Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О РАЗМЕРНОСТИ ЗАМКНУТЫХ ОБРАЗОВ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

И. М. ЛЕЙБО

В работе доказано равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для замкнутых образов метрических пространств, их нульмерных замкнутых прообразов, а также совершенная n-мерность некоторых классов пространств

Существуют три основных размерностных инварианта $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$, соотношения между которыми для различных классов пространств всегда представляли особенный интерес. Перечислим основные результаты, полученные в этом направлении.

П. С. Урысон [9] доказал равенства

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X \tag{1}$$

для компактов. В. Гуревич и Л. А. Тумаркин [7] доказали равенства (1) для вполне регулярных пространств со счетной базой М. Катетов [2] доказали равенство

$$\dim X = \operatorname{Ind} X \tag{2}$$

для любых метрических пространств. Б. А. Пасынков [5], обобщая результат Катетова, показал его справедливость для любых нормальных пространств, допускающих замкнутое и нульмерное в смысле dim отображение на метрическое пространство. Как показывает пример Роя, для которого $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = 1$, равенства (1) в произвольном метрическом пространстве не выполняются.

Если свойства пространства X „мало" отличаются от свойств метрического, то можно ожидать выполнение равенства (2). Поэтому В. И. Пономарев поставил вопрос о совпадении размерностей $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ для замкнутых образов метрических пространств.

В настоящей работе на этот вопрос дается положительный ответ, а также обобщается цитированная теорема Б. А. Пасынкова: показывается выполнение равенства (2) для нульмерных в смысле dim прообразов замкнутых образов метрических пространств при замкнутых отображениях. Кроме того, доказана совершенная n-мерность (в смысле В. И. Пономарева) замкнутых образов матрических пространств.

На этом сходство между метрическими пространствами и их замкнутыми образами не заканчивается. Хорошо известно [1], что для метрического пространства X размерности $\dim X \leq n$ справедливо разложение $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$, где $\dim X_i \leq 0$, $i=1, 2, \ldots, n+1$. Этим же свойством обладают замкнутые образы метрических пространств: если X — замкнутый образ метрического пространства, $\dim X \leq n$, то $X=\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$, где $\dim X_i \leq 0$, $i=1, 2, \ldots, n+1$. Более того, как в метрических пространствах, все перечисленные свойства наследуются по любым подмножествам замкнутых образов метрических пространств. В работе К. Нагами [8] ввел понятие σ-метрических пространств. Все перечисленные выше разультаты справедливы для этих пространств, а, значит, и для CW-комплексов [16].

В заключение мне приятно выразить благодарность Б. А. Пасынкову за постоянную помощь и внимание к работе.

1. О равенстве размерностей для замкнутых образов метрических пространств. Все рассматриваемые в этом параграфе пространства мы будем предполагать нормальными. Напомним некоторые понятия, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 1.1. *Для пространства Z размерности $\operatorname{Ind} Z=n$ мы будем говорить, что замкнутое в Z множество F и окрестность OF этого множества определяют размерность пространства Z, если для каждой окрестности UF множества F такой, что $[UF] \subseteq OF$, имеем* $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} UF \geq n-1$.

Определение 1.2. *Счетный набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых в пространстве Z множеств F_i и их окрестностей OF_i мы будем называть специальными, если для каждого замкнутого множества $M \subseteq Z$ существует такой номер $i_0=i_0(M)$, что пара $(M \cap F_{i_0}, M \cap OF_{i_0})$ определяет размерность* $\operatorname{Ind} M$.

Замечание. Пусть набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ является специальным и для каждого $i \in N$ существует такое замкнутое множество Φ_i, что $F_i \subseteq \Phi_i \subseteq OF_i$. Тогда набор $\{\Phi_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ тоже будет специальным.

Понятие специального набора позволяет дать следующее достаточное условие для выполнения равенства (2) в нормальном пространстве.

Теорема 1. *Пусть в нормальном пространстве Y существует специальный набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда* $\dim Y=\operatorname{Ind} Y$.

Для доказательства теоремы 1 необходимо следующее понятие и утверждения.

Определение 1.3. *Непрерывное отображение $g: Y \to Z$ пространства Y на пространство Z мы будем называть специальным относительно набора $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ в Y, если существует открытое множество $OgF_j \subseteq Z$ такое, что $[gF_j] \subseteq OgF_j$ и $g^{-1}(OgF_j) \subseteq OF_j$ для любого $j \in N$.*

Лемма 1.1. *Пусть пространство Y имеет специальный набор $\varphi=\{F_i, QF_i\}_{i=1}^{\infty}$, и непрерывное отображение $g: Y \to Z$ специальное относительно набора φ. Тогда* $\operatorname{Ind} Z \geq \operatorname{Ind} Y$.

Утверждение 1.1. *Пусть в нормальном пространстве Y существует специальный набор. Тогда в Y имеется такой специальный набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$, относительно которого существует специальное отображение $g: Y \to Z$ пространства Y на метрическое со счетной базой пространство Z, причем $g^{-1}gF_i=F_i$ для любого $i \in N$ и* $\dim Z=\dim Y$.

Доказательство теоремы 1, леммы 1.1., утверждения 1.1. см. в [12].

Теорема 2. *Пусть $f_0: X_0 \to Y$ — замкнутое отображение метрического пространства X_0 на пространство Y. Тогда* $\dim Y=\operatorname{Ind} Y$.

Непосредственным следствием этой теоремы является

Теорема 3. *Пусть* $f_0: X_0 \to Y$ — *замкнутое отображение метрического пространства* X_0 *со счетной базой на пространство* Y. *Тогда* $\dim Y = \operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y$.

При доказательстве теорем мы будем использовать лемму Веденисова, которую можно найти в работе [1].

Лемма (Веденисова). *Пусть* A *и* B — *замкнутые дизъюнктивные множества нормального пространства* Z *и* $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ — *система открытых множеств в пространстве* Z, *причем выполнены следующие условия:*

1) $A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$,

2) *если* $A \cap [O_j] \neq \varnothing$, *то* $B \cap [O_j] = \varnothing$ *для* $j = 1, 2, \ldots$ *Тогда существует перегородка* C *между множествами* A *и* B *в пространстве* Z *такая, что* $C \subseteq (\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} O_i) \cup (Z \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i)$.

Строение пространства Y хорошо изучено. А именно, по теореме Н. Лашнева [3] пространство $Y = X \cup D$, где X — метрическое пространство, а множество D является σ-дискретным, т. е. $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, где для каждого $i \in N$ множество D_i дискретно в пространстве Y. Кроме того, пространство, Y, как замкнутый образ метрического, является совершенно нормальным паракомпактом [15]. Поэтому, если множество X не пусто, в теореме 2, не теряя общности, мы можем считать, что множество X плотно в пространстве Y. Это непосредственно вытекает из теоремы суммы [11]. Если $X = \varnothing$, то $\dim Y = \operatorname{Ind} Y$. Аналогично $\dim Y = \operatorname{Ind} Y$, если $\operatorname{Ind} Y = 1$.

