Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА МНОГООБРАЗИЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

ЙОРДАН Б. ТАБОВ

В этой статье рассматривается задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа на одном классе многообразий с особенностями. Уточняется постановка задачи и приводится доказательство существования и единственности ее решения.

Основная трудность при рассмотрении задач, связанных с дифференциальными уравнениями на многообразиях с особенностями, состоит в том, что в особых точках не определены соответствующие дифференциальные операторы. Чтобы преодолеть ее, ниже мы выбираем некоторый специальный (и в то же время достаточно широкий) класс многообразий с особенностями, и на многообразиях этого класса рассматриваем задачу Дирихле, постановка которой по форме отличается от классической, но по существу совпадает с ней в случае гладкого многообразия.

Доказательство теоремы о существовании решения основывается на результатах, полученных для аналогичной задачи на гладких многообразиях. Их изложение можно найти в монографии Хермандера [1].

1. Обобщенные многообразия. Пусть на некотором открытом множестве W пространства $X\times T$, где $X\times T=\{(x_1, x_2, \dots, x_p; t_1, t_2, \dots, t_q)\}$ x_i и t_k — координаты точек $x\in X$ и $t\in T$, заданы гладкие функции $F_j(x_1, x_2, \dots, x_p; t_1, t_2, \dots, t_q)$, $j=1, 2, \dots, n$; $n\geqq q$.

Пусть M является подмножеством пространства X, состоящем из всех точек $x\in X$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, для которых существуют соответственно числа $t_1(x), t_2(x), \dots, t_q(x)$, такие, что

$$(1)\qquad F_i(x_1, x_2, \dots, x_p; t_1(x), t_2(x), \dots, t_q(x))=0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

и хотя бы один из якобианов вида $\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)/\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-q}}, t_1, t_2, \dots, t_q)$ отличен от нуля.

В этом случае мы скажем, что M является *обобщенным многообразием.*

Другими словами, обобщенное многообразие является проекцией гладкого многообразия в обычном (классическом) смысле слова „многообразие“, проекцией, полученной при локально-невырожденном проектировании.

Нужно сразу отметить, что понятие „обобщенное многообразие“ является более общим, чем общепринятое понятие гладкого многообразия. Можно доказать (это сделано Я. Тагамлицким), что любое гладкое многообразие является обобщенным многообразием; обратное же неверно, что видно из следующего простого примера:

Пример. Декартов лист с уравнением $x_1^3+x_2^3=3x_1x_2$ является кривой, которая не есть гладкое многообразие из-за наличия особой точки; в то же время его можно задать системой уравнений

$$F_1(x_1,\ x_2;\ t)\equiv x_1-3t/(1+t^3)=0,\quad F_2(x_1,\ x_2;\ t)\equiv x_2-3t^2/(1+t^3)=0,$$

содержащей параметр t. Легко проверяется, что функции F_1 и F_2 удовлетворяют всем условиям из приведенного выше определения обобщенного многообразия, так что Декартов лист является таким многообразием.

Таким образом, понятие обобщенного многообразия является естественным обобщением классического гладкого многообразия и включает ряд многообразий с особенностями, что и вызывает повышенный интерес к нему.

2. Оператор Лапласа на обобщенных многообразиях. Определение оператора Лапласа на классическом гладком многообразии приводится, например, в цитированной выше монографии Хермандера [1]. Удобное для использования определение оператора Лапласа на обобщенном многообразии дано Я. Тагамлицким; притом оно дает возможность рассматривать оператор Лапласа и в особых точках. Из-за большого объема формул не будем останавливаться на этом последнем определении, тем более что оно нам не понадобится для наших целей. Точные формулы можно найти, например, в дипломной работе [2]. В ней и в диссертации [3] рассмотрены и некоторые свойства этого оператора. Например, доказано (и это как раз для нас важно!), что если обобщенное многообразие M является в то же время и гладким многообразием в классическом смысле, то этот *обобщенный оператор Лапласа совпадает с классическим оператором Лапласа*. Кроме этого факта, в дальнейшем мы воспользуемся также и тем, что (из цитированных выше источников [2] и [3]) обобщенный оператор Лапласа, который будем обозначать через Δ, можно представить в виде $\Delta=\Sigma_{i=1}^{p}D_iD_i$, где D_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — суть линейно независимые в каждой точке линейные дифференциальные операторы первого порядка (вообще многозначные — в особых точках), определенные в некоторой окрестности многообразия M в X. Отметим, что такое представление имеет место и для классического оператора Лапласа на гладком многообразии, но только локально — в окрестности каждой точки.

