Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ И ПУАССОНОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ И ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Г. С. ШМЕЛЕВ

В работе дана классификация унарных дифференциальных операторов, действующих в тензорных полях на симплектическом супермногообразии размерности $(2n, m)$, где $m \geqq 2$, инвариантных относительно канонических преобразований, и операторов, действующих в подкрученных тензорных полях, инвариантных относительно преобразований, сохраняющих связность в линейном расслоении. Получено описание неприводимых представлений суперaлгебр Ли гамильтоновых и пуассоновых векторных полей в формальных тензорных полях в виде аналога теоремы о старшем весе. В суперпространстве (подкрученных) интегродифференциальных форм введена структура модуля над sl(2) (соотв. osp(1,2)), обобщающая структуру Ходжа.

1. Описание гамильтоновых и пуассоновых супералгебр Ли и модулей над ними. Ниже мы пользуемся результатами и обозначениями из [2; 5].

1. Пусть $k[[q, p, \xi]]$ — супералгебра формальных степенных рядов от четных переменных $q=(q_1, \dots, q_n)$ и $p=(p_1, \dots, p_n)$ и нечетных переменных $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Пусть ω — инвариантная четная замкнутая дифференциальная 2-форма. Над алгебраически замкнутым полем её можно привести к виду $\omega=\Sigma_{i=1}^n dp_i dq_i+\frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^m (d\xi_j)^2$.

Удобно также пользоваться другим видом формы ω, а именно

$$\omega=\sum_{i=1}^n dp_i dq_i+\begin{cases}\Sigma_{1\leqq j\leqq r} d\eta_j d\eta_{m-j} & \text{при} \quad m=2r\\ \Sigma_{1\leqq j\leqq r} d\eta_j d\eta_{m-j}+\frac{1}{2}(d\eta_{r+1})^2 & \text{при} \quad m=2r+1.\end{cases}$$

Супералгебра Ли $H(2n, m)=\{D \in W(2n, m) \mid D\omega=0\}$ называется гамильтоновой супералгеброй Ли.

Определим скобку на $k[[p, q, \xi]]$ по формуле

$$\{f, g\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)+(-1)^{P(f)}\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}.$$

Супералгебра Ли, которую образует суперпространство $k[[p, q, \xi]]$ относительно этой скобки, называется пуассоновой супералгеброй Ли и обозначается через $P(2n, m)$. Существует естественный гомоморфизм $P \to H: f \to D_f$, где D_f — гамильтоново поле, соответствующее гамильтониану f — фактор по центру (константам).

Введем в $P(2n, m)$ фильтрацию по степеням максимального идеала $x=(p, q, \xi)$, согласованную со скобкой: $P(2n, m)=\widehat{\mathscr{L}}_{-2}\supset\widehat{\mathscr{L}}_{-1}\supset\widehat{\mathscr{L}}_0\supset\ldots$, где $\widehat{\mathscr{L}}_j=\{f\mid f\in(x)^{j+2}\}$. Гомоморфизм $f\to D_f$ переносит эту фильтрацию на $H(2n, m)$: $H(2n, m)=\mathscr{L}_{-1}\supset\mathscr{L}_0\supset\mathscr{L}_1\supset\ldots$ Положим $L_i=\mathscr{L}_i/\mathscr{L}_{i-1}\cong\widehat{\mathscr{L}}_i/\widehat{\mathscr{L}}_{i-1}$, $i\geq -1$. Ясно, что $L_0\cong\mathrm{osp}(m, 2n)$.

2. Пусть V — такой $\mathscr{L}_0$-модуль, что $\mathscr{L}_1V=0$. Элементы суперпространства

$$T(V)=\mathrm{Hom}_{U(\mathscr{L}_0)}(U(\mathscr{L}_{-1}), V)$$

называются (формальными) тензорными полями типа V.

Наиболее важными примерами тензорных полей являются поля Ω^n и Σ_k — поля дифференциальных и интегральных форм (см. [3]). Формы с постоянными коэффициентами будем обозначать через $\bar{\Omega}^n$ и $\bar{\Sigma}_k$.

Пусть α — такая 1-форма, что $d\alpha=h\omega$, где $h\in k$. Определим представление супералгебры Ли $P(2n, m)$ в $T(V)$ по формуле $L_f(v)=D_f(v)+(\alpha(D_f)+hf)\,v$, где $v\in T(V)$. Обозначим это представление через $T_h(V)$.

П р е д л о ж е н и е. $T_h(V)\mathrm{Hom}_{U(\widehat{\mathscr{L}}_0)}(U(\widehat{\mathscr{L}}_{-2})/_{(1-h)};\ V)$.

Модуль $T_h(V)$ является формальным аналогом представления пуассоновой супералгебры Ли в тензорных полях со значениями в линейном расслоении со связностью с формой кривизны $h\omega$ на симплектическом супермногообразии с формой ω.