Лемма 1.2. *В предположениях теоремы* 2 *в пространстве* Y *существует счетный набор* $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ *замкнутых множеств* F_i *и их окрестностей* OF_i *такой, что:* (*) *для каждого множества* $M \subseteq Y$ *существует номер* $i_0 = i_0(M)$, *для которого пара* $\{M \cap F_{i_0}, M \cap OF_{i_0}\}$ *определяет размерность* $\operatorname{Ind} M$.

Доказательство леммы 1.2 вытекает из следующих предложений.

Предложение 1.1. *Пусть совершенно нормальное паракомпактное пространство* Y *есть дизъюнктивная сумма двух подпространств:* $Y = X \cup D$, $[X] = Y$, *где* X — *метрическое, а* D — *произвольное. Тогда существует такая замкнутая в* Y *система* $\gamma = \{F_\alpha\}$, $\alpha \in A$, *являющаяся покрытием множества* X, *и существует такая открытая и σ-дискретная в* Y *система* $\omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in A$, $(A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *система* $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A_i}$ *дискретна в* $Y)$, *что* $F_\alpha \subseteq G_\alpha$, $\alpha \in A$ *и система* ω *образует базу точек* $x \in X$ *в пространстве* Y, *а* $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *образует сеть для точек множества* X.

Доказательство. Отметим, что пространство Y будет наследственно паракомпактным [1]. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим окрестность O_x^i в Y такую, что $\operatorname{diam}(O_x^i \cap X) \leq 1/i$. Система $\{O_x^i\}_{i=1}^{\infty}$ образует базу точки $x \in X$ в пространстве Y, так как множество X всюду плотно в Y. Система $\lambda_i = \{O_x^i\}_{x \in X}$ является открытым в пространстве Y покрытием множества X. Пусть $O^i = \bigcup_{x \in X} O_x^i$, ясно, что $X \subseteq O^i$. Рассмотрим $F^i = Y \setminus O^i$. Пространство Y совершенно нормально, поэтому существует последовательность открытых множеств $\{V_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $[V_j^i] \subseteq V_{j-1}^i$ и $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j^i = F^i$. Пространство Y наследственно паракомпактно, поэтому мы можем вписать в λ_i открытое и σ-дискретное в O^i покрытие $\gamma_i' = \{\Gamma_\alpha'\}_{\alpha \in B}$ множества O^i. Тогда система $\gamma_{ij}' = \{\Gamma_\alpha' \setminus [V_j^i]\}_{\alpha \in B}$ будет открытой и σ-дискретной системой в пространстве Y, причем σ-дискретная система $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} \gamma_{ij}'$ образует базу точек $x \in X$ в пространстве Y, так как система $\lambda=\bigcup_{i=1}^{\infty}\lambda_i$ образует базу точек $x\in X$ в Y. Пусть система $\bigcup_{i,j=1}^{\infty}\gamma'_{ij}$ распадается в счетную сумму дискретных систем $\mathscr{L}'_n=\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}_n}$, $n=1, 2, \ldots$ Фиксируем $\alpha\in\mathfrak{A}_n$. Для любых $n, k\in N$ обозначим $\cup\{[\Gamma_\beta]:\Gamma_\beta\in\mathscr{L}'_k, [\Gamma_\beta]\subseteq\Gamma_\alpha\in\mathscr{L}'_n\}$ через $F^k_{n,\alpha}$. Множество $F^k_{n,\alpha}$ замкнуто в Y и содержится в Γ_α, $\alpha\in\mathfrak{A}_n$, $k\in N$. Кроме того, $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}_n}F^k_{n,\alpha}$ содержится в $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}_n}\Gamma_\alpha$, и для каждого $x\in X$ существует такое $F^k_{n,\alpha}$, что $x\in F^k_{n,\alpha}$. Положим $\gamma=\{F^k_{n,\alpha}\}$ и $\omega=\{\Gamma_\alpha\}$. Системы γ и ω, как это непосредственно следует из построения, искомые. Предложение доказано.

В условиях предложения 1.1 положим $F_i=\bigcup_{\alpha\in A_i}F_\alpha$ и $G_i=\bigcup_{\alpha\in A_i}G_\alpha$. Ясно, что $F_i\subseteq G_i$. Рассмотрим счетный набор $\varphi_0=\{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$. Для каждого множества F_i, $i=1, 2, \ldots$ возьмем такую окрестность UF_i множества F_i, что $[UF_i]\subseteq G_i$. Тогда справедливо следующее

Предложение 1.2. *Пусть A и B — замкнутые в Y дизъюнктивные множества, причем $A\cup B\subseteq X$. Тогда существует перегородка C между множествами A и B в пространстве Y такая, что*

$$(**)\qquad C\subseteq\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\operatorname{Fr}UF_i\Big)\cup(Y\setminus X).$$

Доказательство. Отметим, что формально утверждение предложения верно и в том случае, когда $X=\varnothing$. При доказательстве предложения 1.2 используем обозначения, введенные при доказательстве предложения 1.1. Из предложения 1.1 следует, что в множестве индексов A_i, $i=1, 2, \ldots$ можно выделить два подмножества A^1_i и A^2_i такие, что для каждого $\alpha\in A^1_i$ имеем

1) $[G_\alpha]\cap B=\varnothing$, и для каждого $\beta\in A^2_i$ имеем

2) $[G_\beta]\cap B\neq\varnothing$, но $[G_\beta]\cap A=\varnothing$.

Причем в подмножество A^1_i берутся все индексы из A_i, для которых выполнено условие (1), а A^2_i состоит из всех индексов из A_i, для которых выполнено условие (2). Возможно, что A^j_i, $j=1, 2$, будут пустыми.

Обозначим $\bigcup_{\alpha\in A^1_i}G_\alpha$ через U_i и $\bigcup_{\alpha\in A^2_i}G_\alpha$ через V_i. Положим $F^1_i=\bigcup_{\alpha\in A^1_i}F_\alpha$ и $F^2_i=\bigcup_{\alpha\in A^2_i}F_\alpha$. Тогда $F^1_i\subseteq U_i$ и $F^2_i\subseteq V_i$, причем $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}F^1_i$, $B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}F^2_i$, $[U_i]\cap B=\varnothing=[V_i]\cap A$ и $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i\cup V_i)$. Обозначим $U_i\cap UF_i$ и $V_i\cap UF_i$ через O^1_i и O^2_i соответственно. Тогда $F^1_i\subseteq O^1_i\subseteq[O^1_i]\subseteq U_i$, $F^2_i\subseteq[O^2_i]\subseteq V_i$. Отметим, что $\operatorname{Fr}O^1_i\subseteq\operatorname{Fr}UF_i$, $\operatorname{Fr}O^2_i\subseteq\operatorname{Fr}UF_i$. Теперь по лемме Веденисова можно построить перегородку C между множествами A и B такую, что

$$C\subseteq\Big(\bigcup_{j=1,2;\ i=1,2,\ldots}\operatorname{Fr}O^j_i\Big)\cup\Big(Y\setminus\bigcup_{j=1,2;\ i=1,2,\ldots}O^j_i\Big).$$

Отметим, что $X\subseteq\bigcup_{j=1,2;\ i=1,2,\ldots}F^j_i$. Поэтому $C\subseteq\big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\operatorname{Fr}UF_i\big)\cup D$. Предложение 1.2 доказано.

