Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА НА ВСЕЙ ОСИ

Е. П. ЖИДКОВ, К. П. КИРЧЕВ

Для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега де Фриза показаны существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи Коши в пространствах Соболева.

Хорошо известно, что задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега де Фриза

(1) $$u_t+u^2u_x+u_{xxx}=0,\quad u(x,0)=g(x),\quad t\geqq 0,\quad -\infty<x<\infty,$$

была решена в классе быстроубывающих гладких функций методом обратной задачи рассеяния (см., например, [1]).

В настоящей работе, используя метод „регуляризаций", (в [3] этот метод применен для решения задачи Коши для уравнения Кортевега де Фриза), показано существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи (1), когда начальные данные принадлежат пространствам Соболева.

1. Существование и единственность решения регуляризованной задачи.

(2) $$u_t+u^2u_x+u_{xxx}-\varepsilon^2u_{xxt}=0,$$
$$u(x,0)=g(x),\quad x\in R,\quad t\geqq 0,\quad 0<\varepsilon\leqq 1.$$

Сначала мы решим задачу (2) для фиксированного $0<\varepsilon\leqq 1$, а потом, устремляя ε к нулю, перейдем к задаче (1).

Введем некоторые обозначения:

1. $W^s=W^s(R)$ — пространства Соболева со стандартной нормой $\|f\|_s^2=\sum_{k=0}^s\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(k)}(x)|^2dx$.

2. $\tilde W_T^s=C(0,T;W^s)$ — состоит из функции $u:R\times[0,T]\to R$, которые принадлежат W^s при фиксированном $t\in[0,T]$, и отображение $u:[0,T]\to W^s$ является непрерывным и ограниченным. Норма в $\tilde W_T^s$ задается формулой $|||u|||_s=\sup_{0\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_s$.

3. $\tilde W_T^{s,k}=C^k(0,T;W^s)$ содержит такие u, что $\partial_t^ju\in\tilde W_T^s$ при $0\leq j\leq k$ и имеет норму

$$|||u|||_{s,k}=\sup_{0\leq t\leq T}\ \sup_{0\leq j\leq k}\|\partial_t^ju(\cdot,t)\|_s.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 51—66.

В следующей лемме сформулированы хорошо известные свойства пространств Соболева [6], которые нам понадобятся.

Лемма 1. *Пусть* $s \geqq 1$ *и* $k \geqq 0$. *Тогда*

(a) $f \in W^s \Rightarrow f, f', \ldots, f^{(s-1)}$ *являются ограниченными равномерно-непрерывными функциями, стремящимися к нулю при* $x \to \pm\infty$.

(b) $f, g \in W^s \Rightarrow f \cdot g \in W^s$.

(c) $u \in \tilde{W}^{s,k}_T \Rightarrow \partial^j_x \partial^l_t u$ *являются ограниченными непрерывными функциями на* $R \times [0, T]$ (*равномерно-непрерывными при* $T < \infty$), *стремящимися к нулю при* $x \to \pm\infty$ (*равномерно при* $T < \infty$), $0 \leqq j \leqq s-1$, $0 \leqq l \leqq k$.

(d) $u, v \in \tilde{W}^{s,k}_T \Rightarrow u \cdot v \in \tilde{W}^{s,k}_T$.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ в (2) сделаем замену

$$v(x, t) = \varepsilon u(\varepsilon(x-t), \varepsilon^3 t). \tag{3}$$

Тогда (2) трансформируется в задачу

$$\begin{gathered} v_t + v_x + v^2 v_x - v_{xxt} = 0, \\ v(x, 0) = h(x) = \varepsilon g(\varepsilon x), \quad x \in R, \quad t \geqq 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Если $h(x) \in W^s$, $s \geqq 2$, то рассматривая интегральное уравнение

$$\begin{gathered} v(x, t) = h(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\{v(\xi, \tau) + \frac{1}{3} v^3(\xi, \tau)\} d\xi d\tau, \\ h(x) = v(x, 0), \quad K(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot \exp[-|x|] \end{gathered} \tag{5}$$

и соответствующим образом модифицируя рассуждения, приведенные в [2] относительно уравнения $v_t + v_x + v v_x - v_{xxt} = 0$, получаем, что существует единственное решение v задачи (4), которое принадлежит $\tilde{W}^1_\infty$. Кроме того, применяя индукции и лемму 1, нетрудно вывести, что для каждого $0 < T < \infty$, $v \in \tilde{W}^s_T$. Дифференцируя (5) по времени, имеем $v_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)(v + \frac{1}{3} v^3) dy$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что свертка с K отображает непрерывно W^s на W^{s+1} и тем самым $\tilde{W}^s_T$ на $\tilde{W}^{s+1}_T$. Индуктивно, если допустим, что $\partial^j_t v \in \tilde{W}^{s+1}_T$, $1 \leqq j \leqq k$, то в силу леммы 1 $\partial^k_t(v + v^3/3) \in \tilde{W}^s_T$ и, следовательно, из представления $\partial^{k+1}_t v = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \partial^k_t (v + \frac{1}{3} v^3) dy$ вытекает, что $\partial^{k+1}_t v \in \tilde{W}^{s+1}_T$. Вернемся к регуляризованной задаче (2), обращая преобразование (3) для фиксированного $\varepsilon > 0$. Таким образом мы получили следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $g \in W^s$, $s \geqq 2$. *Тогда существует единственное решение* u *регуляризованной задачи* (2), *которое принадлежит* $\tilde{W}^s_T$ *для любого конечного* T. *Кроме того,* $\partial^l_t u \in \tilde{W}^{s-l}_T$, $0 \leqq l \leqq s$.

