Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК В БИПЛАНАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

АДРИЯН В. БОРИСОВ

В настоящей статье устанавливаются формулы для плотностей некоторых множеств точек в бипланарном пространстве гиперболического типа.

1. Пусть P_{2n+1} — вещественное $(2n+1)$-мерное проективное пространство. Бипланарное пространство B_{2n+1} гиперболического типа есть пространство Клейна, фундаментальная группа G_N $(N=2n^2+4n+1)$ которого состоит из тех коллинеаций пространства P_{2n+1}, которые переводят в себя две скрещивающихся вещественных n-плоскостей J и K. Относительно бипланарного семейства B-реперов [2] $[A_1, \ldots, A_{2n+2}]$, для которых вершины $A_1, \ldots, A_{n+1}$ принадлежат плоскости J, а вершины $A_{n+2}, \ldots, A_{2n+2}$ — плоскости K, произвольная коллинеация бипланарной группы G_N имеет уравнения $x'_i=\Sigma_j a_{ij} x_j$, где $a_{\alpha p}=0$, $a_{q\beta}=0$. Здесь и дальше индексы принимают значения: $i, j, k=1, \ldots, 2n+2$; $l=1, \ldots, 2n+1$; $\alpha, \beta, \gamma=1, \ldots, n+1$; $p, q=n+2, \ldots, 2n+2$; $t=n+2, \ldots, 2n+1$; $\lambda=1, \ldots, h$; $a=1, \ldots, m$; $\rho=1, \ldots, r$; $\sigma=n+2, \ldots, n+s+1$; i_ρ, $i^*_\rho=s_1+\cdots+s_{\rho-1}+1, \ldots, s_1+\cdots+s_{\rho-1}+s_\rho$; $s_0=0$; $j_\rho=s_1+\cdots+s_{\rho-1}+1, \ldots, s_1+\cdots+s_{\rho-1}+s_\rho-1$.

В силу однородности проективных координат можно положить

$$\det \| a_{ij} \| = 1. \tag{1}$$

Если учтем, что для однородных координат аналитических точек имеем

$$\begin{aligned} &A_\alpha(a_{1\alpha}, \ldots, a_{n+1,\alpha}, 0, \ldots, 0),\\ &A_p(0, \ldots, 0, a_{n+2,p}, \ldots, a_{2n+2,p}), \end{aligned} \tag{2}$$

то равенството (1) можно представить в виде

$$|A_1 A_2 \ldots A_{2n+2}| = 1. \tag{1'}$$

Пусть для бипланарной группы инфинитезимальные преобразования определяются равенствами $dA_i=\Sigma_j \omega_i^j A_j$. В силу (1′), получаем

$$\omega_i^j = | A_1 \ldots A_{j-1}\, dA_i\, A_{j+1} \ldots A_{2n+2}|. \tag{3}$$

Относительные компоненты (3) удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \tag{4}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 8, 1982, с. 442—447.

соотношению

$$\sum_i \omega_i^i = 0, \tag{5}$$

как и условиям $\omega_\alpha^p = 0$, $\omega_q^\beta = 0$, обеспечивающим инвариантность абсолюта.

Учитывая (1′), из равенств (2) и (3) получаем

$$\omega_i^j = \sum_k A_{kj} da_{ki}, \tag{6}$$

где A_{kj} — алгебраическое дополнение элемента a_{kj} матрицы $\| a_{ij} \|$.

2. Используя методы Л. А. Сантало [8] и Р. Е. Лучиони [7], изложим некоторые результаты интегральной геометрии множеств систем точек в бипланарном пространстве.

Рассмотрим множество M, элементы которого будут системы Σ из $h+s+m$ линейно независимых точек, каждая из которых состоит из h точек плоскости J, s точек плоскости K и m точек, нележащих на абсолютных плоскостях, причем $0 \leq h \leq n+1$, $0 \leq s \leq n+1$, $0 \leq m \leq n+1-h$, $n+1-s$.