Предложение 1.3. *Пусть $\operatorname{Ind}Y=m$, $m\geq 2$. Тогда существует номер i_0 такой, что пара $\{F_{i_0}, G_{i_0}\}\in\varphi_0$ определяет размерность $\operatorname{Ind}Y$.*

Доказательство. Пусть A и B — дизъюнктивные замкнутые в Y множества, причем $A\cup B\subseteq X$. Пусть набор φ_0 не определяет размерность $\operatorname{Ind}Y$. Тогда существуют окрестности UF_i множеств F_i, $i=1, 2, \ldots$, такие, что $[UF_i]\subseteq G_i$, $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr}UF_i\leq m-2$. По предложению 1.2 существует перегородка C между множествами A и B в Y, удовлетворяющая условию (**). Тогда по теореме суммы для размерности Ind в совершенно нормальных пространствах [II] получаем, что $\operatorname{Ind} C \leq m-2$. Пусть теперь A' и B' — любые замкнутые в Y дизъюнктивные множества. Так как множество D нульмерное во всех смыслах, а пространство Y наследственно нормально, существуют такие окрестности OA' и OB' множества A' и B', что $[OA'] \cap [OB'] = \emptyset$ и $\operatorname{Fr} OA' \cup \operatorname{Fr} OB' \subseteq X$.

Но тогда легко показать [1], что построенная выше перегорода C между множествами $\operatorname{Fr} OA'$ и $\operatorname{Fr} OB'$ содержит перегородку C' между A' и B' в Y. Таким образом, любые два замкнутые в Y A' и B' отделены $(m-2)$-мерной перегородкой. Полученное противоречие доказывает предложение 1.3.

Замечание 1.1. Пусть множество $M \subseteq Y$ и $\operatorname{Ind} M = m$, $m \geqq 2$. Тогда множество $X_M = X \cap M$ не пусто. Пусть на множестве Y существуют системы γ и ω из условия предложения 1.1. Тогда системы $\gamma' = M \wedge \gamma = \{M \cap F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\omega' = \omega \wedge M = \{M \cap \Gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ удовлетворяют условию предложения 1.1 на множестве M, но тогда для множества M справедливы предложение 1.2 и предложение 1.3, т. е. система $\varphi_0' = M \wedge \varphi_0$ определяет размерность $\operatorname{Ind} M$.

Поясним условие $m \geqq 2$ в предложение 1.3. Пусть пространство X_0 имеет счетную базу. Тогда D счетно, а X тоже имеет счетную базу. В этом случае предложение 1.3 показывает, что размерность $\operatorname{ind} Y = m$ сосредоточена в точках множества X, т. е. существует точка $x_0 \in X$ и ее окрестность Ox_0 в пространстве Y такие, что для любой окрестности $Ux_0 \subseteq Ox_0$ имеем $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} Ux_0 \geqq m-1$. Последнее вытекает из совпадения размерностей ind и Ind для замкнутых образов метрических пространств со счетной базой и условия (**). Но если $\operatorname{ind} Y = 1$, то подобное утверждение относительно множества X уже не обязано быть верным. Оказывается, однако, что в пространстве Y можно построить счетное число замкнутых множеств и их окрестностей, которые определяют размерность любого одномерного подмножества пространства Y. Для этого нам потребуются некоторые вспомогательные построения.

Пусть имеем в метрическом пространстве X_0 три дизъюнктивных замкнутых множества D', F', F. Обозначим для каждой точки $y' \in F'$ через $r_{y'}$ расстояние $\rho(y', D')$ и для точки $y \in F$ через r_y расстояние $\rho(y, D')$. Положим $O_{\varepsilon.r} F = \bigcup_{y \in F} O_{\varepsilon.r_y} y$ и $O_{\varepsilon.r} F' = \bigcup_{y' \in F'} O_{\varepsilon.r_{y'}} y'$, где ε — некоторое положительное число. Тогда верно следующее

Предложение 1.4. *Если* $O_{\frac{1}{4}r} F' \cap F \neq \emptyset$, *то* $O_{\frac{3}{4}r} F \cap F' \neq \emptyset$.

Доказательство. Проведем элементарные вычисления. Так как $O_{\frac{1}{4}r} F' \cap F \neq \emptyset$, то существует точка $y' \in F'$ такая, что $O_{\frac{1}{4}r_{y'}} y' \cap F \neq \emptyset$. Пусть $y \in O_{\frac{1}{4}r_{y'}} y' \cap F$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in D'$ такая, что $\rho(y, x_\varepsilon) < \rho(y, D') + \varepsilon = r_y + \varepsilon$. Тогда $\rho(y', x_\varepsilon) \geqq r_{y'} = \rho(y', D')$. Из неравенства треугольника имеем $r_{y'} \leq \rho(y', x_\varepsilon) \leq \rho(y', y) + \rho(y, x_\varepsilon)$. Тогда $r_{y'} \leq \rho(y', y) + r_y + \varepsilon$. Но $\rho(y', y) \leq \frac{1}{4} r_{y'}$. Поэтому $r_{y'} \leq \frac{1}{4} r_{y'} + r_y + \varepsilon$, т. е. $\frac{3}{4} r_{y'} \leq r_y + \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{8} r_{y'} \leqq \frac{1}{2} r_y + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} r_{y'} \leq \frac{1}{2} r_y + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho(y', y) \leq \frac{1}{2} r_y + \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $\rho(y', y) \leq \frac{1}{2} r_y$. Величина $r_y = \rho(y, D')$ положительна. Поэтому $y' \in O_{\frac{3}{4}r_y} y \subseteq O_{\frac{3}{4}r} F$. Таким образом, предложение 1.4. доказано.

Обозначим теперь множество $Y \setminus D_i$ через H_i. Предложение 1.4 позволяет доказать

Предложение 1.5. [12]. *Существует открытое локально конечное в H_i покрытие $\eta = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{L}}$, $[O_\lambda] \cap D_i = \emptyset$, множества H_i такое, что для каждой окрестности OD_i замкнутого множества D_i звезда $\operatorname{st}(\operatorname{Fr} OD_i, \eta) = \Theta$ локально конечна в пространстве Y.*