Следствие. *Пусть* $g \in C^\infty$ *и вместе со всеми производными принадлежит* L_2. *Тогда задача* (2) *имеет единственное решение* $u \in C^\infty$, *которое вместе со всеми производными принадлежит* $\tilde{W}_T$ *для любого конечного* T.

2. Априорные оценки решения регуляризованной задачи. Везде в этом параграфе мы будем предполагать, что $u(x, 0)=g(x)\in C^\infty$ и вместе со всеми своими производными принадлежит L_2. Множество таких функций мы будем обозначать через W^∞. В силу следствия леммы 2 решение $u(x,t)$ задачи (2) и все его пространственные и временные производные принадлежат $\tilde{W}_T$, $0<T<\infty$.

Лемма 3. *Пусть $g\in W^\infty$. Тогда для всех $t>0$, независимо от $0<\varepsilon\leq 1$, имеет место оценка*

$$\|u\|_1\leqq\alpha(\|g\|_1), \tag{6}$$

где $\alpha: R^+\to R^+$ является непрерывной, монотонно неубывающей функцией и $\alpha(0)=0$.

Доказательство. Умножим (2) на u и проинтегрируем по R, а потом по $[0,t]$. После интегрирования по частям, учитывая тот факт, что u и все ее производные стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}[u^2(x,t)+\varepsilon^2u_x^2(x,t)]dx=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)^2+\varepsilon^2g'(x)^2]dx\leqq\|g\|_1^2. \tag{7}$$

Умножая (2) на u_{xt}, интегрируя по R и по частям, получим

$$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}u^3u_{xxt}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}u_{xxt}dx. \tag{8}$$

Далее умножим (2) на u^3+3u_{xx}, проинтегрируем по R и по $[0,t]$, в силу (8) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[u_x^2-\frac{1}{6}u^4\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[g'(x)^2-\frac{1}{6}g(x)^4\right]dx. \tag{9}$$

Используя элементарное неравенство

$$\sup_{x\in R}|f(x)|\leqq(\|f\|\ \|f'\|)^{1/2}\leqq\|f\|_1,\quad f\in W^1, \tag{10}$$

из (7) и (9) вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}u^4dx+\int_{-\infty}^{\infty}\left[g'(x)^2-\frac{1}{6}g(x)^4\right]dx$$

$$\leqq\frac{1}{6}\|u\|_1\|g\|_1^3+\|g\|_1^2+\frac{1}{6}\|g\|_1^4,$$

$$\|u\|_1^2=\int_{-\infty}^{\infty}\{u^2+u_x^2\}dx\leqq\frac{1}{6}\|u\|_1\ \|g\|_1^3+2\|g\|_1^2+\frac{1}{6}\|g\|_1^4.$$

Решая это квадратное неравенство относительно $\|u\|_1$, получаем оценку (6).

Следствие.

$$\sup_{x\in R,\ t\geq 0}|u(x,t)|\leqq\|u\|_1\leqq\alpha(\|g\|_1). \tag{11}$$

Лемма 4. *Пусть $g\in W^\infty$, $0<T<\infty$. Тогда существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(T,\|g\|_3)$ такое, что при $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$, $t\in[0,T]$, имеет место оценка*

(12) $$\|u\|_2 \leq \alpha_1(\|g\|_3),$$

где $\alpha_1 : R^+ \to R^+$ *является непрерывной, монотонно-неубывающей функцией и* $\alpha_1(0)=0$.

Доказательство. Умножая (2) на выражение $G(u)=u^5+10uu_x+6u_{xxxx}+10u^2u_{xx}$ и интегрируя по R, после соответствующих интегрирований по частям получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[3u_{xx}^2-5u^2u_x^2+\frac{1}{6}u^6]dx=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}G(u)u_{xxt}dx.$$

Преобразуем это равенство в виде

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[3-5\varepsilon^2u^2)\,.\,u_{xx}^2-5u^2u_x^2+\frac{1}{6}u^6+\varepsilon^2(3u_{xxx}^2+\frac{5}{2}u_x^4]dx$$

$$=-5\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}(2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt})dx.$$

Теперь проинтегрируем по $[0,t]$, получится формула

(12) $$V(t)=V(0)-5\varepsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt})dxd\tau.$$