Если в качестве произвольной системы выберем точки $A_1, \ldots, A_h$; $A_{n+2}, \ldots, A_{n+s+1}$; $M_1, \ldots, M_m$, где $M_a = A_{h+a} + A_{n+s+a+1}$ [6], система Пфаффа, определяющая элементы множества M, имеет вид

$$\omega_\lambda^\alpha = 0,\ \omega_\sigma^p = 0,\ \omega_{h+a}^\beta = 0,\ \omega_{n+s+a+1}^q = 0,\ \omega_{h+a}^{h+a} - \omega_{n+s+a+1}^{n+s+a+1} = 0,$$

где $\alpha \neq \lambda$, $p \neq \sigma$, $\beta \neq h+a$, $q \neq n+s+a+1$.

Дифференциальная $[(h+s)n+m(2n+1)]$-форма

$$\Omega(h,\ s,\ m) = \bigwedge_\lambda \bigwedge_{\alpha \neq \lambda} \omega_\lambda^\alpha \wedge \bigwedge_\sigma \bigwedge_{p \neq \sigma} \omega_\sigma^p \tag{7}$$

$$\wedge \bigwedge_a \Big[\bigwedge_{\beta \neq h+a} \omega_{h+a}^\beta \wedge \bigwedge_{q \neq n+s+a+1} \omega_{n+s+a+1}^q \wedge (\omega_{h+a}^{h+a} - \omega_{n+s+a+1}^{n+s+a+1}) \Big].$$

является плотностью системы точек множества M тогда и только тогда когда $D\Omega = 0$ [5]. Принимая во внимание (4), получаем

$$D\Omega = \Big[(n+1)\Big(\sum_{\xi=1}^{h+m} \omega_\xi^\xi + \sum_{\zeta=n+2}^{n+s+m+1} \omega_\zeta^\zeta\Big) + h\sum_p \omega_p^p + s\sum_\alpha \omega_\alpha^\alpha\Big] \wedge \Omega.$$

Учитывая, что относительные компоненты ω_i^i подчинены единственному условию (5), приходим к выводу, что, условие $D\Omega = 0$ может быть выполнено тогда и только тогда, когда

(8)
а) $h = s$, $m = n+1-h$;
или б) $h = n+1$, $s = m = 0$;
или в) $h = m = 0$, $s = n+1$.

Полученные результаты выразим в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Системы Σ из $h+s+m$ линейно независимых точек имеют плотность инвариантную относительно бипланарной группы, определяемую дифференциальной формой* (7) *тогда и только тогда, когда для чисел h, s и m выполняется* (8).

Как видно из (8 а), если $h=s=0$, то $m=n+1$ и, следовательно, системы из $n+1$ точек, нележащих на абсолютных плоскостях, имеют инвариантную плотность. В таком случае

$$\Omega(n+1)=\bigwedge_{\alpha}\Big[\bigwedge_{\beta\neq\alpha}\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\bigwedge_{p\neq n+\alpha+1}\omega_{n+\alpha+1}^{p}\wedge(\omega_{\alpha}^{\alpha}-\omega_{n+\alpha+1}^{n+\alpha+1})\Big]. \tag{9}$$

Дальше выразим (9) через координаты точек $M_\alpha=A_\alpha+A_{n+\alpha+1}$ произвольной систем Σ множества M. В соответствии с формулами (2) получаем $M_\alpha(a_{1\alpha}, \ldots, a_{n+1,\alpha}, a_{n+2,n+\alpha+1}, \ldots, a_{2n+2,n+\alpha+1})$. Потребуем, чтобы $a_{2n+2,n+\alpha+1}\neq 0$, и обозначим через

$$X_{\alpha}^{l}=\begin{cases} a_{l\alpha}/a_{2n+2,\,n+\alpha+1}, & 1\leq l\leq n+1,\\ a_{l,\,n+\alpha+1}/a_{2n+2,\,n+\alpha+1}, & n+2\leq l\leq 2n+1\end{cases} \tag{10}$$