2. Структура $\mathrm{sl}(2)$-модуля на пространстве дифференциальных форм. 1. Определим действие алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ на пространстве $\Omega^*=\bigoplus_{r=0}^{\infty}\Omega^r$. Обозначим через X_+ умножение на ω, а через X_- — внутреннее умножение на бивектор, сопряженный форме ω. Пусть $H=[X_+, X_-]$.

Т е о р е м а 1. *Операторы X_+, X_-, H задают на Ω^* структуру $\mathrm{sl}(2)$-модуля, инвариантную относительно действия супералгебры Ли $H(2n, m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о — непосредственная проверка коммутационных соотношений: $[H, X_\pm]=\pm 2X_\pm$.

2. Пусть $\mathfrak{g}=U(\mathrm{sl}(2))\otimes U(\mathscr{L}_{-1})$. Изобразим структуру $\mathfrak{g}$-модуля Ω^* графом, каждая вершина которого — суперпространство вида $T(V)$, где V — неприводимый L_0-модуль. Пусть $\bar{\Omega}^r=\bar{\Omega}^r_0\supset\bar{\Omega}^r_1\supset\cdots\supset 0$ — ряд Жордана — Гельдера L_0-модуля $\bar{\Omega}^r$, т.е. $\bar{\Omega}^r_i/\bar{\Omega}^r_{i+1}$ — неприводимый L_0-модуль. Упорядочим множество элементов этого ряда, положив $w^r_i>w^r_j$, где $w^r_i=\bar{\Omega}^r_i/\bar{\Omega}^r_{i+1}$, если для любого L_0-подмодуля $M\subset\bar{\Omega}^r$ из условия $M\cap\bar{\Omega}^r_i/M\cap\bar{\Omega}^r_{i+1}\neq 0$ следует, что $M\cap\bar{\Omega}^r_j/M\cap\bar{\Omega}^r_{j+1}\neq 0$.

Соединим соседние элементы в множестве $\{w^r_i\}$ пунктирными стрелками (от меньшего к большему) и обозначим получившийся граф через $\Gamma'(\Omega^r)$.

О п р е д е л е н и е. Нижним (соответственно верхним) полуинтервалом в $\Gamma'(\Omega^r)$ назовем множество HI такое, что если $\alpha_1\in HI$ и $\alpha_2>\alpha_1$, то $\alpha_2\in HI$ (соответственно, если $\alpha_1\in HI$ и $\alpha_2<\alpha_1$, то $\alpha_2\in HI$).

Л е м м а 1. 1. *Множество $\{X_+(\alpha)$, где $\alpha\in\Gamma'(\Omega^r)\}$ — верхний полуинтервал в $\Gamma'(\Omega^{r+2})$.*

2. *Верхний (соответственно нижний) полуинтервал определяется (в случае конечного графа) множеством своих максимальных (соответственно минимальных) элементов.*

Доказательство — очевидно.

Пусть $\Gamma'(\Omega^*)=\bigcup_r \Gamma'(\Omega^r)$. Соединим вершину $\alpha\in\Gamma'(\Omega^*)$ сплошными стрелками, идущими вправо, с максимальными элементами множества $X_+(\alpha)$ и сплошными стрелками, идущими влево — с максимальными элементами в $X_-(\alpha)$. Заменим все встречные стрелки $\cdot\rightleftarrows\cdot$ на ребра $\cdot$——$\cdot$ и обозначим получившийся граф через $\Gamma(\Omega^*)$.

3, В дальнейшем важную роль играет число $\tau=(m-2n)/2$.

Опишем графы $\Gamma(\Omega^*)$: (левые отметки на них — младшие веса относительно действия $\mathrm{sl}(2)$):

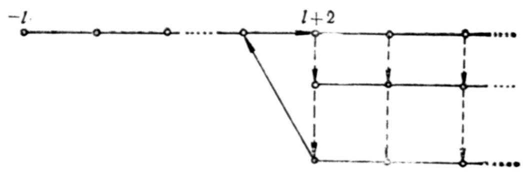
а) $m=0$ (см. [9]). Граф $\Gamma(\Omega^*)$ есть объединение $n+1$ связной компоненты вида $\overset{-l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$— ... —$\overset{l}{\cdot}$, $l=0, 1, \ldots, n$;

б) $n=0$ (см. [10]). Граф $\Gamma(\Omega^*)$ есть объединение связных компонент вида $\overset{l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$—$\cdots$ $l=\tau+0, 1, 2, \cdots$;

в) $n\neq 0$, $m=1$ (см. [7]). Граф $\Gamma(\Omega^*)$ есть объединение $2(n+1)$ связных компонент вида $\overset{l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdots$ $l=0, 1, \ldots, n$, причем для каждого l одна из компонент веса l имеет четный младший вектор, а другая — нечетный.