Следствие из леммы 3 утверждает, что $u(x,t)$ является ограниченной функцией для всех x и t, и, следовательно, существует достаточно малое $\varepsilon_1>0$, такое, что при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ имеем $1\leq 3-5\varepsilon^2u^2\leq 5$. Тогда в силу (12) в области $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx\leq\int_{-\infty}^{\infty}[(3-5\varepsilon^2u^2)u_{xx}^2+\frac{1}{6}u^6+\varepsilon^2(3u_{xxx}^2+\frac{5}{2}u_x^4)]dx$$

(13) $$\leq V(0)+5\int_{-\infty}^{\infty}u^2u_x^2dx+5\varepsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|\,2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt}\,|\,dxd\tau.$$

Оценим сверху первые два члена в правой части (13)

$$V(0)=\int_{-\infty}^{\infty}[(3-5\varepsilon^2g^2)g''^2-5g^2g'^2+\frac{1}{6}g^6+\varepsilon^2(3g'''^2+\frac{5}{2}g'^4)]dx$$

$$\leq 5\|g\|_2^2+5\|g\|_1^4+\frac{1}{6}\|g\|_1^6+\varepsilon_1^2(3\|g\|_3^2+\frac{5}{2}\|g\|_2^4),$$

$$5\int_{-\infty}^{\infty}u^2u_x^2dx\leq 5\|u\|_1^2\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx\leq 5\|u\|_1^4.$$

Подставляя эти оценки в (13) и используя оценку (6) из леммы 4, получим

(14) $$\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx\leq C+5\varepsilon^2\int_0^t(2\|u\|_\infty\|u_t\|_\infty\|u_{xx}\|^2$$

$$+\|u\|_\infty^4\|u_x\|\;\|u_{xt}\|+4\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\|u_{xx}\|\;\|u_{xt}\|)d\tau,$$

где $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$. Обозначим $A = A(t) = \|u\|_2$ и так как $\|u\|_1$ и $\|u\|_\infty$ ограничены (лемма 3), то мы можем не уменьшая общности переписать (14) в виде

$$A(t)^2 \leqq C + \varepsilon^2 C \int_0^t (\|u_t\|_\infty A(\tau)^2 + \|u_{xt}\| + \|u_x\|_\infty \|u_{xt}\| A(\tau))d\tau. \tag{15}$$

В (15) C обозначает константу, зависящую (монотонно не убывает и $C(0)=0$) только от $\|g\|_3$.

Продифференцируем по времени уравнение (2) и положим $v = u_t$. Получим $v_t + (vu^2)_x + v_{xxx} - \varepsilon^2 v_{xxt} = 0$. Умножая это уравнение на v и интегрируя по R и по частям, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (v^2 + \varepsilon^2 v_x^2) dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} u u_x v^2 dx.$$

Отсюда после интегрирования по $[0, t]$ вытекает

$$B^2 = B(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + \varepsilon^2 u_{xt}^2) dx = B(0)^2 - 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u u_x u_t^2 dx d\tau, \tag{16}$$

$$B(t)^2 \leqq B(0)^2 + 2 \int_0^t \|u\|_\infty \|u_x\|_\infty B(\tau)^2 d\tau.$$

Используя оценки

$$\|u_{xt}\| \leqq \varepsilon^{-1} B(t),$$

$$\|u_x\|_\infty \leqq (\|u_x\| \; \|u_{xx}\|)^{1/2} \leqq CA(t)^{1/2},$$

$$\|u_t\|_\infty^2 \leqq \|u_t\| \; \|u_{xt}\| = \varepsilon^{-1}[\|u_t\|(\varepsilon \|u_{xt}\|)] \leqq \varepsilon^{-1}[\|u_t\|^2 + \varepsilon^2 \|u_{xt}\|^2] = \varepsilon^{-1} B^2,$$

из (15) и (16) получаем следующую систему интегральных неравенств:

$$A(t)^2 \leqq C + \varepsilon^2 C \int_0^t [\varepsilon^{-1/2} B A^2 + \varepsilon^{-1} B + \varepsilon^{-1} B A^{3/2}] d\tau, \tag{17}$$

$$B(t)^2 \leqq B(0)^2 + C \int_0^t A^{1/2} B^2 d\tau.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеем оценку

$$B(t^2) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t (u^2 u_x + u_{xxx}) dx \leqq B(t) \|u\|_3 (\|u\|_1^2 + 1),$$

$$B(t) \leqq \|u\|_3 (\|u\|_1^2 + 1), \qquad B(0) \leqq \|g\|_3 (\|g\|_1^2 + 1).$$

Подставляя оценку для $B(0)$ в (17), получим

$$A(t)^2 \leqq C + \varepsilon^2 C \int_0^t [\varepsilon^{-1/2} B A^2 + \varepsilon^{-1} B + \varepsilon^{-1} B A^{3/2}] d\tau,$$

$$B(t)^2 \leqq C + C \int_0^t A^{1/2} B^2 d\tau,$$

Здесь C обозначает константу, зависящую (монотонно, $C(0)=0$) только от $\|g\|_3$. Положим $A^2+C=D(t)^2$. Тогда из последних неравенств вытекает

$$(18)\qquad D(t)^2\leq 2C+2\varepsilon(C+1)\int_0^t BD^2d\tau,\quad B(t)^2\leq C+C\int_0^t D^{1/2}B^2d\tau.$$

