{j_0^{-1}(T)}(e_y)\frac{x}{x^2+(u-y)^2}\,dy.$$

Последнее выражение представляет собой гармоническую функцию — решение задачи Дирихле для χ_T в области П. Известно, что гармонические функции на полуплоскости не определяются однозначно своими граничными значениями. На П они определяются с точностью до слагаемого вида $A.y$, $A\in\mathbf{R}^1$. Но поскольку $\tilde{\varphi}$ ограничена, дополнительного слагаемого в нашем случае не будет, и если $j_0^{-1}(T)=[-it, it]$, то решение задачи Дирихле с граничными значениями $\chi_{j_0^{-1}(T)}(iy)$ задается функцией $\zeta(z)=\operatorname{Im}\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\frac{z+it}{z-it}$.

Выразим сейчас точку $x_1=-\ln(1-\rho)$ через t. Из $\rho=d(j_0(it), e)$ имеем

$$\rho=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\tilde{\chi}_{1/n}(j_0(it))-\tilde{\chi}_{1/n}(1, e)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|e^{it/n}-1|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{\left(\cos\frac{t}{n}-1\right)^2+\sin^2\frac{t}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{2-2\cos\frac{t}{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|\sin\frac{t}{2n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{t}{2n},$$

поскольку $t\in[0, \pi]$. Сейчас

$$x_1=-\log\lambda_1=-\ln(1-\rho)=-\ln\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{t}{2n}\right)\leq-\ln\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{t}{2n}\right)$$

$$\leq-\ln\left(1-t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^n}\right)=-\ln(1-at),$$

где $a=\Sigma_{n=1}^{\infty}1/n.2^n$, $0<a<1$. Пусть k — фиксированное число, $a<k<1$. Тогда существует такое $0\leq\sigma\leq\pi$, что если $0\leq t\leq\sigma$, то $-\ln(1-at)\leq kt$, т. е. что $x_1\leq k.t$, $k<1$. Нетрудно видеть, что связная компонента Σ множества $j_0^{-1}(Z_\rho)$, содержащая точки 0, содержится в прямоугольнике $0\leq x\leq t$, $-t\leq y\leq t$, и что посредством функции $\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\frac{z+it}{z-it}$ этот прямоугольник преобразуется в множество, содержащееся в полосе $0<\alpha\leq\operatorname{Im}z\leq 1$, где α не зависит от t. Итак, мы получаем, что существует такая постоянная $\alpha>0$, что на Σ имеет место неравенство $\tilde{\varphi}_0(j_0(z))\geq\zeta(j_0(z))\geq\alpha$, если только $t\leq\sigma$, т. е. если

$$\rho\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\sigma}{2n}=b.$$

Если z_0 не принадлежит связной компоненте Σ множества $j_0^{-1}(Z_\rho)$, то $\tilde{\varphi}(j_0(z_0))|_{i\mathbf{R}^1}=\chi_{Z_\rho\cap G}(j_0(z_0))\geq\chi_F(j_0(z_0))$, где F — пересечение G с компонентой связности $j_0^{-1}(Z_\rho)$, содержащем точки z_0. Сейчас компонента связности $j_0^{-1}(Z_\rho)$, содержащей точки z_0, содержится в прямоугольнике вида $0\leq x\leq t$, $t_0\leq y\leq t_0+2t$. Аналогичные рассуждения, как и выше, дают нам, что

$\tilde{\varphi}(j_0(z_0)) \geqq \alpha$, если $\rho \leqq b$. Поскольку множество $j_0 \circ j_0^{-1}(Z_\rho)$ всюду плотно в Z_ρ то неравенство $\tilde{\varphi}(\lambda, g) \geqq \alpha$ выполняется на всюду плотном подмножестве Z_ρ, $\rho \leqq b$, что и требовалось.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим $O_b(E)$-окрестность множества E. Для точек $(\mu, h) \in O_b(E)$ будет выполняться $0 \leqq t \leqq \sigma$, а заодно и нижняя оценка из леммы. Поскольку $d_0 < 0$, $\varphi_0(h) = d_0 . \varphi(h) \leqq 0$ и на $j_0 \circ j_0^{-1}(Z_\rho)$ выполняется $\tilde{\varphi}_0(\mu, h) \leqq d_0 . \alpha$. Следовательно, $\tilde{u}(\mu, h) = \int_G u(g.h)\, dm_\mu(g) \leqq \tilde{\varphi}_0(\mu, h) \leqq d_0 . \alpha$, и, в частности, $\tilde{u}(\lambda_0, g_0) = \int_G u(g . g_0)\, dm_{\lambda_0}(g) \leqq d_0 . \alpha = \alpha . \ln(\omega(d((\lambda_0, g_0), g_1)))$, если $(\lambda_0, g_0) \in j_0 \circ j_0^{-1}(Z_\rho)$. Поскольку $u(j(z))$ и $\tilde{u}(j(z))$ — ограниченные гармонические функции в П с одинаковыми граничными значениями, то они совпадают тождественно. Следовательно, $u(\lambda_0, g_0) \leqq \alpha \ln(\omega(d((\lambda_0, g_0), g_1)))$. Положим $c = 1/\alpha$. Теперь $|f_0(\lambda_0, g_0)| = e^{cu(\lambda_0, g_0)} \leqq e^{(1/\alpha)u(\lambda_0, g_0)} \leqq \omega((d((\lambda_0, g_0), g_1))) = \omega(d((\lambda_0, g_0), E))$. Мы получили, что для точек $(\mu, h) \in O_b(E)$ выполнено $|f_0(\mu, h)| \leqq \omega(d((\mu, h), E))$, т. е. $f \in B(\omega, E)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Долженко. Об одном типе граничных теорем единственности для аналитических функций. *Мат. заметки*, **25**, 1979, 845—855.
2. K. Hoffman. Boundary behaviour of generalized analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87**, 1958, 447-466.
3. R. Arens. The boundary integral of log $|f|$ for generalized analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86**, 1957, 57-69.
4. Т. Гамелин. Равномерные алгебры. Москва, 1973.

Единый Центр математики и механики
1090 София, П. Я. 373

Поступила 3. 12. 1980