Теорема 2. *Пусть $n\neq 0$, $m>2$. Тогда граф $\Gamma(\Omega^*)$ есть объединение следующих связных компонент*:

а) *при* $\tau\in\mathbf{Z}$ *и* $\tau\leq 0$,



где $0\leq l\leq -\tau$ *и* $\overset{l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdots$, *где* $l=1$; $-\tau+3$, $4, \ldots$

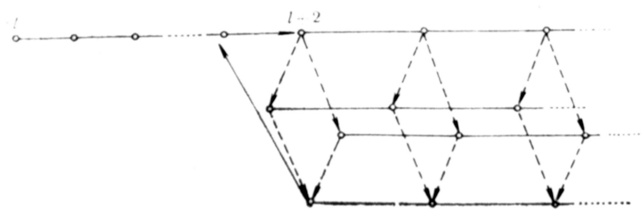
б) *при* $\tau\notin\mathbf{Z}$ *или* $\tau>0$: $\overset{l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdots$, *где* $l=\tau+0, 1, 2, \ldots$

Кратность каждого графа равна 1.

Обозначим $\mathfrak{g}$-инвариантный флаг, соответствующий графу а) $0\leq l\leq -\tau$ через $P_l\subset Q_l\subset R_l$. Тогда L_0 — модуль $P_l\cap\bar\Omega^r$, и все факторы $P_l\cap\bar\Omega^r$, $Q_l\cap\bar\Omega^r/R_l\cap\bar\Omega^r$ и $P_l\cap\bar\Omega^r/Q_l\cap\bar\Omega^r$ самодвойственны, причем $R_l\cap\bar\Omega^r\cong P_l\cap\bar\Omega^r/Q_l\cap\bar\Omega^r$.

Теорема 3. *Пусть $n\neq 0$, $m=2$. Тогда граф $\Gamma(\Omega^*)$ есть объединение компонент вида*:

а)



где $l=-\tau,$ [illegible] $\ldots, 0$. *Кратность графов равна* 1.

Обозначим инвариантные флаги, соответствующие этому графу через $P_l \supset Q_l^+ \oplus Q_l^- \supset R_l$. *Тогда* L_0-*модуль* $P_l \cap \bar{\Omega}^r$, *и факторы* $R_l \cap \bar{\Omega}^r$, $P_l \cap \bar{\Omega}^r/(Q_l^+ \cap \bar{\Omega}^r \oplus Q_l^- \cap \bar{\Omega}^r)$ *самодвойственны и изоморфны, а* $Q_l^+ \cap \bar{\Omega}^r/R_l \cap \bar{\Omega}^r$ *и* $Q_l^- \cap \bar{\Omega}^r/R_l \cap \bar{\Omega}^r$ *дуальны*;

б) $\overset{1}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdots$; *Кратность графа равна* 1. *Модуль* $P_1 \cap \bar{\Omega}^r$ *самодвойственен*;

в) $\overset{l}{\cdot}$——$\cdot$——$\cdot$——$\cdots$, $l = -\tau + 3, 4, \ldots$ *Кратность графа равна* 2 *и модули* $P_l^+ \cap \Omega^r$ *и* $Q_l^- \cap \bar{\Omega}^r$ *дуальны*.

Наметим доказательство теорем 2, 3. Пусть $z = 4X_+X_- + H^2 + 2H$ — образующая центра алгебры $U(\mathrm{sl}(2))$. Положим $P_l = \{\omega \in \bar{\Omega}^* \mid (z - l^2 - 1l)^{d(\omega)}(\omega) = 0$, где $d(\omega) \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что пространство P_l инвариантно относительно $\mathfrak{g}$ и самодвойственно относительно L_0. Структура P_l как $\mathrm{sl}(2)$-модуля следует теперь из того факта, что оператор X_+ инъективен, а X_- — сюръективен. Структура P_l как L_0-модуля вытекает из следующих лемм.

Лемма 2. *Рассмотрим разложение Гаусса*: $L_0 = n_- \oplus \mathfrak{h} \oplus n_+$, *задающее следующий порядок переменных* ($x_i < x_j$, *если* $p(x_i) = x_j$ *для некоторого* $p \in n_+$):

$$\eta_m < \eta_{m-1} < \cdots < \eta_{r+1} < q_1 < \cdots < q_n < p_n < \cdots < p_1 < \eta_r < \cdots < \eta_1$$

при $m = 2r$,

$$\eta_m < \eta_{m-1} < \cdots < \eta_{r+2} < q_1 < \cdots < q_n < \eta_{r+1} < p_n < \cdots < p_1 < \eta_r < \cdots < \eta_1$$

при $m = 2r + 1$.

Пусть $\varphi \in \bar{\Omega}^k$ — *такая форма, что* $H(\varphi) = \lambda \cdot \varphi$, *и* $\varphi \notin X_+(\bar{\Omega}^{k-2})$, *а* $n_+(\varphi) \subset X_+(\bar{\Omega}^{k-2})$. *Тогда*:

а) *при* $m > 2$ $\varphi = (d\eta_m)^k \bmod (X_+(\bar{\Omega}^{k-2}))$;

б) *при* $m = 2$ $\varphi = (d\eta_2)^k$ *или* $\varphi = dq_1 \ldots dq_n dp_n \ldots dp_1 (d\eta_1)^s$ *или* $\varphi = dq_1 \ldots dq_n dp_n \ldots dp_r d\eta_1 (1 \leq r \leq n)$ *по модулю* $X_+(\bar{\Omega}^{k-2})$.