Запишем (18) в более удобной форме:

$$(19)\qquad D^2\leq\left(\frac{a}{1-\varepsilon}\right)^4+\varepsilon\frac{4c}{b}\int_0^t BD^2d\tau,\quad B^2\leq\left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^2+\frac{2c}{a}\int_0^t D^{1/2}B^2d\tau.$$

Константы a, b, c не зависят от $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1<1$. (Сначала мы выбираем a и b достаточно большими, а потом выбираем c достаточно большим). Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что a, b и c монотонно не убывают от $\|g\|_3$, $a(0)=b(0)=0$, $D(0)=(\|g\|_2^2+c)^{1/2}<a^2$ и $B(0)<b$. В силу последних двух неравенств нетрудно вывести, что для любого $0\leq t<\infty$

$$(20)\qquad D(t)<\bar{D}(t),\quad B(t)<\bar{B}(t),$$

где $\bar{D}(t)$ и $\bar{B}(t)$ являются решениями системы

$$(21)\qquad \bar{D}(t)^2=\left(\frac{a}{1-\varepsilon}\right)^4+\varepsilon\frac{4c}{b}\int_0^t\bar{B}\bar{D}^2d\tau,\quad \bar{B}(t)=\left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^2+\frac{2c}{a}\int_0^t\bar{D}^{1/2}\bar{B}^2d\tau.$$

Решая (21), получим, что

$$(22)\qquad \bar{D}(t)=\left(\frac{a}{1-\varepsilon\exp[ct]}\right)^2,\quad \bar{B}(t)=\frac{b\exp[ct]}{1-\varepsilon\exp[ct]}.$$

Выберем $\varepsilon_2>0$ такое, чтобы $1-\varepsilon\exp[cT]\geq 1/2$, $\varepsilon\leq\varepsilon_2$ и пусть $\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\varepsilon_0=\varepsilon_0(T,\|g\|_3)$ (константа c зависит только от $\|g\|_3$). Тогда при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ из (20) и (22) видно, что D и B ограничены на $[0,T]$ гранью, зависящей только от T и $\|g\|_3$. Отсюда, используя что $a(0)=0$, получаем оценку (12). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $g\in W^\infty$, $0<T<\infty$. Выберем $\varepsilon_0>0$ в соответствии с леммой 4. Тогда при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ решение $u(x,t)$ ограничено в $\tilde{W}_t^m$, $m\geq 3$, гранью, зависящей только от T, ε_0, $\|g\|_m$ и $\varepsilon\|g\|_{m+1}$.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Допустим, что u ограничено в $\tilde{W}_T^{m-1}$, $m>2$ гранью, зависящей только от T, ε_0 и $\|g\|_m$. В случае, когда $m=2$, это выполняется (лемма 4). Мы покажем, что из этого предположения следует, что u ограничено в $\tilde{W}_T^m$ гранью, зависящей от T, ε_0, $\|g\|_m$ и $\varepsilon\|g\|_{m+1}$.

Умножая уравнение (2) на $u_{(2m)}=\partial_x^{2m}u$ и интегрируя по R, получаем

$$(23)\qquad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[u_{(m)}^2+\varepsilon^2u_{(m+1)}^2]dx=-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(u^3)_{(m+1)}u_{(m)}dx.$$

В силу индуктивного предположения

$$(24)\qquad \|u_{(r)}\|\leq C,\quad r\leq m-1;\quad \|u_{(r)}\|_\infty\leq C,\quad r\leq m-2.$$

Применяя формулу Лейбница, получим

(25) $$\| u^2_{(r)} \|_\infty \leq \sum_{j=0}^{r} a_j \| u_{(r)} \|_\infty \ \| u_{(r-j)} \|_\infty \leq C, \qquad r \leq m-2.$$

Теперь применим формулу Лейбница к $(u^3)_{(m+1)} = 3(u^2 u_{(1)})_{(m)}$:

$$-\frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (u^3)_{(m+1)} u_{(m)} dx = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{(m+1)} u_{(m)} dx$$

$$+ c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(1)} u^2_{(m)} dx + c_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{m-1} u_{(2)} u_{(m)} dx$$

$$+ c_m \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m)} u_{(1)} u_{(m)} dx + \sum_{r=2}^{m-2} c_r \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(r)} u_{(m+1-r)} u_{(m)} dx.$$

Используя еще раз формулу Лейбница (24) и (25), нетрудно получить оценки:

(26) $$c_0 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{(m+1)} u_{(m)} dx + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(1)} u^2_{(m)} dx \leq C \| u_{(m)} \|^2,$$