Доказательство. Пусть $F_y = f_0^{-1} y$ для $y \in Y \setminus D_i$. Пусть $D' = f_0^{-1} D_i$. Тогда $O_{\frac{1}{4},r} F_y$ будет окрестностью множества F_y. Возьмем такую окрестность Oy точки y, что $f_0^{-1} Oy \subseteq O_{\frac{1}{4},r} F_y$. Тогда $\varkappa = \{Oy\}_{y \in H_i}$ открытое покрытие множества H_i. Впишем в покрытие $\varkappa$ локально конечное в H_i покрытие $\eta = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{L}}$, где O_λ открыто в Y для каждого $\lambda \in \mathscr{L}$. Покрытие η искомое. Действительно, пусть $O_{\lambda_0} \in \operatorname{st}(\operatorname{Fr} QD_i, \eta)$. Тогда существует точка $y \in H_i$ такая, что $O_{\lambda_0} \subseteq Oy$. Но тогда $Oy \cap \operatorname{Fr} OD_i \neq \emptyset$, поэтому в силу предложения 1.4, $F_y \cap O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i \neq \emptyset$. Отсюда имеем $F_y \subseteq f_0^{-1}(f_0[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0)$, и, следовательно, $f_0^{-1} O_{\lambda_0} \subseteq f_0^{-1} Oy \subseteq O_{\frac{1}{4},r} Fy \subseteq O_{\frac{1}{4},r} f_0^{-1}(f_0[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0)$. Поэтому $f_0^{-1}(\tilde{\operatorname{st}}(\operatorname{Fr} OD_i, \eta)) \subseteq O_{\frac{1}{4},r} f_0^{-1}(f_0^{-1}[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0)$. Так как $[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0 \cap D' = \emptyset$ и $D' = f_0^{-1} D_i$, то $(f_0^{-1} f_0[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0) \cap D' = \emptyset$. По определению множества $O_{\varepsilon.r} F$ имеем $[O_{\frac{1}{4},r} f_0^{-1} f_0[O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0]x_0 \cap D' = \emptyset$. Поэтому существует окрестность UD_i такая, что $f_0^{-1}[UD_i] \cap [O_{\frac{1}{4},r} f_0^{-1} f_0 [O_{\frac{3}{4},r} f_0^{-1} \operatorname{Fr} OD_i]x_0]x_0 = \emptyset$. Следовательно, $UD_i \cap \tilde{\operatorname{st}}(\operatorname{Fr} OD_i, \eta) = \emptyset$, где знак $\sim$ обозначает тело системы. Таким образом, у каждой точки $d \in D_i$ есть окрестность Od такая, что $Od \cap \operatorname{st}(\operatorname{Fr} OD_i, \eta) = \emptyset$, а для каждой точки $y \in H_i$ нужная окрестность Oy существует в силу локальной конечности покрытия η множества H_i в самом H_i. Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. *Существует замкнутая система в Y, $\overline{\gamma} = \{F''_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, являющаяся покрытием множества H_i и существует такая открытая и σ-дискретная в H_i система $\overline{\omega} = \{G''_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ ($\mathfrak{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{A}_j$, система $\{G''_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}_j}$ дискретна в H_i), что $F''_\alpha \subseteq G''_\alpha$, и для каждой окрестности OD_i существует окретность UD_i, $[UD_i] \subseteq OD_i$ такая, что любое множество G''_α не пересекается либо с $\operatorname{Fr} OD_i$, либо с $\operatorname{Fr} UD_i$.*

(Предложение 1.6 играет ту же роль, что и предложение 1.1; поэтому их полезно сравнить.)

Доказательство. По предложению 1.5 существует покрытие $\eta = \{U_\xi\}_{\xi \in K}$ пространства H_i такое, что $[U_\xi]_Y \cap D_i = \emptyset$, и звезда $\Theta = \operatorname{st}(\operatorname{Fr} OD_{i}, \eta)$ локально конечна в Y для каждой окрестности OD_i. Тогда $[\tilde{\Theta}]_Y \cap D_i = \emptyset$, т. е. существует окрестность UD_i такая, что $[UD_j] \cap [\tilde{\Theta}]_Y = \emptyset$.

По теореме А. Стоуна [10] в покрытие η можно вписать σ-дискретные в H_i покрытия $\overline{\gamma}$ и ω, которые и будут искомыми. Предложение 1.6 доказано.

Отметим, что на множестве $[OD_i] \setminus UD_i$ система $\{G''_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}_j}$ дискретна. Обозначим через G''_j множество $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_j} G''_\alpha$ и через F''_j множество $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_j} F''_\alpha$.

Ясно, что $E_j'' \subseteq G_j''$. Систему пар $\{F_j'', G_j''\}_{j=1}^{\infty}$ обзначим через φ_i. Пусть $\varphi = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi_i$.

Предложение 1.7. *Пусть* $\operatorname{Ind} Y = 1$. *Тогда существует пара* $\{F_{j_0}, OF_{j_0}\} \in \varphi$, *определяющая размерность* $\operatorname{Ind} Y$.

Доказательство. Пусть в наборе φ_0, построенном в предложении 1.1, такой пары нет. Покажем, что из предложения 1.2 и леммы Веденисова следует, что существуют множество D_{i_0} и его окрестность OD_{i_0}, такие, что пара (P_{i_0}, OD_{i_0}) определяет размерность $\operatorname{Ind} Y$. В самом деле, пусть A и B дизъюнктные замкнутые в Y множества, причем $A \cup B \subseteq X$. Для каждого $i \in N$ мы имеем $D_i \cap (A \cup B) = \varnothing$. Поэтому существует окрестность OD_i множества D_i такая, что $[OD_i] \cap (A \cup B) = \varnothing$ для любого $i \in N$.

Если искомой пары (D_{i_0}, OD_{i_0}) нет, то существует такая окрестность $UD_i \subseteq [UD_i] \subseteq OD_i$ множества D_i, $i \in N$, что граница окрестности UD_i пуста. Так как φ_0 не определяет размерность $\operatorname{Ind} Y$, то по предложению 1.2 и в силу проведенных построений получим покрытие пространства Y, удовлетворяющее лемме Веденисова. Таким образом, получим перегородку, которая пуста между множествами A и B, лежащими в множестве X. Следовательно, в силу нульмерности множества D, между любыми замкнутыми дизъюнктными множествами A' и B' пространства Y также существует пустая перегородка (см. доказательство предложения 1.3).

Следовательно, должна существовать пара (D_{i_0}, OD_{i_0}), определяющая размерность $\operatorname{Ind} Y$. Тогда по предложению 1.6 существует: окрестность $UD_{i_0} \subseteq [UD_{i_0}] \subseteq OD_{i_0}$ множества D_{i_0} и системы $\overline{\gamma}$ и $\overline{\omega}$, являющиеся покрытиями множества H_{i_0}, такие, что любое множество $G_\alpha'' \in \overline{\omega}$ не пересекается либо с $\operatorname{Fr} OD_{i_0}$, либо с $\operatorname{Fr} UD_{i_0}$. Если предположить, что система φ_{i_0} не определяет размерность $\operatorname{Ind} Y$, то аналогично предложению 1.3, используя лемму Веденисова, мы построим пустую перегородку $\widehat{C}$ между множествами $\operatorname{Fr} OD_{i_0}$ и $\operatorname{Fr} UD_{i_0}$ и, следовательно, будем иметь перегородку $C'' \subseteq \widehat{C}$ между множествами $Y \setminus OD_{i_0}$ и $[UD_{i_0}]$. Следовательно, $C'' = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает предложение 1.7.