Аналогичное утверждение (с обращением порядка) верно для n_-.

Лемма 3. *Если модуль* V *порождается старшим вектором, а* V^* — *младшим вектором, то* V *неприводим*.

3. Описание инвариантных дифференциальных операторов. 1. Рассмотрим следующую задачу: описать все дифференциальные операторы $c: T(V_1) \to T(V_2)$, инвариантные относительно действия $H(2n, m)$. Задачи, аналогичные этой, были подробно рассмотрены в [2; 4; 7; 10]. При решении этой задачи мы пользуемся описанным в [7; 8; 9] методом, который сводит ее к вычислению „особых" векторов в индуцированных модулях.

Ниже дана интерпретация особых векторов на языке операторов; сам список особых векторов приведен в 4.

2. Порядок дифференциального оператора c обозначим через $\mathrm{Ord}\, c$. Случай $\mathrm{Ord}\, c = 0$ тривиально сводится к отображению $V_1 \to V_2$, перестановочному с L_0. Будем считать, что $\mathrm{Ord}\, c > 0$.

Обозначим через d дифференциал на Ω^*, а через δ — дифференциал на $\Sigma_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Sigma_{2n-k}$. Пространства Σ_* и Ω^* как $H(2n, m)$-модули естественно отождествляются.

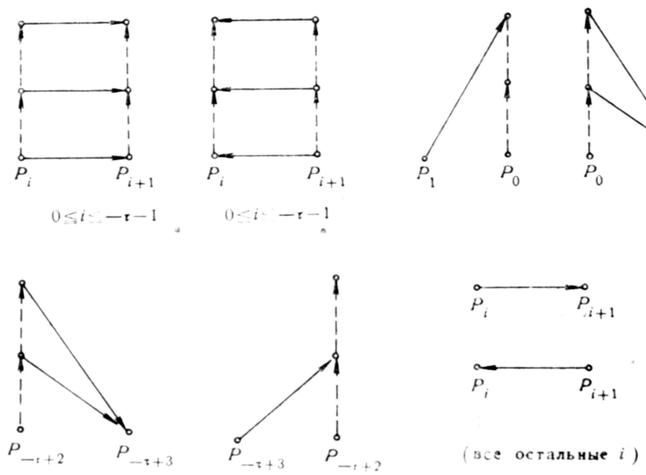
Относительно действия $\mathfrak{sl}(2)$, описанного в 2, пространство, порожденное d и δ, образует двумерное представление. Поэтому $d(P_l)\subset P_{l-1}\oplus P_{e+1}$ и $\delta(P_l)\subset P_{l-1}\oplus P_{l+1}$. Оказывается, что проекции d на различные подпространства в Ω^* порождают все инвариантные операторы.

Теорема 4. *Пусть $m>2$.*

а. *Если V_1 и V_2 неприводимы и c_1, c_2 — два инвариантных оператора одного порядка из $T(V_1)$ в $T(V_2)$, то $c_1=\lambda c_2$; $\lambda\in k$.*

б. *Пусть* $\operatorname{Ord} c=1$. *Тогда c — композиция d и его проекции на пространства вида $T(V)$, $V\subset\bar{\Omega}^*$.*

Проекции c на неразложимые компоненты Ω^k имеют вид (*обозначения см. в* 2):



Аналогичное разложение имеет место для δ.

Проекции d на различные компоненты суперпространства задают в пространстве всех инвариантных операторов порядка 1 *естественный базис, для элементов которого выполнено условие: $d_1\circ d_2+d_2\circ d_1=0$ всегда, когда эта сумма имеет смысл.*

в. $\operatorname{Ord} c=2$. *Тогда существуют такие операторы d_1, d_2:* $\operatorname{Ord} d_1=\operatorname{Ord} d_2=1$, *что $c=d_1\circ d_2$.*

г. *Операторов порядка больше* 2 *нет.*

3. Для описания инвариантных дифференциальных операторов при $m=2$ нам потребуется понятие обобщенных дифференциальных форм.

Рассмотрим $\mathfrak{gl}(2n,m)$ базис из мономов $x_i\partial x_j$ ($x=p$, q, η). Пусть $\mathscr{P}_{\eta_k}$ — параболическая подалгебра, образованная всеми мономами, кроме $\eta_k\partial p_i$, $\eta_k\partial q_j$, $\eta_k\partial\eta_s$, $k\neq s$. Пусть χ — характер на $\mathscr{P}_{\eta_k}$ такой, что $\chi(\eta_s\partial\eta_s)=0$, $\chi(q_i\partial q_i)=\chi(p_j\partial p_j)=0$, $\chi(\eta_k\partial\eta_k)=1$.