27) $$c_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m-1)} u_2 u_{(m)} dx + c_m \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m)} u_{(1)} u_{(m)} dx \leq C(\| u_{(m)} \|^2 + \| u_{(m)} \|),$$

(28) $$\sum_{r=2}^{m-2} c_r \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(r)} u_{(m+1-r)} u_{(m)} dx \leq \sum_{r=2}^{m-2} c_r \| (u^2)_{(r)} \|_\infty \ \| u_{m+1-r} \|$$

$$\cdot \| u_{(m)} \| \leq C(\| u_{(m)} \|^2 + \| u_{(m)} \|).$$

Оценивая правую часть (23), используя при этом (26), (27) и (28), получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [u^2_{(m)} + \varepsilon^2 u^2_{(m+1)}] dx \leq C\{ \int_{-\infty}^{\infty} u^2_{(m)} dx + (\int_{-\infty}^{\infty} u^2_{(m)} dx)^{1/2}\}.$$

Отсюда

(29) $$\frac{dE_m}{dt} \leq C E_m^{1/2} (E_m^{1/2} + 1),$$

где $E_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u^2_{(m)} + \varepsilon^2 u^2_{(m+1)}] dx$. Интегрируя (29), имеем

$$\| u_{(m)} \| \leq E_m^{1/2}(t) \leq E_m^{1/2}(0) \exp [Ct] + \exp [Ct] - 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда из того, что $E_m^{1/2}(0) \leq \| g \|_m + \varepsilon \| g \|_{m+1}$ и константа C зависит только от $\| g \|_m$, вытекает, что $\| u_{(m)} \|$ ограничено на $[0, T]$. Следовательно, u ограничено в $\widetilde{W}^m_T$. Лемма доказана.

Запишем (2) в виде $(1 - \varepsilon^2 \partial_x^2) u_t = -u^2 u_x - u_{xxx}$. Обращая оператор $1 - \varepsilon^2 \partial_x^2$, получим $u_t = -K_\varepsilon * (u^2 u_x + u_{xxx})$, где $\widehat{K}_\varepsilon(k) = (1 + \varepsilon^2 k^2)^{-1}$ ($\widehat{f}$ — преобразование Фурие функции $f(x)$. Отсюда, используя лемму 5 и индукцию, нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие. *Решение* $u(x, t)$ *ограничено в* $\tilde{W}_T^{k,l}$ *независимо от* $0<\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ *для всех* k, l *и* T.

3. Сходимость решения регуляризованной задачи при $\varepsilon \searrow 0$. Пусть $g(x) \in W^s$, $s \geqq 3$. С помощью свертки с соответственно подобранной гладкой функцией регуляризуем g. Получаем гладкую функцию g_ε [3]. Далее решаем задачу (2) с $u_\varepsilon(x, 0)=g_\varepsilon(x)$ и показываем, что при $\varepsilon \searrow 0$ решения $u_\varepsilon(x, t)$ строго сходятся в соответствующих функциональных пространствах к решению $u(x, t)$ задачи (1) и $u(x, 0)=g(x)$.

Определим регуляризацию g_ε на g (в дальнейшем $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурие функции f) $\hat{g}_\varepsilon(k)=\varphi(\varepsilon^{1/6}k)$, $\hat{g}(k)$, где φ — четная C^∞ функция, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(0)=1$, причем функция $\psi(k)=1-\varphi(k)$ имеет в нуле нуль бесконечного порядка и, кроме того, φ стремится экспоненциально к нулю при $k \to \pm\infty$. Например, мы можем положить $\varphi(k)=\exp[-r(k)]$, $r(k)=k^2\exp[-1/k^2]$. Из свойства функции φ следует, что $g_\varepsilon(x) \in W^\infty$. Тогда в силу утверждения леммы 2 задача

$$(30) \qquad u_t+u^2u_x+u_{xxx}-\varepsilon^2 u_{xxt}=0, \quad u(x, 0)=g_\varepsilon, \quad t \geqq 0, \quad x \in R, \quad 0<\varepsilon \leqq 1$$

имеет единственное решение $u_\varepsilon(x, t)=u(x, t, \varepsilon)$, которое вместе со всеми своими производными принадлежит $\tilde{W}_T$ для всех $T>0$.

Используя равенства Парсеваля, нетрудно вывести (см. [3]) следующие утверждения.

Лемма 6. *Пусть* $g(x) \in W^s$, $s \geqq 3$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$(a) \qquad \varepsilon^{(1/6)j}\|g_\varepsilon\|_{s+j} \leqq C\|g\|_s \Rightarrow \|g_\varepsilon\|_{s+j}=O(\varepsilon^{-(1/6)j}), \quad j=1, 2, \ldots,$$

$$(в) \qquad \|g-g_\varepsilon\|_{s-j}=0(\varepsilon^{(1/6)j}), \quad j=1, 2, \ldots, s,$$

$$(c) \qquad \|g-g_\varepsilon\|_s=o(1).$$

Оценки (в) и (с) выполняются равномерно на сходящиеся последовательности в W^s. Оценка (а) выполняется равномерно на ограниченные подмножества в W^s. Оценка (в) тоже будет выполняться равномерно на ограниченные подмножества в W^s, если заменить в (в) o с O. Из леммы 5 и 6 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $g(x) \in W^s$, $s \geqq 3$. *Тогда* u_ε *ограничено в* $\tilde{W}_T^s$, $0<T<\infty$, *независимо для достаточно маленьких* ε. *Кроме того,* $\varepsilon^{m/6}u_\varepsilon$ *ограничено в* $\tilde{W}_T^{s+m}$, $m \geqq 1$, *независимо для достаточно малых* ε.

