Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

LA CONSTRUCTION DE LA MÉTRIQUE PSEUDORIEMANNIENNE ET DE LA MÉTRIQUE DE FINSLER DANS DES ESPACES SUR DE CERTAINES ALGÈBRES

HALINA FELIŃSKA

On construit un certain espace pseudoriemannien duquel des points sont des orbites dans un espace projectif à l'action d'un certain groupe. Sur l'espace d'orbites agissent les homographies à coefficients complexes qu'ont le birapport de quatre points comme l'invariant fondamental. A l'aide du birapport on construit la métrique pseudoriemannienne à indice (—, —, +). En raisonnant pareillement en cas de deuxième algèbre que nous avons construit, on a obtenu la métrique de Finsler.

Soient R le corps des nombres réels et C le corps des nombres complexes.

Considérons l'anneau à quatre unités, non-commutatif, ayant des diviseurs de zéro. Nous présentons chaque élément a de cet anneau sous forme de $a_1+a_2\mathbf{i}+a_3\mathbf{l}+a_4\mathbf{k}$ où $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ et la multiplication des unités $\mathbf{i}, \mathbf{l}, \mathbf{k}$ nous la définissons comme suit:

$$\mathbf{i}^2=-1, \qquad \mathbf{l}^2=\mathbf{k}^2=1$$

$$\mathbf{il}=\mathbf{k}, \quad \mathbf{li}=-\mathbf{k}, \qquad \mathbf{ik}=\mathbf{l}, \quad \mathbf{ki}=\mathbf{l}, \qquad \mathbf{lk}=-\mathbf{i}, \quad \mathbf{kl}=\mathbf{i}.$$

Nous allons désigner cet anneau par A.

Il est facile de voir que

1A. On peut présenter chaque élément $a \in A$ sous la forme

$$a'+a''\mathbf{l}, \quad \text{où} \quad a'=a_1+a_2\mathbf{i} \quad \text{et} \quad a''=a_3+a_4\mathbf{i}.$$

2A. Si $a=a'+a''\mathbf{l} \in A$ et $a'\bar{a}' \neq a''\bar{a}''$, il existe un élément inverse qui a la forme

$$\frac{-\bar{a}'}{a''\bar{a}''-a'\bar{a}'}+\frac{a''}{a''\bar{a}''-a'\bar{a}'}\mathbf{l}.$$

3A. L'ensemble $\{a'+a''\mathbf{l} \mid a'\bar{a}'=a''\bar{a}''\}$ est l'ensemble de diviseurs de zéro dans l'anneau en considération.

Introduisons maintenant le deuxième anneau à quatre unités, commutatif et avec des diviseurs de zéro, dont nous présentons chaque élément a sous forme de $a_1+a_2\mathbf{i}+a_3\mathbf{l}+a_4\mathbf{k}$ où $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ et

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{l}^2=-1, \quad \mathbf{k}^2=1,$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 9, 1983, p. 5—11.

$$\mathbf{il}=\mathbf{k}, \qquad \mathbf{lk}=-\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik}=-\mathbf{l}.$$

Nous allons désigner cet anneau par B. Comme précédemment, remarquons que

1B. On peut présenter chaque élément B sous forme de $a'+a''\mathbf{l}$ où a', $a''\in C$.

2B. Si $(a')^2+(a'')^2\neq 0$, il existe un élément inverse de l'élément $a'+a''\mathbf{l}\in B$ et il a la forme

$$\frac{a'}{(a')^2+(a'')^2}+\frac{-a''}{(a')^2+(a'')^2}\mathbf{l}.$$

3B. Les éléments $a'+a''\mathbf{l}$ tels que $(a')^2+(a'')^2=0$ sont les diviseurs de zéro en B.

Pour le premier coup, nous allons nous occuper maintenant de la construction de l'espace d'orbites dans l'algèbre A par rapport au groupe G, où G est un groupe de rotation. Le groupe G agit sur A de la façon suivante: si $a\in A$, donc $\tau(e^{i\varphi}, a)=e^{-i\varphi}ae^{i\varphi}$. Prenons en considération l'orbite du point $a\in A$, c'est-à-dire l'ensemble $\{\tau(g, a)\mid g\in G\}$. En agissant sur $a=a'+a''\mathbf{l}$ avec un élément du groupe G nous recevrons

$$e^{-i\varphi}(a'+a''\mathbf{l})e^{i\varphi}=a'+a''(\cos\varphi-\mathbf{i}\sin\varphi)\mathbf{l}(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)=a'+a''e^{-2i\varphi}\mathbf{l}.$$