Определение. *η_k-обобщенными дифференциальными формами степени $\mu\in k$ (с постоянными коэффициентами) назовем $\mathfrak{gl}(2n,m)$-модуль $\bar{\Omega}_k^\mu=(\operatorname{Ind}\mathscr{P}_{\eta_k}^{\mathfrak{gl}(2n,m)}\chi^{-\mu})^*$. Положим $\Omega_k^\mu=T(\bar{\Omega}_k^\mu)$.*

Дадим координатное описание η_k-обобщенных форм.

Рассмотрим мономы вида $(d\eta_k)^\alpha (d\eta_{s_1})^{\mathfrak{R}_2} \dots (d\eta_{s_k})^{\mathfrak{R}_m} \times dp_{i_1} \dots dp_{i_r} dq_{j_1} \dots dq_{j_l}$, где $\alpha \in k$, $\mathfrak{R}_i \in \mathbf{N}$ и $\alpha + \Sigma \mathfrak{R}_i + r + l = \mu$. Для любого $X \in \mathfrak{gl}(2n, m)$ положим $X((d\eta_k)^\alpha) = \alpha (d\eta_k)^{\alpha-1} \wedge X(d\eta_k)$ и продолжим действие на все мономы по правилу Лейбница. Полученный модуль совпадает с $\overline{\Omega}{}^\mu_k$.

Очевидно, что на Ω^μ_k определено действие внешнего дифференциала d и алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ также, как на обычных формах.

Аналогично определяются η_k-обобщенные интегральные формы и дифференциал δ на них.

Положим $\Omega^*_k = \oplus_\mu \Omega^\mu_k$, $\overline{\Omega}{}^*_k = \oplus_\mu \overline{\Omega}{}^\mu_k$, $\Sigma^k_* = \oplus_\mu \Sigma^k_\mu$, $\overline{\Sigma}{}^k_* = \oplus \overline{\Sigma}{}^k_\mu$.

4. Пусть теперь $m = 2$. Рассмотрим $\overline{\Omega}{}^\mu_k (k = 1, 2)$ как $\operatorname{osp}(2, 2n)$-модуль. Положим $P'_k = \operatorname{osp}(2, 2n) \cap \mathscr{P}_{\eta_k}$, $k = 1, 2$, относительно естественного вложения супералгебры Ли $\operatorname{osp}(2, 2n)$ в $\mathfrak{gl}(2n, 2)$.

Рассмотрим модуль $V^\nu_k = \operatorname{Ind}^{\operatorname{osp}(2,2n)}_{P'_k} \chi^\nu$, где χ — характер P'_k, индуцированный с $\mathscr{P}_{\eta_k}$.

Лемма 4. (Разложение модуля $\overline{\Omega}{}^\mu_k$ на неразложимые $\operatorname{osp}(2, 2n)$-модули):

а) $\mu \notin 2\mathbf{Z}$, *или* $\mu \in 2\mathbf{Z}$, $\mu < 0$. $\overline{\Omega}{}^\mu_k = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V^{\mu-2i}_k$;

б) $\mu = 0$, $\overline{\Omega}{}^0_k = \overline{\Omega}{}^{-2}_k \oplus V^{-2}_k$;

в) $\mu = 2$, $\overline{\Omega}{}^2_k = \overline{\Omega}{}^{-2}_k \oplus (\Lambda^2 V^{-1}_k)$;

г) $\mu = 2n$, $n > 1$, $\overline{\Omega}{}^{2n}_k = \overline{\Omega}{}^{2(n-1)}_k \oplus V^{\mu-2}_k$.

Ниже $\Gamma(V)$ обозначает граф Жордана—Гельдера для V (см. 2).

Предложение. а. *При* $\nu \neq 0$, -2 $V^\nu_1 = V^{-2-\nu}_2$.

б. $\Gamma(V^{-2}_k)$ *имеет вид* $P_0 \cdot \dashrightarrow \cdot P^{-2}_k$, *где* P_0 — *тривиальный модуль*.

в. $\Gamma(\Lambda^2(V^{-1}_k))$ *имеет вид*:

;