неоднородные координаты точки M_α. Учитывая (6) и (10), имеем

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda}^{\gamma}&=\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}da_{\alpha\lambda}=\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}d(a_{2n+2,\,n+\lambda+1}X_{\lambda}^{\alpha})\\ &=da_{2n+2,\,n+\lambda+1}\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}X_{\lambda}^{\alpha}+a_{2n+2,\,n+\lambda+1}\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}dX_{\lambda}^{\alpha}\\ &=da_{2n+2,\,n+\lambda+1}\sum_{\alpha}\frac{A_{\alpha\gamma}a_{\alpha\lambda}}{a_{2n+2,\,n+\lambda+1}}+a_{2n+2,\,n+\lambda+1}+\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}dX_{\lambda}^{\alpha}\\ &=\frac{da_{2n+2,\,n+\lambda+1}}{a_{2n+2,\,n+\lambda+1}}\,\delta_{\gamma\lambda}+a_{2n+2,\,n+\lambda+1}\sum_{\alpha}A_{\alpha\gamma}dX_{\lambda}^{\alpha}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\pi_\alpha&=\bigwedge_{\beta\neq\alpha}\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\bigwedge_{p\neq n+\alpha+1}\omega_{n+\alpha+1}^{p}\wedge(\omega_{\alpha}^{\alpha}-\omega_{n+\alpha+1}^{n+\alpha+1})\\ &=(a_{2n+2,\,n+\alpha+1})^{2n+1}\bigwedge_{\beta\neq\alpha}(\sum_{\gamma}A_{\gamma\beta}dX_{\alpha}^{\gamma})\wedge\bigwedge_{p\neq n+\alpha+1}(\sum_{t}A_{tp}dX_{\alpha}^{t}),\\ &\qquad\wedge(\sum_{\beta}A_{\beta\alpha}dX_{\alpha}^{\beta}-\sum_{t}A_{t,\,n+\alpha+1}dX_{\alpha}^{t})\\ &=(-1)^{2n-\alpha+1}(a_{2n+2,\,n+\alpha+1})^{2n+1}A_{2n+2,\,n+\alpha+1}^{*}\bigwedge_{l}dX_{\alpha}^{l},\end{aligned}$$

где $A_{2n+2,\,n+\alpha+1}^{*}$ — дополнительный минор элемента $A_{2n+2,\,n+\alpha+1}$ матрицы $\|A_{ij}\|$. Принимая во внимание, что $A_{ij}^{*}=(-1)^{i+j}a_{ij}$, получим $\pi_\alpha=(-1)^{n}(a_{2n+2,\,n+\alpha+1})^{2n+2}\bigwedge_{l}dX_{\alpha}^{l}$. Тогда формулу (9) можно записать в виде

$$\Omega(n+1)=\prod_{\alpha}(a_{2n+2,\,n+\alpha+1})^{2n+2}\bigwedge_{\alpha}\bigwedge_{l}dX_{\alpha}^{l}. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$(\prod_{\alpha}a_{2n+2,\,n+\alpha+1}^{2})^{-1}=\begin{vmatrix} X_1^1 & \ldots & X_{n+1}^1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ X_1^{n+1} & \ldots & X_{n+1}^{n+1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & X_1^{n+2} & \ldots & X_{n+1}^{n+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & 0 & X_1^{2n+1} & \ldots & X_{n+1}^{2n+1}\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1\end{vmatrix}=V,$$

и соотношение (11) принимает вид

$$\Omega(n+1)=\frac{1}{V^{n+1}}\bigwedge_{\alpha}\bigwedge_{i} dX^{i}_{\alpha}. \tag{12}$$

Итак, приходим к следующему результату:

Теорема 2. *Плотность систем $n+1$ линейно независимых точек, нележащих на абсолютных плоскостях бипланарного пространства, определяется формулой* (12).

Аналогичным способом можно рассмотреть и остальные случаи (8) [1].

Если $n=1$, из формулы (12) следует

$$\Omega(2)=\frac{dX^1_1\wedge dX^2_1\wedge dX^3_1\wedge dX^1_2\wedge dX^2_2\wedge dX^3_2}{[(X^1_1X^2_2-X^2_1X^1_2)(X^3_1-X^3_2)]^2}.$$

Этот результат в B_3 был получен Г. Станиловым [3].