A chaque orbite nous faisons correspondre les coordonnées réelles (re a', im a', $|a''|$). Cette application détermine l'homéomorphisme entre l'espace d'orbites et $R^3_+=\{(x^1, x^2, x^3)\mid x^3>0\}$. Nous désignons par L^3 l'espace d'orbites dans l'algèbre A par rapport à l'opération du groupe G. Nous voyons que l'espace L^3 obtenu ci-dessus est une variété élémentaire à 3 dimensions. Les homographies à coefficients complexes agissent sur l'espace A comme le pseudogroupe de transformations selon la règle suivante:

$$g\left(\begin{bmatrix} a, & b\\ c, & d\end{bmatrix}, k\right)=(ak+b)(ck+d)^{-1}.$$

Le groupe d'homographies complexes détermine le pseudogroupe de transformations qui opère transitivement dans l'espace L^3. Nous désignons ce pseudogroupe par $\mathscr{L}$. Remarquons que

1°. *Si k et l appartiennent à la même orbite donc leurs images appartiennent aussi à leur même.*

Démonstration. Si $\begin{bmatrix} a, & b\\ c, & d\end{bmatrix}$ est une matrice complexe, donc

$$(ae^{-i\varphi}ke^{i\varphi}+b)(ce^{-i\varphi}ke^{i\varphi}+d)^{-1}$$
$$=e^{-i\varphi}(ak+e^{i\varphi}be^{-i\varphi})e^{i\varphi}(e^{-i\varphi}(ck+e^{i\varphi}de^{-i\varphi})e^{i\varphi})^{-1}=e^{-i\varphi}(ak+b)(ck+d)^{-1}e^{i\varphi}.$$

2°. *Il existe l'homéomorphisme du groupe d'homographies à coefficients complexes en groupe d'automorphismes de l'espace L^3.*

Le sous-groupe du groupe d'automorphismes de l'espace L^3 qui fait passer le point donné en lui-même nous l'appellerons le groupe d'isotropie de ce point.

Passons maintenant à l'anneau B.

Nous faisons correspondre à chaque élément $a'+a''\mathbf{l}\in B$ les coordonnées réelles (re a', im a', re a'', im a''). Cette application détermine l'homéomorphisme entre l'ensemble du point B et l'espace R^4. Nous pouvons donc considérer l'espace B comme la variété élémentaire à 4 dimensions. C'est sur l'espace considéré qu'opère le groupe d'homographies à coefficients complexes comme le pseudogroupe de transformations, selon la même règle qu'en l'algèbre A. Pour la suite de nos considérations, nous allons utiliser le théorème 1.

Thèoréme 1. *Soit q le point dans $L^3(-B)$ à coordonnées* $(0, 0, 1)$ (— *convenablement* $(0, 0, 1, 0)$). *Dans ce cas, le groupe d'isotropie du point q est formé par les matrices en forme de* $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ *telles que* $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ $\left(-\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right)$.

Démonstration. Ayant considéré l'équation $(a\mathbf{1}+b)(c\mathbf{1}+d)^{-1} = \mathbf{1}$ nous obtenons la thèse du théorème.

Maintenant nous pouvons passer au théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $k = k' + k''\mathbf{1}$ l'élément A tel que $k'' \neq 0$. Das ce cas, il existe deux nombres complexes λ_1 et λ_2 et deux matrices complexes A_1 et A_2 tels que*

(iA) $|\lambda_1| \neq 1$, $|\lambda_1 . \lambda_2| = 1$, $\arg \lambda_1 = \arg \lambda_2 = \arg k'$;

(iiA) $g(A_\nu, k) = \lambda_\nu \mathbf{1}$ *et* $g(A_\nu, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$ *pour* $\nu = 1, 2$.

Si $k = k' + k''\mathbf{1}$ est l'élément B tel que $k'' \neq 0$ alors la condition (iA) change. Elle prendra la forme

(iB) $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$.

La deuxième partie du théorème reste inchangée.