Следствие 2. $\partial_t u_\varepsilon$ *ограничено в* $\tilde{W}_T^{s-3}$, $\varepsilon^{m/6}\partial_x^{s+m-3}$, $\partial_t u_\varepsilon$, $m=1, 2, 3, 4$ *и* $\varepsilon^{7/6}\partial_x^{s+2}\partial_x u_\varepsilon$ *ограничены в* $\tilde{W}_T$, $0<T<\infty$, *независимо для достаточно малых* ε.

Доказательство. Используя индукцию и формулу Лейбница, можно показать, что

$$(31) \qquad f, g \in W^k \Rightarrow \|fg\|_k \leqq 2^k\|f\|_k\,\|g\|_k, \quad k \geqq 1.$$

Обращая оператор $(1-\varepsilon^2\partial_x^2)$ в (30), получим $\partial_t u_\varepsilon=-K_\varepsilon*(u_\varepsilon^2\partial_x u_\varepsilon+\partial_x^3 u_\varepsilon)$. Отсюда, применяя равенство Парсеваля и используя формулу (31), получим

$$\| \partial_t u_\varepsilon \|_{s-3} \leqq 2^{2(s-3)} \| u_\varepsilon \|_s^2 + \| u_\varepsilon \|_s,$$

$$\varepsilon^{m/6} \| \partial_t u_\varepsilon \|_{s+m-3} \leqq \varepsilon^{m/6}(2^{2(s+m-3)} \| u_\varepsilon \|_{s+m-3}^2 \| u_\varepsilon \|_{s+m-2} + \| u_\varepsilon \|_{s+m}),$$

$$\varepsilon^{7/6} \| \partial_t u_\varepsilon \|_{s+2} \leqq \varepsilon^{7/6}(2^{2(s+2)} \| u_\varepsilon \|_{s+2}^2 \| u_\varepsilon \|_{s+3} + \| u_\varepsilon \|_{s+2}).$$

В силу следствия 1 из этих неравенств вытекают утверждения следствия 2.

Лемма 7. *Пусть* $g(x) \in W^s$, $s \geqq 1$. *Тогда* $\{u_\varepsilon\}$ *является о. п. (обобщенной последовательностью) Коши в* $\tilde{W}_T^s$ *при* $\varepsilon \searrow 0$.

Доказательство. Положим $u = u_\varepsilon$ и $v = u_\delta$, где $\delta \leqq \varepsilon$. Достаточно показать, что выбирая достаточно малое ε, можно сделать $\| u - v \|_s$ сколь угодно малым равномерно по $t \in [0, T]$. Очевидно $w = u - v$ удовлетворяет уравнение

$$w_t + [\frac{1}{3} w^3 + v^2 w - u w^2]_x + w_{xxx} - \delta^2 w_{xxt} = (\varepsilon^2 - \delta^2) u_{xxt}, \tag{32}$$

$$w(x, 0) = g_\varepsilon(x) - g_\delta(x) = h(x).$$

Умножая уравнение (32) на $w_{(2j)} = \partial_x^{2j} w$, $j \leqq s$, интегрируя по R, а потом по $[0, t]$ и используя интегрирование по частям, получим

$$V_j(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{(j)}^2 + \delta^2 w_{(j+1)}^2] dx = \int_{-\infty}^{\infty} [h_{(j)}^2 + \delta^2 h_{(j+1)}^2] dx \tag{33}$$

$$-2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(\frac{1}{3} w^3 + u^2 w - u w^2)_{(j+1)} - (\varepsilon^2 - \delta^2) u_{t,\,(j+2)}] w_{(j)} dx d\tau.$$

Сначала мы докажем лемму в случае $s = 3$. При $j = 0$ (33) принимает вид

$$V_0(t)^2 = V_0(0)^2 - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \{w^2 [2uu_x - (uw)_x] + 2(\varepsilon^2 - \delta^2) u_{xxt} w\} dx d\tau.$$

Для достаточно малых ε в силу следствий 1 и $2 \,|\, 2uu_x - (uw)_x \,|$ и $\varepsilon^{1/3} \| u_{xxt} \|$ ограничены на $[0, T]$ гранью, зависящей только от T и $\| g \|_3$. Следовательно,

$$V_0(t)^2 \leqq V_0(0)^2 + 2C \int_0^t [V_0(\tau)^2 + \varepsilon^{5/3} V_0(\tau)] d\tau.$$