3. Выберем теперь в качестве произвольного элемента множества M систему Σ из $h+r$ точек $M_1,\dots,M_h$; $L_1,\dots,L_r$, где $M_\lambda=A_\lambda+A_{n+\lambda+1}$, $L_\rho=M_{s_1+\dots+s_{\rho-1}+1}+\dots+M_{s_1+\dots+s_{\rho-1}+s_\rho}$ и $h\leqq n+1$, $s_1+s_2+\dots+s_r\leqq h$.

Систему Пфаффа, определяющую элементы множества M, можно записать в форме

$$\omega^\alpha_\lambda=0,\quad \omega^p_{n+\lambda+1}=0,\quad \omega^\lambda_\lambda-\omega^{n+\lambda+1}_{n+\lambda+1}=0,\quad \sum_{i_\rho}(\omega^{j_\rho}_{i_\rho}-\omega^{s_1+\dots+s_\rho}_{i_\rho})=0,$$

где $\alpha\neq\lambda$, $p\neq n+\lambda+1$. Чтобы дифференциальная $[h(2n+1)+s_1+\dots+s_r-r]$-форма

$$\Omega(h,r)=\bigwedge_{\lambda}\Big[\bigwedge_{\alpha\neq\lambda}\omega^\alpha_\lambda\wedge\bigwedge_{p\neq n+\lambda+1}\omega^p_{n+\lambda+1}\wedge(\omega^\lambda_\lambda-\omega^{n+\lambda+1}_{n+\lambda+1})\Big] \wedge\bigwedge_{\rho}\Big[\bigwedge_{j_\rho}\sum_{i_\rho}(\omega^{j_\rho}_{i_\rho}-\omega^{s_1+\dots+s_\rho}_{i_\rho})\Big] \tag{13}$$

выражала инвариантную плотность систем Σ, должно удовлетворяться условие $D\Omega=0$. Используя уравнения структуры (4), получаем

$$D\Omega(h,r)=(n+1)\sum_{\lambda}(\omega^\lambda_\lambda+\omega^{n+\lambda+1}_{n+\lambda+1})\wedge\Omega(h,r),$$

откуда следует, что равенство $D\Omega=0$ имеет место тогда и только тогда когда $h=n+1$. Таким образом доказана следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы дифференциальная форма* (13) *определяла инвариантную плотность систем Σ из $h+r$ точек, необходимо и достаточно выполнение соотношения $h=n+1$.*

Теперь используя прием, указанный выше, получим толкование плотности (13) (для $h=n+1$). Используя структуру формулы (13), обозначим

$$\Omega(n+1,r)=\Omega(n+1)\wedge\Omega(r), \tag{14}$$

где $\Omega(n+1)$ — плотность систем $n+1$ линейно независимых точек $M_1,\dots,M_{n+1}$, а $\Omega(r)$ — произведение

$$\bigwedge_{\rho}\Big[\bigwedge_{j_\rho}\sum_{i_\rho}(\omega^{j_\rho}_{i_\rho}-\omega^{s_1+\dots+s_\rho}_{i_\rho})\Big].$$

Так как для $\Omega(n+1)$ получено (12), обратимся к $\Omega(r)$. Предполагая, что $\Sigma_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1} \neq 0$, обозначим через

(15) $$Y^l_\rho = \begin{cases} \sum\limits_{i_\rho} a_{l,\, i_\rho} / \sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1}, & 1 \leq l \leq n+1\,; \\ \sum\limits_{i_\rho} a_{l,\, n+i_\rho+1} / \sum\limits_{i_\rho} {}_{2n+2,\, n+i_\rho+1}, & n+2 \leq l \leq 2n+1, \end{cases}$$

неоднородные координаты точки L_ρ. Имеет место

(15′) $$Y^l_\rho = \sum_{i_\rho} \lambda_{i_\rho} X^l_{i_\rho}, \quad \sum_{i_\rho} \lambda_{i_\rho} = 1.$$