Замечание 1.2. Пусть $M \subseteq Y$ и $\operatorname{Ind} M = 1$. Тогда покрытие $\eta' = M \wedge \eta$ будет удовлетворять требованиям предложения 1.5 на множестве M. Аналогичное утверждение верно для покрытий $\overline{\gamma}' = M \wedge \overline{\gamma}$ и $\overline{\omega}' = M \wedge \overline{\omega}$ и предложения 1.6, где покрытия $\overline{\gamma}$ и $\overline{\omega}$ взяты из условия предложения 1.6. Но предложение 1.7 является непосредственным следствием предположения 1.6 и леммы Веденисова. Отсюда система $\varphi' = M \wedge \varphi$ определяет размерность $\operatorname{Ind} M$.

Доказательство леммы 1.2. Ясно, что лемма 1.2 следует из замечания 1.1 и 1.2. Таким образом, система $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ найдена. Лемма доказана.

Теперь теорема 2 вытекает из теоремы 1.

Вернемся к предложению 1.1. Если множество $D = \varnothing$, т. е. пространство Y метрическое, то предложение 1.1 позволяет построить набор $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств F_i и их окрестностей OF_i, который в силу предложений 1.2 и 1.3 будет специальным. Другими словами, каждое метрическое пространство обладает специальным набором $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$. Таким образом, получаем

Следствие 1.1 (Катетов [2]). *Пусть X — метрическое пространство. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$ [14].

2. О нульмерных прообразах замкнутых образов метрических пространств. Прежде всего напомним некоторые определения. Мы будем говорить, что два замкнутых дизъюнктных можества A и B определяют размерность $\operatorname{Ind} X$ некоторого нормального пространства X, если множество A и его окрестность $X \setminus B$ определяют размерность $\operatorname{Ind} X$ (см. определение 1.1). Все пространства, рассматриваемые в этом параграфе, мы будем предполагать нормальными.

Возьмем некоторое пространство Y, и пусть оно удовлетворяет следующим трем условиям:

1. Пространство Y — наследственно нормальное и паракомпактное.
2. $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, причем $\dim Y_i \leq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. В пространстве Y существует специальный набор (см. определение 1.2) $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств F_i и их окрестностей OF_i.

Если пространство Y удовлетворяет трем выше перечисленным условиям, то мы будем говорить для кратности, что пространство Y удовлетворяет условию (*).

Пусть имеется замкнутое отображение $f: X \to Y$ пространства X на наше пространство Y, и пусть $\varphi^{-1} = f^{-1}\varphi = \{f^{-1}F_i, f^{-1}OF_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Определение 2.1. *Набор φ^{-1} мы будем называть специальным относительно отображения f и набора φ в пространстве Y, или, короче, f — специальным, если выполнено следующее условие: для каждого замкнутого множества $M \subseteq X$, любых двух замкнутых подмножеств A и B множества M таких, что $M \cap f^{-1}fA = A$ и $M \cap f^{-1}fB = B$, и набора любых окрестностей $U(f^{-1}F_i \cap M)$ множества $f^{-1}F_i \cap M$ в M, $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что $[U(f^{-1}F_i \cap M)] \subseteq (f^{-1}OF_i) \cap M$, существует перегородка C в M между множествами A и B, удовлетворяющая условию $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} U \times (f^{-1}F_i \cap M)$.*

Замечание 2.1. Пусть S — замкнутое подмножество пространства X. Из определения (2.1 и определения 1.2 непосредственно вытекает, что ограничение $\bar{f} = f \mid S$ порождает $\bar{f}$-специальный набор $\bar{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \cap S = \{f^{-1}F_i \cap S, f^{-1}OF_i \cap S\}_{i=1}^{\infty}$.

Пусть теперь пространство X обладает конечной размерностью $\operatorname{Ind} X$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть пространство Y является замкнутым образом метрического пространства,* $\dim f = Y < \infty$, *и пусть $f: X \to Y$ — замкнутое нульмерное* ($\dim f = O$) *отображение нормального пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется вспомогательная

Теорема 5. *Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое нульмерное в смысле* dim *отображение нормального пространства X на пространство Y, удовлетворяющее условию* (*), *а набор $\varphi^{-1} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ является f-специальным. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Теорема 4 вытекает из теоремы 5. Кроме того, мы получаем утверждение, ранее доказаное Б. А. Пасынковым [5]:

Следствие. *Пусть Y — метрическое пространство и $f: X \to Y$ — замкнутое нульмерное отображение нормального пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

При доказательстве теоремы нам потребуется лемма, доказанная Левшенко [4], которую мы сформулируем в нужном нам варианте.

Лемма (Левшенко). *Пусть A и B — дизъюнктные замкнутые подмножества нормального пространства X, пусть $\omega=\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное покрытие пространства X каноническими замкнутыми множествами и пусть для каждого $i=1, 2, \ldots$, множество H_i распадается на два дизъюнктных открыто-замкнутых в H_i множества G_i и V_i, причем $A\cap H_i \subseteq G_i$, $B\cap H_i \subseteq V_i$, $G_i\cup V_i=H_i$. Тогда существует перегородка C между A и B в X такая, что $C\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} H_i$.*

Приступим к доказательству теоремы 5. Мы будем вести доказательство теоремы индукцией по числу нульмерных слагаемых, на которое распадается пространство Y, т. е. для $Y=\bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, $\dim Y_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, индукция ведется по n. Пусть $n=1$. Тогда по формуле Гуревича [1], имеем $\dim X\leqq \dim Y+\dim f$, т. е. $\dim X\leqq 0$ Отсюда $\dim X=\operatorname{Ind} X$.

Предположим, что совпадение размерностей $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ имеет место для $n\leqq m$. Пусть $n=m+1$. Покажем, что $\dim X=\operatorname{Ind} X$. Для этого нам потребуется

Лемма 2.1. *Пусть отображение $f:X\to Y$ и пространства X и Y находятся в условиях теоремы 5, и пусть выполняется предположение индукции, причем $Y=\bigcup_{i=1}^{m+1} Y_i$, $\dim Y_i=0$, $i=1, 2, \ldots, m+1$. Тогда* $\operatorname{Ind} X - \dim X\leqq 1$.

Доказательство. Мы можем считать, что $m+1=n\geqq 2$ (т. к. случай $n=1$ уже рассматривался). При $n=1$ указанное в условии леммы 2.1 неравенство выполнено. Кроме того, $Y_i\neq Y_j$ при $i\neq j$. Поэтому можно считать, что пространство Y распадается хотя бы на два нульмерных подмножества. Отсюда следует, что пространство X состоит более чем из одной точки. Поэтому мы можем взять в пространстве X два непустых дизъюнктных замкнутых множества Ψ_1 и Ψ_2. По условию $\dim f^{-1}y=0$ для каждой точки $y\in Y$. В силу нормальности пространства X для каждого множества f_y^{-1}, где $y\in Y$, существует окрестность $Uf^{-1}y$ такая, что множества $\Psi_1\cap Uf^{-1}y$ и $\Psi_2\cap Uf^{-1}y$ отделются в $Uf^{-1}y$ пустой перегородкой. В силу замкнутости отображения f для каждой точки $y\in Y$ существует окрестность Oy такая, что $[f^{-1}O_y]\subseteq Uf^{-1}y$. Система $\omega=\{Oy\}_{y\in Y}$ является покрытием Y. В силу паракомпактности Y в покрытие ω можно вписать [10] некоторое σ-дискретное замкнутое покрытие $\eta=\{H_\alpha^i \mid \alpha\in\mathscr{B}_i\}$, $i=1, 2, \ldots$ и некоторое σ-дискретное открытое покрытие $\gamma=\{V_\alpha^i \mid \alpha\in\mathscr{B}_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, причем $H_\alpha^i\subseteq V_\alpha^i$ для любого $i\in N$ и каждого α.