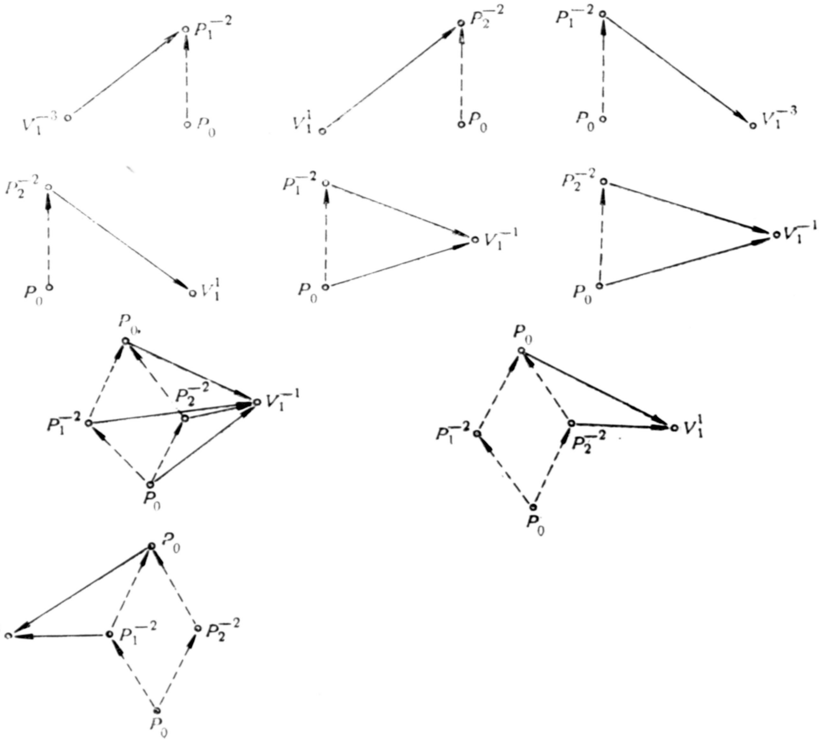
г. *При* $\nu \neq -2$, 0, V^ν_k *неприводим*.

5. Опишем теперь операторы, инвариантные относительно $H(2n, 2)$.

Теорема 5. а. *Если* V_1 *и* V_2 *неприводимы и* c_1, c_2 — *два инвариантных оператора одного порядка из* $T(V_1)$ *в* $T(V_2)$, *то* $c_1 = \lambda c_2$; $\lambda \in k$.

б. *Пусть* $\operatorname{Ord} c = 1$. *Тогда* c — *композиция* d *и проекции на подсуперпространства* $T(V)$, *где* $V \subset \Omega^\mu_k$. *Проекции* d *на неразложимые компоненты* $\overline{\Omega}{}^\mu$ *имеют вид (обозначения см. в 2)*:

$V_1^{\nu} \longrightarrow V_1^{\nu+1}\quad \nu\neq -3,\ -2,\ -1,\ 0 \qquad V_1^{\nu} \longrightarrow V_1^{\nu-1}\quad \nu\neq -2,\ -1,\ 0,\ 1$



Для действия d в Ω_2^{μ} возникает, в силу предложения, тот же список операторов.

Проекции d на различные компоненты Ω_1^{μ} задают в пространстве всех инвариантных операторов порядка 1 естественный базис, для элементов которого выполнено соотношение $d_1\circ d_2+d_2\circ d_1=0$, когда сумма имеет смысл.

в. $\operatorname{Ord} c=2$. *Тогда существуют такие операторы d_1, d_2 : $\operatorname{Ord} d_1=\operatorname{Ord} d_2=1$, что $c=d_1\circ d_2$.*

г. *Операторов порядка больше 2 нет.*

4. Описание особых векторов. Пусть V — такой $\mathscr{L}_0$-модуль, что $\mathscr{L}_1(V)=0$. Положим $I(V)=U(\mathscr{L}_{-1})\otimes_{U(\mathscr{L}_0)}V$. Как известно (см. [1]), $I(V)=(T(V^*))^*$.

Пусть $L_0=n_-\oplus\mathfrak{h}\oplus n_+$ — разложение Гаусса. Назовем вектор $f\in I(V)$ особым, если он весовой и $\mathscr{L}_1(f)=0$, $n_+(f)=0$.

Пусть V неприводим. Тогда старший вектор $v\in V$ — особый, причем $U(\mathscr{L}_{-1})v=I(V)$. Следовательно, если c : $I(V_1)\to T(V_2)$ — инвариантный оператор, то $c(v)$ — особый вектор и $U(\mathscr{L}_{-1})(c(v))$ совпадает с $c(I(V))$. Таким образом классификация инвариантных операторов сводится к классификации особых векторов.

Пусть $\mathrm{osp}(m, 2n)=n_-\oplus\mathfrak{h}\oplus n_+$ — разложение Гаусса такое же, как в лемме 1, п. 2. Порядком особого вектора назовем порядок соответствующего оператора.

Ниже $\chi(v)$ обозначает вес вектора v в базисе $\langle E_1, \ldots, E_{[m/2]}, H_1, \ldots, H_n\rangle$ где $H_i=q_i\partial q_i-p_i\partial p_i$, $E_j=\eta_{m-j+1}\partial\eta_{m-j+1}-\eta_j\partial\eta_j$.

Лемма 5. *Описание особых векторов порядка* 1.

а. $m=2$.

$$f_{1,\mu}=\sum_{1\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial p_j t_j+\partial\eta_2 u+\partial\eta_1 v,$$

где w_i, t_j, $u\in V$, *вектор* u — *старший*, $\chi(u)=\langle\mu, 0, \ldots, 0\rangle$, $\mu\in k$, $\chi(f_{1,\mu})=\langle\mu-1, 0, \ldots, 0\rangle$.