3. Известные результаты об обобщенных многообразиях, легко вытекающие из определения. Обозначения, которыми будем пользоваться. 1. Система (1) задает в $X\times T$ гладкое многообразие без особенностей в классическом смысле. Будем обозначать его через M^*.

2. M является проекцией (локально-невырожденной!) многообразия M^* на X: для любой точки $m^*\in M^*$ однозначно определена проекция $\pi(m^*)=m\in M$, где $m\in X$ — точка с координатами, совпадающими соответственно с первыми p координат точки m^*.

3. Если $f(m)$ — гладкая функция на M, т. е. такая, что для любой гладкой кривой $x(s)\subset M$ функция $f(x(s))$ является гладкой, то она есть „проекция" некоторой гладкой функции f^*, определенной на M^*; иными словами, существует гладкая функция f^*, заданная на M^*, такая, что $f^*(m^*)=f(\pi(m))$.

4. Любой гладкий линейный дифференциальный оператор l на M является „проекцией" гладкого линейного дифференциального оператора l^*, та-

кого, что для любой гладкой функции $f(x)$ на M выполнено равенство $(l^*f^*)(x^*)=(lf)(\pi(x))$. Из этого следует, что оператор Лапласа является в этом смысле „проекцией“ оператора $\Delta^*=\Sigma_{i=1}^{p}D_i^*D_i^*$, где D_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — линейные дифференциальные операторы, упомянутые в конце п. 2. Можно легко проверить, что оператор Δ^* является эллиптическим.

4. Классическая формулировка задачи Дирихле для уравнения Лапласа на обобщенном многообразии. Здесь и далее через D будем обозначать ограниченную область на обобщенном многообразии M, т. е. пересечение M с ограниченной областью в X, так что замкнутая оболочка $\bar{D}$ множества D в X содержится в M. Через Γ будем обозначать границу D, т. е. $\Gamma=\bar{D}\setminus D$.

Пусть $\omega=\omega(x)$ — произвольная непрерывная функция на границе Γ области D. Скажем, что функция $u=u(x)$ является *решением* классической задачи Дирихле в D с граничным условием $\omega(x)$ на границе Γ, если $u(x)$ является гладкой в D, непрерывной на $D\cup\Gamma$, в D выполняется равенство $\Delta u(x)=0$, и, кроме того, на Γ имеем $u(x)=\omega(x)$.

Эта постановка задачи Дирихле, однако, не является удовлетворительной, в чем убеждает нас следующий простой пример:

Пример. Рассмотрим Декартов лист, заданный системой уравнений $x-3t/(1+t^3)=0$, $y-3t^2/(1+t^3)=0$, и зафиксируем на нем четыре точки A, B, A_1 и B_1, каждая из них на расстоянии 1 от начала 0 системы координат, причем расстояние отсчитывается вдоль соответственно четырех дуг кривой, выходящих из 0; пусть при этом A и B связаны *гладкой* дугой Декартова листа длиной 2 через 0 (тогда такой же дугой связаны A_1 и B_1). Оператор Лапласа на гладкой кривой совпадает с оператором d/ds, где s — натуральный параметр рассматриваемой дуги. Следовательно, решения задачи Дирихле для области D, состоящей из дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$, должны быть линейными функциями натурального параметра s на каждой из дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1B_1}$. Если мы теперь выберем граничные значения $\omega(A)=0$, $\omega(B)=2$, $\omega(A_1)=0$ и $\omega(B_1)=4$, то получим, что решение $u(x)$ классической задачи Дирихле для этих граничных значений должно принимать в начале 0 различные значения: $u=1$ на дуге $\widehat{AB}$ и $u=2$ на дуге $\widehat{A_1B_1}$, что является абсурдом.