Так как пространство Y наследственно нормально, то существует окрестность UH_α^i такая, что $\operatorname{Fr} UH_\alpha^i\cap Y_{m+1}=\varnothing$, $[UH_\alpha^i]\subseteq V_\alpha^i$ для любого $i\in N$ и каждого α. Рассмотрим открытое в пространстве X множество $f^{-1}UH_\alpha^i$. Из непрерывности отображения f следует, что $f(\operatorname{Fr} f^{-1}UH_\alpha^i)\subseteq \operatorname{Fr} UH_\alpha^i$. Следовательно, $f(\operatorname{Fr} f^{-1}UH_\alpha^i)\cap Y_{m+1}=\varnothing$. Система множеств $\mu=\{f^{-1}UH_\alpha^i \mid \alpha\in\mathscr{B}_i, i=1, 2, \ldots\}$ является σ-дискретным открытым покрытием пространства X. Обозначим сумму $\bigcup_{\alpha\in\mathscr{B}_i} f^{-1}UH_\alpha^i$ через W_i. Множество W_i открыто в пространстве X. Из построения множеств W_i следует, что для каждого $i\in N$ множества $[W_i]\cap\Psi_1$ и $[W_i]\cap\Psi_2$ отделяются на множестве $[W_i]$ пустой перегородкой. Кроме того, $f\,\mathrm{Fr}\,W_i \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} \mathrm{Fr}\,UH^i_\alpha$, $(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} \mathrm{Fr}\,UH^i_\alpha) \cap Y_{m+1} = \varnothing$, т. е. $f\,\mathrm{Fr}\,W_i \cap Y_{m+1} = \varnothing$ для $i = 1, 2, \ldots$, и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Теперь, используя лемму Левшенко, мы можем провести такую перегородку C между Ψ_1 и Ψ_2 X, что $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}\,W_i$. Очевидно множества C и fC удовлетворяют всем условиям теоремы 5 и, кроме того, $fC \cap Y_{m+1} = \varnothing$. Поэтому из предположения индукции следует, что $\dim C = \mathrm{Ind}\,C$. Пусть $\dim X = d$, тогда $\dim C \leq d$, но отсюда $\mathrm{Ind}\,C \leq d$. Так как Ψ_1 и Ψ_2 — произвольные дизъюнктные замкнутые множества, то $\mathrm{Ind}\,X \leq d+1$. Используя лемму 2.1 при сформулированном перед леммой 2.1 индуктивном предположении, мы индукцией уже относительно размерности $\mathrm{Ind}\,X$ покажем, что из соотношения $\mathrm{Ind}\,X = l$ следует равенство $\dim X = \mathrm{Ind}\,X = l$, $l = 0, 1, \ldots$. Если $\mathrm{Ind}\,X = 0$, то, очевидно, и $\dim X = 0$, т. е. $\dim X = \mathrm{Ind}\,X$. Предположим, что из соотношения $\mathrm{Ind}\,X \leq k-1$ следует равенство $\dim X = \mathrm{Ind}\,X$. Рассмотрим случай $\mathrm{Ind}\,X = k$.

Лемма 2.2. *Пусть $M \subseteq X$ — замкнутое подмножество пространства X и пусть $f: X \to Y$ — отображение пространства X на пространство Y, причем f, X, Y удовлетворяют условию теоремы 5 и выполнены оба предположения индукции. Тогда существуют замкнутые дизъюнктные множества A и B, лежащие в Y такие, что множества $M \cap f^{-1}A$ и $M \cap f^{-1}B$ определяют размерность* $\mathrm{Ind}\,M$.

Доказательство. Сразу отметим, что если $\mathrm{Ind}\,M = 0$, то размерность $\mathrm{Ind}\,M$ определяют два любых дизъюнктных замкнутых множества. Поэтому мы будем считать, что размерность $\mathrm{Ind}\,M > 0$. Тогда, так как $\dim f = 0$, замкнутое множество fM состоит более чем из одной точки, равно как и само множество M. Рассмотрим в пространстве M два непустых дизъюнктных замкнутых множества Ψ_1 и Ψ_2. Так как $\dim f^{-1} y = 0$ для каждого $y \ni Y$, то в силу нормальности пространства X для каждого множества $f^{-1}y \cap M$ существует окрестность в пространстве M, которую мы будем обозначать через Uy, такая, что множества $\Psi_1 \cap Uy$ и $\Psi_2 \cap Uy$ отделяются на множества Uy пустой перегородкой. Дальше, используя замкнутость отображения и паракомпактность множества fM, мы точно так же как в лемме 2.1, строим вписанное в покрытие $\{\mathrm{Int}\,f^{\#}Uy\}_{y \in Y}$ σ-дискретное замкнутое покрытие $\eta = \{H^i_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{B}_i, i = 1, 2, \ldots\}$ пространства fM и σ-дискретное открытое в fM покрытие $\gamma = \{V^i_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{B}_i, i = 1, 2, \ldots\}$, причем $H^i_\alpha \subseteq V^i_\alpha$ для любого i и каждого α. Кроме того, множества $\Psi_1 \cap ([\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} f^{-1}V^i_\alpha] \cap M)$ и $\Psi_2 \cap ([\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} f^{-1}V^i_2] \cap M)$ отделяются на множестве $M \cap [\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} f^{-1}V^i_\alpha]$ пустой перегородкой, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathrm{Ind}\,M = k' \leq k$. Предположим, что замкнутое множество $M \cap f^{-1}H^i_\alpha$ и его окрестность $M \cap f^{-1}V^i_\alpha$ на множестве M не определяют размерность $\mathrm{Ind}\,M$ для каждого i и любого α (иначе нужные множества найдены: ими будут $M \cap f^{-1}H^i_\alpha$ и $M \setminus f^{-1}V^i_\alpha = M \cap f^{-1}(fM \setminus V^i_\alpha)$). Тогда существуют открытые подмножества $U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha)$ множества M такие, что $U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha) \subseteq [U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha)] \subseteq M \cap f^{-1}V^i_\alpha$ и $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Fr}\,U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha) \leq k'-2$. Система $\mu = \{U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha) \mid \alpha \in \mathscr{B}_i, i = 1, 2, \ldots\}$ является σ-дискретным покрытием пространства M, кроме того, по предположению индукции $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Fr}\,U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha) = \dim \mathrm{Fr}\,U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha)$, так как $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Fr}\,U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha) \leq k'-2 \leq k-2$. Обозначим через $\bar{W}_i$ множество $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}_i} U(M \cap f^{-1}H^i_\alpha)$. Ясно, что $\dim \mathrm{Fr}\,\bar{W}_i \leq k'-2$. Теперь, используя лемму Левшенко, мы проводим между множествами Ψ_1 и Ψ_2 на множестве M перегородку C такую, что $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} \overline{W}_i$. По теореме суммы для размерности $\dim$ получаем, что $\dim C \leq k'-2$. Но тогда по лемме 2.1 имеем $\operatorname{Ind} C \leq k'-1 \leq k-1$. По индуктивному предположению $\dim C = \operatorname{Ind} C$, т. е. $\operatorname{Ind} C \leq k'-2$. Таким образом, $\operatorname{Ind} M \leq k'-1$, что противоречит предположению $\operatorname{Ind} M = k'$. Лемма доказана.