Démonstration. Dans le cas où $k \in A$ la démonstration est analogue à [2]. Nous ne présentons donc la démonstration que dans le cas où $k \in B$. En conséquence du théorème 1 nous pouvons chercher λ_ν et les matrices A_ν en résolvant l'équation:

$$(a(k' + k''\mathbf{1}) + b)(-b(k' + k''\mathbf{1}) + a)^{-1} = \lambda\mathbf{1}.$$

Après quelques transformations nous recevons le système suivant d'équations linéaires homogènes par rapport à a, b: $ak' + b(1 - \lambda k'') = 0$, $a(k'' - \lambda) + b\lambda k' = 0$. Parce que nous cherchons la solution différente de zéro il faut déterminer λ, tel que

$$\begin{vmatrix} k' & 1-\lambda k'' \\ k''-\lambda & \lambda k' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d'ici,}$$

$$\lambda^2 k'' - \lambda((k')^2 + (k'')^2 + 1) + k'' = 0. \tag{1}$$

En désignant les zéros de cette équation par λ_1 et λ_2, nous remarquons que $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$.

Acceptons les notations suivantes:

$$a = \operatorname{re} k', \quad b = \operatorname{im} k', \quad c = \operatorname{re} k'', \quad d = \operatorname{im} k'',$$

$$p = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2 + 2(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + 1,$$

$$q = 4[(ab + cd)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + (ab - cd)],$$

$$A = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 1) + \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}\right)^{1/2},$$

$$B = \operatorname{sgn} q\Big(\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}\Big)^{1/2} + 2(ab+cd).$$

Soit $|\lambda| = \gamma$. Après quelques transformations, de l'équation (1) nous avons $\gamma^2 = (A^2+B^2)/4(c^2+d^2)$, d'ici

$$\text{(2B)} \qquad \log\gamma = \frac{1}{2}\log\frac{A^2+B^2}{4(c^2+d^2)}\,.$$

Pour chacune des deux valeurs de λ, nous avons la matrice

$$A_{\nu\cdot} = \begin{bmatrix} -\lambda_\nu k' & -\lambda_\nu + k'' \\ \lambda_\nu - k'' & -\lambda_\nu k' \end{bmatrix}, \quad \nu = 1,\ 2.$$

Si $k \in A$ nous avons

$$\text{(2A)} \qquad \log\gamma = \operatorname{arc\,ch}\Big(\frac{1+|k''|^2-|k'|^2}{2|k''|}\Big)$$

et les matrices

$$A_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_\nu \bar{k}' & \lambda_\nu - k'' \\ \bar{\lambda}_\nu - \bar{k}'' & \bar{\lambda}_\nu k' \end{bmatrix}, \quad \nu = 1,\ 2.$$

Aussi a lieu un théorème plus général.

Théorème 3. *Pour tous les deux points l, $h \in A$ tels que $l'' \neq 0$ et $h'' \neq 0$ il existe exactement deux transformations G_1 et G_2 telles que* $g(G_\nu, l) = \mathbf{1}$, $g(G_\nu, h) = \lambda_\nu(l, h)\mathbf{1}$ *pour* $\nu = 1,\ 2$, *où* (A) $\lambda_\nu(l,h) \in C$, $|\lambda_1| \neq 1$, $|\lambda_1\lambda_2| = 1$ *et* $\arg\lambda_1 = \arg\lambda_2 = \arg((h'-l')/l'')$.

Démonstration. Soit $l = l' + l''\mathbf{1}$. Alors la matrice de la transformation qui fait passer le point l en point $\mathbf{1}$ a la forme $A_0 = \begin{bmatrix} 1/l'' & -l'/l'' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit $g(A_0, h) = k$, où $k = k' + k''\mathbf{1}$. Alors $k' = (h'-l')/l''$ et $k'' = h''/l''$. En vertu du théorème précédent, il existe deux matrices complexes A_1 et A_2 telles que $g(A_\nu, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $g(A_\nu, k) = \lambda_\nu\mathbf{1}$, pour $\nu = 1, 2$. En posant $G_1 = A_1 \circ A_0$ et $G_2 = A_2 \circ A_0$ nous obtiendrons notre théorème.

Pour tous points l, $h \in B$ tels que $l'' \neq 0$ et $h'' \neq 0$ la thèse du théorème est pareille. Ce n'est que la condition (A) qui se transforme. Dans ce cas, elle prendra la forme

$$\text{(B)} \qquad \lambda_\nu(l,h) \in C \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq 1, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

La démonstration est analogue.