Рассмотренный пример показывает, что уже в простейших случаях областей с особыми точками классическая постановка задачи Дирихле не может дать ожидаемого естественного с физической точки зрения результата о существовании решения. Выход из этого положения состоит в том, чтобы отказаться от дифференцируемости решения в особых точках, сохраняя в них другое характерное свойство решений однородного уравнения Лапласа в классическом случае, а именно свойство средних значений. Точная формулировка видоизмененной задачи Дирихле будет дана позднее, в п. 8.

5. Простые особые точки на обобщенном многообразии. Мы скажем, что *точка m обобщенного многообразия M является особой*, если она является проекцией более чем одной точки многообразия M^*, т. е. если существуют по крайней мере две точки $m_1^*\in M^*$ и $m_2^*\in M^*$, так что $\pi(m_1^*)=\pi(m_2^*)=m$. Особую точку назовем *простой*, если она является проекцией не более чем конечного числа точек из M^*.

6. Среднее значение для особых точек обобщенного многообразия. Если M является многообразием в классическом смысле и $x_0 \in M$, то для любой непрерывной функции $u=u(x)$, определенной в окрестности точки x_0, и для любого достаточно малого положительного числа r хорошо определено среднее $\mathcal{M}_r(x_0, u)$. Его можно определить, например, так: рассмотрим все геодезические, проходящие через x_0, и множество N_r всех точек x на этих геодезических, находящихся на расстоянии r от x_0; тогда при малом r множество N_r является гладким многообразием и $\mathcal{M}_r(x_0, u)=\int_{N_r} u(x)dx / \int_{N_r} dx$, где интегралы берутся по гладкому многообразию N_r.

Сейчас мы приведем определение среднего для простой особой точки x_0 обобщенного многообразия M. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_s$ — все точки многообразия M^*, чьей проекцией является x_0, т. е. $\pi(z_i)=x_0$, $i=1, 2, \ldots, s$. Выберем малую окрестность U_i^* точки z_i, $i=1, 2, \ldots, s$. При достаточно малой окрестности U_i^* проектирование π отображает U_i^* диффеоморфно на множество $U_i \subset M$, содержащее точку x_0. U_i является гладким многообразием в классическом смысле. Поэтому, согласно сделанному выше замечанию, для U_i определено среднее $\mathcal{M}_r^i(x_0, u)=\int_{N_r^i} u(x)dx / \int_{N_r^i} dx$ для непрерывной функции $u(x)$, определенной на M. Теперь при достаточно малом r положим

$$\mathcal{M}_r(x_0, u)=\sum_{i=1}^{s} \int_{N_r^i} u(x)dx \Big/ \sum_{i=1}^{s} \int_{N_r^i} dx,$$

где $\mathcal{M}_r(x_0, u)$ — интересующее нас среднее значение гладкой функции $u(x)$ в простой особой точке x_0 обобщенного многообразия M.

7. Семейство областей. $\mathcal{LD}$. Скажем, что область D на обобщенном многообразии M принадлежит семейству $\mathcal{LD}$, если на многообразии M^* существует ограниченная область D^*, обладающая следующими свойствами:

1. Граница Γ^* области D^* является объединением двух множеств Γ_1^* и Γ_2^*, где Γ_2^* компактно, и эти множества обладают дополнительными свойствами, упомянутыми в следующих пунктах.

2. Проектирование π отображает взаимно-однозначно Γ_1^* на границу Γ области D.