Интегрируя это неравенство, получаем $\| w \| \leqq V_0(t) \leqq V_0(0) \exp[CT] + \varepsilon^{5/3}(\exp[CT] - 1)$, $t \in [0, T]$ и, так как $V_0(0) \leqq \| g_\delta - g \|_1 + \| g_\varepsilon - g \|_1 \leqq C\varepsilon^{1/3}$ (лемма 6 (в)), получаем

$$\| w \| \leqq C\varepsilon^{1/2}. \tag{34}$$

Из оценки (34) вытекает, что $\{u_\varepsilon\}$ являетcя о. п. Коши в $\tilde{W}_T$. Интегрируя по частям в (33) в случае $j = 1$ и используя, что в силу следствия 1 и 2 для достаточно малых ε

$$| ww_x + 3uu_x - 3wu_x - uw_x |, \quad | 2u_x^2 + 2u_{xx} - wu_{xx} | \quad \text{и} \quad \varepsilon^{1/2} \| u_{xxxt} \|$$

ограничены, и оценку (34), получим интегральное неравенство для $V_1(\tau)$. После интегрирования этого неравенства получим

$$\| w_x \| \leqq V_1(t) \leqq V_1(0) \exp[CT] + \varepsilon^{1/2}(\exp[CT] - 1). \tag{35}$$

Опять используя лемму 6, имеем $V_1(0) \leqq C\varepsilon^{1/3}$, что вместе с (34) и (35) дает оценку

$$\| w \|_1 \leqq C\varepsilon^{1/3}. \tag{36}$$

Далее, при $j=2$

$$V_2(t)^2 = V_2(0)^2 - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(\frac{1}{3} w^3 + u^2 w - uw^2)_{xxx} - (\varepsilon^2 - \delta^2) u_{xxxt} w_{xx}]\, dx\, d\tau. \tag{37}$$

Из следствия 2 вытекает, что для достаточно малых ε имеем $\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - \delta^2) u_{xxxxt} w_{xx} dx \leqq C\varepsilon^{4/3} \| w_{xx} \|$. Дифференцируя и объединяя одинаковые члены в первой части подынтегральной функции в (37), получим

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \{ w_{xx}^2 [(u-w)^2]_x - w_{xx}[6u_x u_{xx} w + 6u_x^2 w_x + 2uu_{xxx} w$$

$$+ 6uu_{xx} w_x - u_{xxx} w^2 - 6u_{xx} w w_x - 6u_x w_x^2]\}\, dx\, d\tau.$$

Оценивая этот интеграл при помощи оценок: $|[(u-w)^2]_x| \leqq C$, $|u| \leqq C$, $|u_x| \leqq C$, $|u_{xx}| \leqq C$, $\| u_{xxx} \| \leqq C$, $\| w_x \| \leqq C\varepsilon^{1/3}$ и $|w| \leqq C\varepsilon^{1/3}$, получаем аналогично тому, что делалось раньше $\| w_{xx} \| \leqq V_2(t) \leqq V_2(0) \exp[CT] + \varepsilon^{1/3}(\exp[CT] - 1)$ и так как $V_2(0) \leqq C\varepsilon^{1/6}$ (лемма 6), получаем, что

$$\| w_{xxx} \| \leqq C\varepsilon^{1/6}. \tag{38}$$

Отметим, что в случае $s>3$, $V_2(0) \leqq C\varepsilon^{1/3}$ и, следовательно, $\| w_{xx} \| \leqq C\varepsilon^{1/3}$. Далее при $j=3$

$$V_3(t)^2 = V_3(0)^2 - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [(\frac{1}{3} w^3 + u^2 w - uw^2)_{xxxx} w_{xxx} \tag{39}$$

$$- (\varepsilon^2 - \delta^2) u_{xxxxxt} \cdot w_{xxx}]\, dx\, d\tau.$$

Из следствий 1 и 2, (34), (36) и (38) получаем оценки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon^2 - \delta^2) u_{xxxxxt} w_{xx} dx \leqq C\varepsilon^{5/6} \| w_{xxx} \|,$$

$$|[(u-w)^2]_x| \leqq C, \quad |u| \leqq C, \quad |u_x| \leqq C, \quad |u_{xx}| \leqq C, \quad \| u_{xxx} \| \leqq C,$$

$\| u_{xxxx} \| \leqq C\varepsilon^{-1/6}$, $|w| \leqq C\varepsilon^{1/3}$, $|w_x| \leqq C\varepsilon^{1/6}$, $\| w_{xx} \| \leqq C\varepsilon^{1/6}$, $w_{xx}^3 \leqq \| w_{xx} \| \, \| w_{xxx} \|$. Оценивая при помощи этих оценок интеграл в (39), получаем, как раньше,

$$\| w_{xxx} \| \leqq V_3(t) \leqq V_3(0) \exp[CT] + \varepsilon^{1/6}(\exp[CT] - 1).$$