Таким образом, из леммы 2.2 следует, что размерность любого замкнутого подмножества пространства X определяется прообразами некоторых дизъюнктивных замкнутых множеств из образа этого множества. Леммы 2.1 и 2.2 позволяют следующим образом закончить доказательство теоремы 5.

Покажем сначала, что f — специальный набор $\varphi^{-1} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, является специальным набором. Пусть $M \subseteq X$ — замкнутое подмножество X и $\operatorname{Ind} M = k' \leq k$. Существуют дизъюнктивные замкнутые множества A и B во множестве fM такие, что замкнутые множества $M \cap f^{-1}A$ и $M \cap f^{-1}B$ определяют размерность $\operatorname{Ind} M$. Пусть для каждого i пара $\{M \cap \Phi_i, M \cap O\Phi_i\}$ не определяет размерность $\operatorname{Ind} M$. Тогда существуют окрестности $U(M \cap \Phi_i)$ (во множестве M) такие, что $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U(\Phi_i \cap M) \leq k'-2$. Из определения f-специальности набора φ^{-1} следует, что существует перегородка C в M между множествами $M \cap f^{-1}A$ и $M \cap f^{-1}B$ такая, что $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Fr} U(\Phi_i \cap M)$. По теореме суммы для размерности $\dim$ имеем $\dim C \leq k'-2$, но тогда в силу леммы 2.1 $\operatorname{Ind} C \leq k'-1 \leq k-1$, а тогда из индуктивного предположения $\operatorname{Ind} C = \dim C$, т. е. $\operatorname{Ind} C \leq k'-2$, т. е. $\operatorname{Ind} M \leq k'-1$. Получили противоречие. Отсюда следует, что набор $\varphi^{-1} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — специальный. Но тогда из теоремы 1 настоящей работы следует, что $\dim X = \operatorname{Ind} X$. Таким образом, из того, что $\operatorname{Ind} X = k$, следует, что $\dim X = k$, для $k = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что если $Y = \bigcup_{i=1}^{m+1} Y_i$, $\dim Y_i = 0$, то $\dim X = \operatorname{Ind} X$. Теорема 5 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 4. Пусть $f_0 : R \to Y$ — замкнутое отображение метрического пространства R на пространство Y, имеющего конечную размерность $\dim$. Тогда пространство Y является совершенно нормальным паракомпактом [1], и кроме того [3], $Y = Y_0 \cup D$, где пространство Y_0 метрическое, а множество $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, где D_i дискретно в Y для каждого $i \in N$. Оказывается, что пространство Y удовлетворяет условию $(*)$.

Действительно, $\dim D \leq 0$ и $\dim Y_0 \leq \dim Y$. Но, как указано в [1], конечномерное метрическое пространство распадается на конечное число нульмерных слагаемых. Таким образом, $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, где $\dim Y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для некоторого натурального числа n. Как следует из п. 1 настоящей работы, в пространстве Y существует специальный набор $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств F_i и их окрестностей OF_i. Кроме того, как было указано выше, пространство Y хаусдорфово, паракомпактно и наследственно нормально. Все три пункта условия $(*)$ выполнены.

Теперь напомним, что $f : X \to Y$ — замкнутое нульмерное отображение нормального пространства X на наше пространство Y. Покажем, что набор $\varphi^{-1} = f^{-1}\varphi = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ является f-специальным.

Пусть M — произвольное замкнутое подмножество пространства X. Возьмем во множестве M такие замкнутые дизъюнктивные подмножества A и B, что $M \cap f^{-1}fA = A$ и $M \cap f^{-1}fB = B$. Рассмотрим замкнутое в пространстве Y множество fM и его дизъюнктивные подмножества $A' = fA$ и $B' = fB$. В силу предложения 1.1, повторяя рассуждения предложения 1.2, и в силу предложения 1.6, повторяя рассуждение предложения 1.7, из специального набора $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить такой поднабор $\overline{\varphi}=\{F_{i_j}, OF_{i_j}\}_{i=1}^{\infty}$, что набор $\overline{\varphi}^{-1}=\{f^{-1}F_{i_j}, f^{-1}OF_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве X будет обладать следующим свойством: для любой окрестности $Uf^{-1}E_{i_j}$ такой, что $[Uf^{-2}F_{i_j}]\subseteq f^{-1}OF_{i_j}$, $j=1, 2, \ldots$, существует перегородка C между множествами $f^{-1}A'$ и $f^{-1}B'$ в X такая, что $C\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}\operatorname{Fr} Uf^{-1}F_{i_j}$.

Ясно, что $C'=M\cap C$ будет перегородкой в M между A и B. Напомним, что $\Phi_i=f^{-1}F_i$ и $O\Phi_i=f^{-1}OF_i$. Ясно теперь, что для любых окрестностей $U(M\cap\Phi_i)$ таких, что $[U(M\cap\Phi_i)]\subseteq O\Phi_i\cap M$, перегородка C' и подавно содержится во множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty}\operatorname{Fr} U(\Phi_i\cap M)$. Отсюда следует, что набор φ^{-1} является f-специальным. Теперь теорема 4 является непосредственным следствием теоремы 5.

Дополнение. Пусть пространство X является замкнутым образом метрического пространства и $\dim X\leq n$. В работе [13] подробно доказано, что в этом случае $X=\bigcup_{i=1}^{n+1}X_i$, где $\dim X_i\leq 0$, $i=1, \ldots, n+1$. Покажем теперь справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть паракомпакт Y, $\dim Y\leq n$, замкнуто и нульмерно в смысле* $\dim$ *отображается на пространство X, являющееся замкнутым образом метрического пространства. Тогда Y совершенно n-мерно* (в смысле В. И. Пономарева [1]).