$f_{2,\mu}=\partial\eta_1 u$, *где* u — *старший*, $\chi(u)=\langle\mu, 0, \ldots, 0\rangle$, $\mu\in k$, $\chi(f_{2,\mu})=\langle\mu+1, 0, \ldots, 0\rangle$

$$f_{3,s}=\sum_{s\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial p_j t_j+\partial\eta_1 u,\ \text{где } 1\leq s\leq n,$$

w_s — *старший*, $\chi(w_s)=\langle-11, \ldots, 10, \ldots, 0\rangle$, *здесь* s *единиц*, $\chi(f_{3,s})=\langle-11, \ldots, 10, \ldots, 0\rangle$, *здесь* $s-1$ *единица*.

$$f_{4,r}=\sum_{1\leq j\leq r}\partial p_j t_j+\partial\eta_1 u,\ \text{где } 1\leq r\leq n,$$

t_r — *старший*, $\chi(t_r)=\langle-11, \ldots, 10, \ldots, 0\rangle$, *здесь* $r-1$ *единица*, $\chi(f_{4,r})=\langle-1, 1\ldots, 10\ldots, 0\rangle$, *здесь* r *единиц*.

б. $m>2$.

$$f_{1,l}=\sum_{1\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial p_j t_j+\sum_{1\leq k\leq m}\partial\eta_k v_k,$$

v_m — *старший*, $\chi(v_m)=\langle l, 0, \ldots, 0\rangle$, $\chi(f_{1,l})=\langle l-1, 0, \ldots, 0\rangle$, $l\in\mathbf{N}$, $l>0$.

$f_{2,l}=\partial\eta_1 u_1, u_1$ — *старший*, $\chi(u_1)=\langle l, 0, \ldots, 0\rangle$

$\chi(_{2,l})=\langle l+1, 0, \ldots, 0\rangle$, $l\in\mathbf{N}$ *или* $l=0$.

Лемма 6. *Особые векторы порядка* 2:

а. $m=2$.

$$\varphi_{1,\mu}=\partial\eta_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial p_i t_j+\partial\eta_2 u\Big),$$

u — *старший*, $\chi(u)=\chi(\varphi_{1,\mu})=\langle\mu 0, \ldots, 0\rangle$, $\mu\in k$.

$$\varphi_2=\partial\eta_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\Sigma\partial p_j t_j\Big);$$

w_1 — *старший*, $\chi(w_1)=\langle-1, 1, 0, \ldots, 0\rangle$, $\chi(\varphi_2)=\langle 0, \ldots, 0\rangle$,

$$\varphi_3=\partial p_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial p_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial q_j t_j\Big)+\partial\eta_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial p_i w_i^1+\sum_{1\leq j\leq n}\partial q_j t_j^1\Big)+\partial\eta_2\partial p_1 w_1^2+\partial\eta_2\partial\eta_1 u;$$

w_1^2 — *старший*, $\chi(w_1^2)=\langle 0, \ldots, 0\rangle$, $\chi(\varphi_3)=\langle-1, 1, 0, \ldots, 0\rangle$,

$$\varphi_{4,k}=\sum_{s=1}^{k}\partial p_s\Big(\sum_{s\leq l\leq n}\partial p_i w_{is}+\sum_{k+1\leq j\leq n}\partial p_j t_{js}+\partial q_s t_{ss}\Big)+\partial\eta_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial p_i w_i^1+\sum_{k+1\leq j\leq n}\partial q_j t_j^1\Big)+\partial\eta_1\partial\eta_2 u^{12};$$

u^{12} — *старший*, $\chi(\varphi_{4,k})=\chi(u^{12})=\langle -11, \ldots, 10, \ldots, 0\rangle$, *где* $1\leq k\leq n$, *а единиц* k *штук*.

б) $m>2$.

$$\varphi_l=\partial\eta_1\Big(\sum_{1\leq i\leq n}\partial q_i w_i+\sum_{1\leq j\leq n}\partial p_j t_j+\sum_{2\leq k\leq m}\partial\eta_k u_k\Big)$$

u_m — *старший*, $\chi(\varphi_l)=\chi(u_m)=\langle l, 0, \ldots, 0\rangle$, $l\in \mathbf{N}$.

Лемма 7. *Особых векторов порядка больше 2 нет.*

5. Описание представлений пуассоновой супералгебры Ли. 1. Положим $I_h(V)=U(\widehat{\mathscr{L}}_{-2})/(\widehat{1}-h)\otimes_{U(\widehat{\mathscr{L}}_0)}V$, где $h\in k$.

Предложение. $I_h(V)=(T_h(V^*))^*$.

Предложение сводит задачу классификации модулей $T(V)$ к модулям $I(V)$.

Предложение. *Пусть* M — *подмодуль в* $I_h(V)$. *Тогда существует особый вектор, лежащий в* M.