Предыдущие формулы (6), (15) и (15′) позволяют последовательно вычислить

$$\sum_{i_\rho} \omega^{j_\rho}_{i_\rho} = \frac{d(\sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1})}{\sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1}} + \sum_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1} \sum_{i^*_\rho} d\lambda_{i^*_\rho} \sum_\alpha A_{\alpha j_\rho} \frac{a_{\alpha i^*_\rho}}{a_{2n+2,\, n+i^*_\rho+1}} + \{(dX)\}$$

$$= \frac{d(\sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1})}{\sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1}} + (\sum_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1}) \frac{d\lambda_{j_\rho}}{a_{2n+2,\, n+j_\rho+1}} + \{(dX)\},$$

где через $\{(dX)\}$ обозначены члены, содержащие $dX^l_{i_\rho}$. Отсюда, после несложных преобразований, находим

$$\bigwedge_{j_\rho} \sum_{i_\rho} (\omega^{j_\rho}_{i_\rho} - \omega^{s_1+\ldots+s_\rho}_{i_\rho}) = \frac{(\sum\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1})^{s_\rho}}{\prod\limits_{i_\rho} a_{2n+2,\, n+i_\rho+1}} \bigwedge_{j_\rho} d\lambda_{j_\rho} + \{(dX)\}$$

$$= \frac{V^{s_\rho/2}}{[\prod\limits_{i_\rho} V_{i_\rho}(\rho)]^{1/2}} \bigwedge_{j_\rho} d\lambda_{j_\rho} + \{(dX)\},$$

где

$$V_{i_\rho}(\rho) = \begin{vmatrix} X^1_1 & \ldots & X^1_{i_\rho-1} & Y^1_\rho & X^1_{i_\rho+1} & \ldots & X^1_{n+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{n+1}_1 & \ldots & X^{n+1}_{i_\rho-1} & Y^{n+1}_\rho & X^{n+1}_{i_\rho+1} & \ldots & X^{n+1}_{n+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & X^{n+2}_1 & \ldots & X^{n+2}_{i_\rho-1} & Y^{n+2}_\rho & X^{n+2}_{i_\rho+1} & \ldots & X^{n+2}_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & X^{2n+1}_1 & \ldots & X^{2n+1}_{i_\rho-1} & Y^{2n+1}_\rho & X^{2n+1}_{i_\rho+1} & \ldots & X^{2n+1}_{n+1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$\Omega(r) = \frac{V^{(s_1+\ldots+s_r)/2}}{\prod\limits_\rho [\prod\limits_{i_\rho} V_{i_\rho}(\rho)]^{1/2}} \bigwedge_\rho \bigwedge_{j_\rho} d\lambda_{j_\rho} + \{(dX)\}.$$

Подставив это значение в (14) и учитывая (12), получаем

$$\Omega(n+1,r)=\frac{V^{(s_1+\dots+s_r)/2-(n+1)}}{\prod\limits_{\rho}[\prod\limits_{i_\rho}V_{i_\rho}(\rho)]^{1/2}}\bigwedge_{\alpha}\bigwedge_{l}dX^l_\alpha\bigwedge_{\rho}\bigwedge_{j_\rho}d\lambda_{j_\rho}. \tag{16}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Плотность* (14) *систем* Σ *из* $n+1+r$ *точек определяется формулой* (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Борисов. Интегральные инварианты множеств точек в бипланарном пространстве гиперболического типа. *Доклады БАН*, **34**, 1981, 487—490.
2. Б. Петканчин. Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **60**, 1967, 33—60.
3. Г. Станилов. Основни формули на интегралната геометрия на двуосното пространство. *Известия Мат. инст. БАН*, **10**, 1969, 85—111.
4. Г. Станилов. Върху интегралната геометрия на обобщени двуосни пространства. *Известия Мат. инст. БАН*, **11**, 1970, 39—53.
5. S. S. Chern. On integral geometry in Klein spaces. *Ann. Math.*, **43**, 1942, 178-189.
6. I. B. Ivanov. Flächen in der zweiachsigen geometrie. *C. R. Acad. bulg. Sc.*, **14**, 1961, 11-13.
7. R. E. Luccioni. Geometria integral en espacios projectivos. *Rev. Mat. Fis. Teor. Univ. Tucuman*, **15**, 1964, 53-80.
8. L. A. Santalo. Integral geometry in projective and affine spaces. *Ann. Math.*, **51**, 1950, 739-755.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 21. 1. 1981