3. Проектирование π отображает взаимно-однозначно область D^* на часть области D, $D=\pi(D^*) \cup \pi(\Gamma_2^*)$.

4. Проектирование π отображает Γ_2^* на гладкое классическое подмногообразие Γ_2 обобщенного многообразия M, такое, что $\Gamma_2 \subset D$, и каждая точка из Γ_2 является образом конечного числа точек из Γ_2^*.

5. Задача Дирихле для уравнения $\Delta^* u=0$ в области D^* имеет решение для любых граничных условий, непрерывных на Γ_1^* и Γ_2^*.

8. Формулировка основного результата. Теорема. *Пусть $D \in \mathcal{LD}$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$, заданной на границе Γ области D, существует единственная функция $u(x)$, непрерывная на $D \cup \Gamma$, гладкая в $D \setminus \Gamma_2$, удовлетворяющая в $D \setminus \Gamma_2$ уравнению $\Delta u=0$, совпадающая с $f(x)$ на Γ, и такая, что для любой точки $x \in \Gamma_2$ выполняется равенство $u(x)=\mathcal{M}_r(x; u)$.*

9. Начало доказательства основного результата. Принцип максимума. Функция $\theta(x)$. Будем предполагать (это можно сделать без ограничения общности), что многообразие M состоит из точек, достаточно близких к области D; тогда особыми точками обобщенного многообразия M являются только точки множества Γ_2. Стало быть, $M \setminus \Gamma_2$ является классическим гладким многообразием. Тогда на $M \setminus \Gamma_2$ оператор Лапласа Δ есть классический оператор Лапласа.

Хорошо известно, что для любой функции $u(x)$, удовлетворяющей в некоторой области Ω на классическом гладком многообразии уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, выполняется *принцип максимума*: если $u(x)$ достигает максимума во внутренней точке области Ω, то $u(x) = \text{const}$.

Обозначим через $\theta^*(x)$ функцию, непрерывную на $D^* \cup \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$, удовлетворяющую в D^* уравнению $\Delta^*\theta^* = 0$, и такую, что $\theta(x) = 1$ на Γ_2^* и $\theta(x) = 0$ на Γ_1^*. Такая функция существует в силу условий 1—5 п. 7.

Теперь через $\theta(y)$ обозначим функцию, определенную на $D \cup \Gamma$, такую, что $\theta^*(x) = \theta(\pi(x))$. Эта функция корректно определена, так как особыми точками $D \cup \Gamma$ являются только точки множества Γ_2, а на эти точки проектируются точки множества Γ_1^*, на котором функция $\theta^*(x)$ принимает одно и то же постоянное значение — 1.

Функция $\theta(y)$ определена и непрерывна на $D \cup \Gamma$, удовлетворяет однородному уравнению Лапласа в области $D \setminus \Gamma_2$ и равна нулю на Γ и единице на Γ_2.

Так как для функции $\theta(y)$ в области $D \setminus \Gamma_2$ выполняется принцип максимума, то для любой точки $y \in (D \setminus \Gamma_2)$ выполнены неравенства $0 < \theta(y) < 1$. Отсюда после простой выкладки получается, что аналогичные оценки имеют место и для средних $\mathscr{M}_r(x; \theta)$ для любой точки $x \in \Gamma_2$: $0 < \mathscr{M}_r(x; \theta) < 1$.

Обозначим теперь $\sup_{x \in \Gamma_2} \mathscr{M}_r(x; \theta) = C$. Так как множество Γ_2 компактно, то для любой точки $x \in \Gamma_2$ имеем $\mathscr{M}_r(x; \theta) \leq C < 1$.

10. Семейство функций H_f и оператор T_r последовательных приближений. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на Γ функция. Рассмотрим семейство H_f функций, заданных и непрерывных на множестве $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. На границе Γ совпадают с $f(x)$.
2. В области $D \setminus \Gamma_2$ удовлетворяют однородному уравнению Лапласа.