Доказательство. Алгебра $U(L_{-1}\oplus L_{-2})$ индуцирует в $I_h(V)$ фильтрацию. Рассмотрим в M подпространство векторов (может быть неоднородных) наименьшей степени относительно этой фильтрации. Старший вектор этого подпространства (относительно L_0) будет особым.

Выберем в $I_h(V)$ базис вида $(\partial q_i)^{m_i}(\partial p_j)^{k_j}(\partial\xi_s)^{\alpha_s}v_t$, где $m_i, k_j\in\mathbf{N}$, $\alpha_s=0, 1$, $v_t\in V$ (порядок переменных важен). Оказывается, что список особых векторов совпадает в этом базисе со списком из 4.

Рассмотрим ряд Жордана—Гельдера для $I_h(V)$. Прежде всего, если $V=V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_k\supset 0$ — ряд Жордана—Гельдера для V, то возникает ряд $I(V_1)\supset I(V_2)\supset\cdots\supset I(V_k)$. Пусть V — неприводим.

Назовем неприводимый $\mathrm{osp}(m, 2n)$-модуль особым, если V входит в ряд Жордана—Гельдера модуля $\bar{\Omega}^*$ при $m>2$ или $\bar{\Omega}_k^k$ при $m=2$.

Теорема 6. *Если* V — *неособый неприводимый модуль, то модуль* $I_h(V^*)$ *неприводим*.

Доказательство. Если V — неособый, то $I_h(V^*)$ не содержит особых векторов (см. список из 4).

2. Исследуем случай особого слоя. Определим в $\bar{\Omega}^*$ структуру $\mathrm{osp}(1,2)$-модуля. Пусть X_+ — внешнее умножение на $h\omega$, X_- — внутреннее умножение на бивектор, сопряженный к $h\omega$, $P_+=\alpha+d$, $P_-=[X_-, P_+]$, $H=[X_+, X_-]$.

Теорема 7 (См. [7]). $X_\pm$, $P_\pm$, H *образуют представление супералгебры Ли* $\mathrm{osp}(1, 2)$ *в* Ω^* *и* $\bar{\Omega}_k^*$.

Доказательство — непосредственная проверка.

Построим, также как в 2, граф $\Gamma(\Omega^*)$.

Теорема 8. *Пусть* $n\neq 0$, $m>2$. *Тогда граф* $\Gamma(\Omega^*)$ *есть объединение связных компонент, которые имеют такие же вид и кратность, что и в теореме* 2 *с заменой условия в случае* а) *для линии на* $l=-\tau+2$, $3\ldots$, *а отметки* $l+2$ *на* $l+1$.

Теорема 9. *Пусть* $n\neq 0$, $m=2$. *Тогда граф* $\Gamma(\Omega^*)$ *есть объединение связных компонент, которые имеют те же вид и кратность, что и в теореме* 3 *с заменой условия в случае* б) *на* $l=-\tau+2, 3, \ldots$, *а отметки* $l+2$ *в случае* а) *на* $l+1$.

Ограничение действия $\mathrm{osp}(1, 2)$ на $\mathrm{sl}(2)$ определяет естественную проекцию этих диаграмм на диаграммы в 2. Если V — точка в $\Gamma(\bar{\Omega})$, то ее прообраз при этой проекции совпадает с рядом Жордана—Гельдера для модуля $T_h(V)$.

Теорема 10. *Пусть* $m=2$, и V — *особый модуль, не входящий в разложение* $\bar{\Omega}^*$. *Тогда* $T_h(V)$ *распадается на две неприводимых компоненты.*

Доказательство теорем 8—10 использует леммы из 4.

В заключение я хочу поблагодарить Д. А. Лейтеса за постановку задачи и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**, 1977, № 3, 39—44.
2. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления супералгебр Ли векторных полей. *Сердика*, **7**, 1981, 320—334.
3. А. Вейль. Введение в теорию кэлеровых многообразий. Москва, 1961.
4. А. А. Кириллов. Инвариантные операции над геометрическими величинами. *Итоги науки и техники; Современные проблемы математики*, **16**, 1980, 3—29.
5. Д. А. Лейтес. Новые супералгебры Ли и механика. *Доклады АН СССР*, **236**, 1977, 804—807.
6. Д. А. Лейтес. Введение в теорию супермногообразий. *Успехи мат. наук*, **35**, 1980, №1, 3—57.
7. Д. А. Лейтес. Неприводимые представления супералгебр Ли векторных полей и инвариантные дифференциальные операторы. *Функц. анализ и его прилож.*, **16**, 1982, №1, 76—77.
8. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли картановского типа. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **38**, 1974, 835—866.
9. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли типов S и H. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **39**, 1975, 496—511.
10. А. В. Шаповалов. Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления конечномерных гамильтоновых и пуассоновых супералгебр Ли. *Сердика*, **7**, 1981, 337—342.
11. V. G. Kac. Lie superalgebras. *Adv. Math.*, **26**, 1977, 8—96.

Московский государственный университет
Москва СССР

Поступила 26. 1. 1981