Dans la suite du travail, nous utiliserons aussi le théorème suivant:

Théorème 4A. *Si l, $h \in A$ sont des points quelconques, donc* $\log\gamma(l, h)$ *s'exprime par la formule*

$$\text{(3A)} \qquad \log\gamma(l,h) = \operatorname{arc\,ch}\Big(\frac{|l''|^2+|h''|^2-|h'-l'|^2}{2|h''l''|}\Big).$$

Dans le but de formuler le théorème analogue pour le cas où $l = l' + l''\mathbf{1}$ et $h = h' + h''\mathbf{1}$ sont des points quelconques de B, introduisons les notations suivantes:

$$\tilde{p}=\Big((\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''})^2+(\operatorname{re}(\frac{h''}{l''}))^2-(\operatorname{im}\frac{h''}{l''})^2\Big)^2$$

$$-4(\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''}\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''}+\operatorname{re}\frac{h''}{l''}\operatorname{im}\frac{h''}{l''})$$

$$+2\Big((\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''})^2-(\operatorname{re}\frac{h''}{l''})^2+(\operatorname{im}\frac{h''}{l''})^2\Big)+1,$$

$$\tilde{q}=4\Big[(\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''}\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''}+\operatorname{re}\frac{h''}{l''}\operatorname{im}\frac{h''}{l''})\Big((\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''})^2$$

$$+(\operatorname{re}\frac{h''}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h''}{l''})^2\Big)+(\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''}\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''}-\operatorname{re}\frac{h''}{l''}\operatorname{im}\frac{h''}{l''})\Big],$$

$$\tilde{A}=(\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''})^2+(\operatorname{re}\frac{h''}{l''})^2-(\operatorname{im}\frac{h''}{l''})^2+1+\left(\frac{\tilde{p}+\sqrt{\tilde{p}+\tilde{q}}}{2}\right)^{1/2},$$

$$\tilde{B}=\operatorname{sgn}\tilde{q}\left(\frac{-\tilde{p}+\sqrt{\tilde{p}^2+\tilde{q}^2}}{2}\right)^{1/2}+2(\operatorname{re}\frac{h'-l'}{l''}\operatorname{im}\frac{h'-l'}{l''}+\operatorname{re}\frac{h''}{l''}\operatorname{im}\frac{h''}{l''}).$$

Maintenant nous pouvons formuler

Théorème 4B. *Si $l=l'+l''\mathbf{1}$ et $h=h'+h''\mathbf{1}$ sont des points quelconques de B, dans ce cas* $\log\gamma(l,h)$ *s'exprime par la formule suivante*

$$\log\gamma(l,h)=\frac{1}{2}\log\frac{\tilde{A}^2+\tilde{B}^2}{4|h''/l''|^2}.$$

Démonstration. De la même façon que nous avons agi dans la démonstration du théorème 3, nous choisissons la transformation qui fera passer l'un de ces points en point $\mathbf{1}$. En utilisant les notations de cette démonstration, nous avons

$$g(A_0,l)=\mathbf{1},\quad g(A_0,h)=\frac{h'-l'}{l''}+\frac{h''}{l''}\mathbf{1}.$$

Nous posons $k=g(A_0,h)$. En profitant maintenant de l'équation (2B), nous recevons la thèse du théorème.

La démonstration du théorème 4A est analogue.

Nous définissons maintenant la droite et la pseudonorme d'un vecteur tangent à L^3.

La droite dans l'espace L^3 c'est l'ensemble $\mathscr{X}$ des points tels que

$$\bigvee_{A\in\mathscr{X}}\ \bigwedge_{h\in\mathscr{X}}\ (g(A,h)=z\mathbf{1}\wedge z\in C).$$

Soit $p>0$, $p\in R$. Dans $L^3\times L^3$ nous définissons la fonction m suivante: Si k et l sont des points de L^3, $k\neq l$, alors nous prenons la transformation (cf. le théorème 3) telle que $g(A,l)=\mathbf{1}$, $g(A,k)=\lambda\mathbf{1}$, où $\lambda\in C$ et $\lambda=\gamma e^{i\arg\lambda}$. Acceptons $m(k,l)=p|\log\gamma(k,l)|$. On peut exprimer la fonction m à l'aide du birapport de quatre points qui est bien connu dans la théorie des espaces projectifs. Alors m est invariante par rapport à l'action du groupe $\mathscr{L}$. Donc, la fonction m est l'invariante du groupe $\mathscr{L}$.

Soit V un vecteur tangent à L^3. Soit $t \longrightarrow \varphi(t)$ la paramétrisation de la courbe, son jet de premier ordre étant juste le vecteur V. Nous définissons la pseudonorme du vecteur V comme il suit (cf. [2]):

$$\| V \| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} m(\varphi(t), \varphi(0)).$$

Nous annonçons

Lemme 1A. *Soit V un vecteur tangent à L^3, à coordonnées (v^1, v^2, v^3) et accroché au point* $(0, 0, 1) \in L^3$. *Dans ce cas, on déduit le carré de la pseudonorme du vecteur V par la formule*:

$$\| V \|^2 = p^2(-(v^1)^2 - (v^2)^2 + (v^3)^2).$$

Démonstration. Prenons la courbe dans l'espace A qui est représentée par l'équation $\varphi(t) = \mathbf{1} + t(v' + v''\mathbf{1})$, où $v' = v^1 + v^2\mathbf{i}$, $|v''| = v^3$. Cette courbe sort du point $\mathbf{1}$ et le vecteur V est un jet de premier ordre de cette courbe. Après avoir appliqué la formule du théorème 4 dans les calculs, nous obtenons la formule en question.