Из принципа максимума вытекает, что каждая функция семейства H_f однозначно определена своим сужением на Γ_2.

Пусть теперь $u(x)$ — произвольная функция семейства H_f. Рассмотрим функцию $g(x)$, определенную на Γ_2 по формуле $g(x) = \mathscr{M}_r(x; u)$. Докажем, что можно найти функцию семейства H_f, совпадающую на Γ_2 с функцией $g(x)$.

Так как $u(x)$ непрерывна, то $g(x)$ тоже непрерывна. Исходя из функции $g(x)$, на множестве Γ_2^* однозначно определена функция $g^*(x)$ по формуле $g^*(x) = g(\pi(x))$; эта функция тоже непрерывная. Тогда согласно условию 5 из п. 7 существует функция $v(x)$, определенная и непрерывная на множестве $D^* \cup \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$, совпадающая с $f^*(x) = f(\pi(x))$ на Γ_1^* и с $g^*(x)$ на Γ_2^* и удовлетворяющая в D^* уравнению $\Delta^* v = 0$. Теперь ясно, что функция

$$u_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{на} \quad \Gamma_2 \\ v(\pi^{-1}(x)) & \text{на} \quad (D \cup \Gamma_1) \setminus \Gamma_2 \end{cases}$$

принадлежит семейству H_f и совпадает с $g(x)$ на Γ_2.

Положим $u_1 = T_r u$. Таким образом, оператор T_r определен на семействе H_f и принимает значения из H_f.

11. Некоторые свойства оператора T_r. Пусть $v(x)$ — функция, определенная и непрерывная на $D \cup \Gamma$. Будем обозначать через $\| v \|$ число $\max_{x \in D \cup \Gamma} | v(x) |$, а через $\| v \|_1$ — число $\max_{x \in \Gamma_2} | v(x) |$.

Рассмотрим семейство H_f при $f = 0$, т. е. семейство H_0. Из принципа максимума следует, что для любой функции $u(x)$ этого семейства выполняется равенство $\| u \|_1 = \| u \|$.

Докажем, что для любой функции $u(x)$ семейства H_0 имеет место неравенство $\| T_r u \| \leqq C \| u \|$, где $C = \sup_{x \in \Gamma_2} \mathscr{M}_r(x; \theta)$ (см. п. 9).

Пусть $\| u \| \neq 0$. Тогда функция $w(x) = \frac{1}{\| u \|} u(x)$ принадлежит семейству H_0 и на множестве Γ_2 удовлетворяет неравенствам $-\theta(x) \leqq w(x) \leqq \theta(x)$. Из принципа максимума вытекает, что эти неравенства выполняются и в любой точке множества D. Следовательно,

$$-\mathscr{M}_r(x; \theta) \leqq \mathscr{M}_r(x; w) \leqq \mathscr{M}_r(x; \theta), \quad | M_r(x; w) | \leqq \mathscr{M}_r(x; \theta) \leqq C, \quad x \in \Gamma_2.$$

Но в любой точке $x \in \Gamma_2$ по определению оператора T_r имеем $(T_r w)(x) = \mathscr{M}_r(x; w)$, и, значит, $\| T_r w \| = \| T_r w \|_1 = \| \mathscr{M}_r(x; w) \|_1 \leqq C$. Поскольку $T_r w = T_r \frac{u}{\| u \|} = \frac{1}{\| u \|} T_r u$, то $\| T_r u \| \leqq C \| u \|$.

12. Конец доказательства основной теоремы. Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, определенная и непрерывная на Γ. Семейство H_f непусто: в п. 11 мы показали, что существует функция этого семейства, причем совпадающая на Γ_2 с наперед заданной непрерывной функцией — последнее для нас в настоящий момент неважно.