Доказательство. Пусть $f: Y\to X$ — замкнутое нульмерное отображение нашего паракомпакта Y на пространство X, удовлетворяющее условию теоремы. Пусть $\bar{X}^0$ — некоторое нормальное пространство и $h:\bar{X}^0\to Y$ — замкнутое конечнократное отображение пространства $\bar{X}^0$ на пространство Y. Тогда $\psi=fh:\bar{X}^0\to X$ является замкнутым и, в силу паракомпактности $f^{-1}x$ для каждой точки $x\in X$, нульмерным отображением пространства $\bar{X}^0$ на наше пространство X. В пространстве X существует специальный набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств F_i и их окрестностей OF_i, определяющий размерность любого подмножества $M\subseteq X$. По теореме 5 набор $\{\psi^{-1}F_i, \psi^{-1}OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет специальным в пространстве $\bar{X}^0$, а набор $\{f^{-1}F_i, f^{-1}OF_i\}_{i=1}^{\infty}=\{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ специальным в пространстве Y. Пусть $g: Y\to Z$ — специальное отображение пространства Y на метрическое со счетной базой пространство Z, $\dim Z\leq n$, причем $g^{-1}g\Phi_i=\Phi_i$, $i=1, 2, \ldots$ Отображение g и пространство Z с указанными свойствами существуют в силу утверждения 1.1 и леммы 1.1. Существует [1] непрерывное замкнутое, кратности $\leq n+1$ отображение $\varkappa: Z^0\to Z$ пространства со счетной базой Z^0 размерности $\dim Z^0\leq 0$ на пространство Z. Рассмотрим веерное произведение [1] пространство Y и Z^0 относительно отображений g и $\varkappa$. Обозначим его через X^0. Возникают [1] отображения $p_2: X^0\to Z^0$ и $p_1: X^0\to Y$ такие, что $\varkappa p_2=gp_1$. Более того, отображение $p_1: X^0\to Y$ будет замкнутым, непрерывным и кратности $\leq n+1$. Пространство X^0 нормально. Тогда, как было показано выше, в пространстве X^0 имеется специальный набор $\{p_1^{-1}\Phi_i, p_1^{-1}O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}=\{\bar{\Phi}_i, O\bar{\Phi}_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $\bar{\Phi}_i=p_1^{-1}\Phi_i$ и $O\bar{\Phi}_i=p_1^{-1}O\Phi_i$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем, что $\dim X^0=\operatorname{Ind} X^0$. Покажем, что отображение $p_2: X^0\to Z^0$ будет специальным относительно набора $\{\bar{\Phi}_i, O\bar{\Phi}_i\}_{i=1}^{\infty}$. Напомним, что $g^{-1}g\Phi_i=\Phi_i$, $i\in N$. Тогда в силу равенства $\varkappa p_2=gp_1$ имеем $p_2\bar{\Phi}_i=\varkappa^{-1}g\Phi_i$, но множество $g\Phi_i$ замкнуто в Z, тогда $\varkappa^{-1}g\Phi_i$ замкнуто в Z^0, т. е. $p_2\bar{\Phi}_i$ замкнуто в Z^0 для $i\in N$. Пусть $Og\Phi_i$ — такая окрестность множества $g\Phi_i$ в Z, что $g^{-1}Og\Phi_i \subseteq O\Phi_i$. Тогда $p_1^{-1}(g^{-1}Og\Phi_i) \subseteq O\bar{\Phi}_i$ по построению $O\bar{\Phi}_i$. Рассмотрим множество $\varkappa^{-1}Og\Phi_i$. В силу равенства $\varkappa p_2 = gp_1$ имеем $p_2^{-1}(\varkappa^{-1}Og\Phi_i) = p_1^{-1}(g^{-1}Og\Phi_i) \subseteq O\bar{\Phi}_i$. Но $\varkappa^{-1}Og\Phi_i$ открыто в Z^0 и содержит замкнутое множество $p_2\bar{\Phi}_i$. Обозначим $\varkappa^{-1}Og\Phi_i$ через $Op_2\bar{\Phi}_i$. Тогда $p_2^{-1}Op_2\bar{\Phi}_i \subseteq O\bar{\Phi}_i$ для $i \in N$. Так, отображение $p_2: X^0 \to Z^0$ специальное, но тогда в силу леммы 1.1 имеем $\operatorname{Ind} X^0 \leqq 0$, откуда $\dim X^0 \leqq \operatorname{Ind} X^0 \leqq 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Замкнутый образ метрического пространства совершенно n-мерен.*

В работе [8] К. Нагами ввел понятие σ-метрических пространств Z как пространств, распадающихся в счетную сумму своих замкнутых метризуемых подпространств: $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, где Z_i метризуемо и замкнуто в Z. Если пространство Z паракомпакт, то в этом случае существует [8] последовательность $\{U_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ локально конечных открытых покрытий пространства Z таких, что $\{Z_i \cap U_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ — база в Z_i. Из этого аналогично предложениям 1.1 и 1.6 вытекает наличие специального набора φ в паракомпактных σ-метрических пространствах и их разложение в нужное число нульмерных слагаемых. Кроме того, аналогично работам [13; 16; 12] получаем:

Теорема 7. *Если Z — паракомпактное σ-метрическое пространство и $\dim Z \leqq n$, то Z совершенно n-мерно* [16] *и имеет место представление $Z = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, где $\dim Z_i \leqq 0$, $i = 1, \ldots n+1$.*

Следствие. *CW-комплекс совершенно n-мерен.*

В заключение мне приятно выразить благодарность Б. А. Пасынкову за постоянную помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, Б. А. Пасынков. Введение в теорию размерности. Москва, 1973.
2. М. Катетов. О размерности метрических пространств. *Доклады АН СССР*, **79**, 1951, 189—191.
3. Н. С. Лашнев. О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств. *Доклады АН СССР*, **165**, 1965, 756—758.
4. Б. Т. Левшенко. О бесконечномерных пространствах. *Доклады АН СССР*, **139**, 1961, 286—289.
5. Б. А. Пасынков. Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств. *Сиб. мат. ж.*, **5**, 1964, 356—376.
6. Б. А. Пасынков. Факторизация отображений на метрические пространства. *Доклады АН СССР*, **175**, 1967, 268—271.
7. L. Tumarkin. Beitrag zur algemeinen Dimensionstheorie. *Mat Sb.*, **33**, 1926, 57-86.
8. K. Nagamin. Dimension for σ-metric spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **23**, 1971, 123—129.
9. P. Urysohn. Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes. *Fund. Math.*, **7-8**, 1925-1926.
10. A. Stone. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 1948, 977-982.
11. E. Čech. Sur la dimension des espaces parfaitement normaux. *Acad. Sci. de Bohéme*, **33**, 1932, 38-85.
12. И. М. Лейбо. О равенстве размерностей для замкнутых образов метрических пространств. *Доклады АН СССР*, **216**, 1974, 498—501.
13. И. М. Лейбо. О замкнутых образах метрических пространств. *Доклады АН СССР*, **224**, 1975, 756—759.
14. И. М. Лейбо. О факторизации равномерных отображений. *Бюлл. Польской акад. наук, сер. мат., астр., физ.*, **24**, 1976, 75—79.
15. E. Michael. A note on paracompact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1953, 831-838.
16. И. М. Лейбо. О совершенной n-мерности некоторых пространств. В: *VII Всесоюзная топологическая конференция*. Минск, 1977, 107.

МОПИ им. Н. К. Крупской, Кафедра высшей математики ул. Радио 10а Москва, СССР

Поступила 7. 1. 1981