Maintenant nous pouvons passer au théorème plus général:

Théorème 5A. *Si le vecteur V à coordonnées (v^1, v^2, v^3) est un vecteur tangent à L^3 et accroché au point $(a^1, a^2, a^3) \in L^3$, alors le carré de la pseudonorme du vecteur V s'exprime par la formule*:

$$\| V \|^2 = \frac{p^2}{(a^3)^2}(-(v^1)^2 - (v^2)^2 + (v^3)^2).$$

Démonstration. Prenons la courbe en A, représentée par la formule $\psi(t) = \alpha + \beta\mathbf{1} + t(v' + v''\mathbf{1})$, où $v' = v^1 + v^2\mathbf{i}$, $|v''| = v^3$, $\alpha = a^1 + a^2\mathbf{i}$, $|\beta| = a^3$. Nous allons effectuer la transformation qui fera passer la courbe définie ci-dessus en courbe sortant du point $\mathbf{1}$ en L^3. Nous recevons la courbe $\varphi(t) = \mathbf{1} + t(\frac{v'}{\beta} + \frac{v''}{\beta}\mathbf{1})$. En profitant maintenant du lemme 1A, nous obtenons la formule du carré de la pseudonorme du vecteur accroché à un point quelconque L^3. Dans l'espace d'orbites L^3 nous avons obtenu de cette façon-la une certaine métrique pseudoriemannienne à indice $(-, -, +)$.

Nous allons présenter maintenant les théorèmes analogues pour l'algèbre B. Nous définissons la pseudonorme du vecteur V de même que dans l'espace L^3. Nous avons

Lemme 1B. *Si V est un vecteur à coordonnées (v^1, v^2, v^3, v^4) tangent à B et accroché au point* $(0, 0, 1, 0) \in B$, *on définit le carré de la pseudonorme du vecteur V par la formule*:

$$\| V \|^2 = \frac{1}{2}((v^1)^2 - (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 + \{((v^1)^2 - (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2)^2 + 4(v^1v^2 + v^3v^4)^2\}^{1/2}).$$

La démonstration est analogue comme pour l'algèbre A.

Maintenant nous pouvons passer au théorème plus général.

Théorème 5B. *Si le vecteur V à coordonnées (v^1, v^2, v^3, v^4) est le vecteur tangent à B et accroché au point $(a^1, a^2, a^3, a^4) \in B$ alors le carré de la pseudonorme du vecteur V est défini par la formule*

$$\|V\|^2 = \frac{1}{2((a^3)^2+(a^4)^2)^2}((v^1a^3+v^2a^4)^2-(v^2a^3-v^1a^4)^2+(v^3a^3+v^4a^4)^2$$
$$-(v^4a^3-v^3a^4)^2+\{(v^1a^3+v^2a^4)^2-(v^2a^3-v^1a^4)^2+(v^3a^3+v^4a^4)^2-(v^4a^3-v^3a^4)^2$$
$$+4[(v^1v^2+v^3v^4)((a^3)^2-(a^4)^2)-a^3a^4((v^1)^2-(v^2)^2+(v^3)^2-(v^4)^2)]^2\}^{1/2}).$$

La démonstration du lemme 1B et du théorème 5B est analogue comme pour l'espace L^3.

Cette méthode-là, on ne peut pas l'appliquer pour l'anneau de quatre unités commutative, en cas que

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{l}^2=\mathbf{k}^2=1, \quad \mathbf{il}=\mathbf{k}, \quad \mathbf{ik}=\mathbf{l}, \quad \mathbf{lk}=\mathbf{i}.$$

REFERENCES

1. P. Hartshorne. Foundation of projective geometry. W. A. Benjamin Inc., 1967.
2. A. Szybiak. A model of hyperbolic stereometry based on the algebra of quaternions *Colloq. Math.*, **32**, 1975, 277-284.

Institute of, Mathematics UMCS
Plac. M. Curie-Skladowskiej 1
Lublin Poland

Received 22.10. 1980.