Пусть $u_1(x)$ — произвольная функция семейства H_f. Рассмотрим последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, где $u_{n+1} = T_r u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Для любого n функция $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ принадлежит семейству H_0, следовательно, по доказанному в предыдущем параграфе $C \| u_{n+1} - u_n \| \geqq \| T_r(u_{n+1} - u_n) \| = \| u_{n+2} - u_{n+1} \|$. И так как $C < 1$, то последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к некоторой непрерывной в $D \cup \Gamma$ функции $\bar{u}(x)$. Из равномерной сходимости вытекает, что $\bar{u}(x)$ удовлетворяет однородному уравнению Лапласа — так как все функции последовательности $\{u_n(x)\}$ удовлетворяют этому уравнению. Кроме того, на границе Γ имеем $f(x) = u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_n(x) = \ldots$, и значит, $\bar{u}(x) = f(x)$ на Γ.

Пусть x — любая точка Γ_2. Так как среднее $\mathscr{M}_r(x; u)$ зависит непрерывно от функции u, то, совершив предельный переход в равенстве $u_{n+1}(x) = \mathscr{M}_r(x; u_n)$, получим, что $\bar{u}(x) = \mathscr{M}_r(x; \bar{u})$.

Таким образом, функция $\bar{u}(x)$ удовлетворяет всем требованиям, содержащимся в условии теоремы. Пусть этим же требованиям удовлетворяет и некоторая функция $\bar{w}(x)$. Разность $\bar{u}(x) - \bar{w}(x)$ принадлежит семейству H_0. Пусть функция $\psi(x) = | \bar{u}(x) - \bar{w}(x) |$, определенная на Γ_2, достигает максимума в некоторой точке x_0. Тогда в соответствии с принципом максимума в точках области $D \setminus \Gamma_2$ выполняется неравенство $| \bar{u}(x) - \bar{w}(x) | < | \bar{u}(x_0) - \bar{w}(x_0) |$, если только $\bar{u}(x_0) - \bar{w}(x_0) \neq 0$. Но в этом случае мы имели бы

$$| \mathscr{M}_r(x_0; \bar{u}) - \mathscr{M}_r(x_0, \bar{w}) | < | \bar{u}(x_0) - \bar{w}(x_0) |,$$

а это невозможно, так как a priori $\bar{u}(x_0)=\mathcal{M}_r(x_0;\ \bar{u})$, $\bar{w}(x_0)=\mathcal{M}_r(x_0;\ \bar{w})$, и, значит, $\mathcal{M}_r(x_0;\ \bar{u})-\mathcal{M}_r(x_0,\ \bar{w})=\bar{u}(x_0)-\bar{w}(x_0)$. Из этого можно сделать вывод, что $\bar{u}(x_0)-\bar{w}(x_0)=0$. Иными словами, функции $\bar{u}(x)$ и $\bar{w}(x)$ совпадают на, множестве Γ_2. Так как они по условию совпадают и на множестве Γ, то совпадают на всей границе области $D\setminus\Gamma_2$. Применяя еще раз принцип максимума, получаем, что $\bar{u}(x)\equiv\bar{w}(x)$ на $D\cup\Gamma$.

13. Замечания. 1. Так как оператор Δ^* является эллиптическим, вопрос о том, принадлежит ли данная область D на обобщенном многообразии M семейству $\mathcal{LD}$, сводится к вопросу о существовании решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения $\Delta^* u=0$ в соответствующей области D^* на классическом и гладком многообразии M^*. Этот вопрос является объектом рассмотрения многих работ; частичный ответ на него в предположениях гладкости содержится, например, в монографии Хермандера [1].

2. Можно доказать, что для функции $\bar{u}(x)$, определенной в п. 12, среднее $\mathcal{M}_r(x;\ \bar{u})$ не зависит от r (при достаточно малом r).

Приношу глубокую благодарность проф. Я. Тагамлицкому, чьи идеи и постояное внимание стимулировали меня в моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander. Linear partial differential operators. Berlin, 1963.
2. Н. Николов. Дипломна работа. София, 1978.
3. Нгуен Мин Тхай. Дисертация. София, 1977.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 1. 1981