С другой стороны, опять применяя лемму 6 и неравенство треугольника, имеем

$$V_3(0) \leqq \| h \|_3 + \delta \| h \|_4 \leqq \| g - g_\varepsilon \|_3 + \| g - g_\delta \|_3 + \delta \| g_\delta \|_4 + \varepsilon \| g_\varepsilon \|_4$$

$$\leqq \| g - g_\varepsilon \|_3 + \| g - g_\delta \|_3 + C\varepsilon^{5/6}.$$

Отсюда видно, что $V_3(0) \to 0$ при $\varepsilon \searrow 0$ а, следовательно, и $\| w_{xxx} \| \to 0$ при $\varepsilon \searrow 0$. Это вместе с (38), (36) и (34) показывает, что $\{u_\varepsilon\}$ является о. п. Коши в $\tilde{W}_T^s$ в случае $s=3$.

Утверждение леммы в случае $s>3$ будем доказывать по индукции. Мы доказали, что $\| w\|^2 \leqq C\varepsilon^{1/3}$. Допустим, что при $j<s-1$, $\| w\|_{j-1}\leqq C\varepsilon^{1/3}$ при $\varepsilon\searrow 0$. Из этого предположения следует, что при $0\leqq k\leqq j-2$, $| w_{(k)}|\leqq C\varepsilon^{1/3}$ на $R\times[0, T]$. В силу следствия 1 $\| u\|_s\leqq C$ и $\| v\|_s\leqq C$ и, следовательно, при $0\leqq k\leqq s-1$, $\| u_{(k)}|\leqq C$ и $| w_{(k)}|\leqq C$ на $R\times[0, T]$, кроме того, $\varepsilon^{1/2}\| u_t\|_s\leqq C$ (следствие 2).

Используя формулу Лейбница и интегрируя по частям, интеграл из (33), можно привести к виду

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \{w_{(j)}^2\left(\frac{2j+1}{2}\right)[(u-w)^2]+(\cdot)w_{(j)}\}dxd\tau.$$

Аналогично тому, что делалось раньше, это выражение можно оценить, используя индуктивное предположение. Окончательно получится оценка $\| w_{(j)}\|\leqq V_j(t)\leqq V_j(0)\exp[CT]+\varepsilon^{1/3}(\exp[CT]-1)$, а отсюда, так как $V_j(0)\leqq C\varepsilon^{1/3}$, получим $\| w\|_j\leqq C\varepsilon^{1/3}\Rightarrow\| w\|_{s-2}\leqq C\varepsilon^{1/3}$. Делая аналогичные вычисления при $j=s-1$, получим, что $\| w\|_{s-1}\leqq C\varepsilon^{1/6}$, а при $j=s$, используя, что $\varepsilon^{1/6}\| u\|_{s+1}$, $\varepsilon^{1/3}\| u\|_{s+2}$ и $\varepsilon^{7/6}\| u_{t,(s+2)}\|$ ограничены, получим

$$\| w_s\|\leqq(\| g-g_\varepsilon\|_s+\| g-g_\delta\|_s+C\varepsilon^{1/3})\exp[CT]+\varepsilon^{1/6}(\exp[CT]-1)$$

и, следовательно, $\| w_{(s)}\|\to 0$ при $\varepsilon\searrow 0$. Лемма доказана.

Следствие. *$\{u_t(x, t, \varepsilon)\}$ является о. п. Коши в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\varepsilon\searrow 0$.*

Доказательство.

$$w_t=-\left[\frac{1}{3}w^3+u^2w-uw^2\right]_x-w_{xxx}+\delta^2 w_{xxt}+(\varepsilon^2-\delta^2)u_{xxt}.$$

Первые два члена стремятся к нулю в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\varepsilon\searrow 0$ в силу доказанной леммы, а сходимость последних двух членов к нулю в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\varepsilon\searrow 0$ вытекает из следствия 2.

Теорема 1. *Пусть $g\in W^s$, где $s\geqq 3$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ уравнения (1), принадлежащее $\tilde{W}_T^s$, $0<T<\infty$, и $u(x, 0)=g(x)$.*

Доказательство. Единственность вытекает сразу из следующих стандартных вычислений. Допустим, что существуют два решения u и v и пусть $w=u-v$. Тогда

$$w_t+\frac{1}{3}[w(u^2+uv+v^2)]_x+w_{xxx}=0, \qquad w(x, 0)=0. \tag{40}$$

Умножая (40) на w и интегрируя по R, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2dx=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+uv+v^2)ww_xdx\leqq C\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t)dx.$$

Отсюда получаем, что $\int_{-\infty}^{\infty}w^2(x, t)dx=0$ для всех $t\geqq 0$ и из непрерывности w вытекает, что $w\equiv 0$.

Существование решения нетрудно доказать в свете предыдущих рассмотрений. Пусть g_ε обозначает регуляризацию функции g, а $u_\varepsilon(x, t)$ — соответствующее решение регуляризованной задачи (30). В силу утверждения леммы 7 и ее следствия при $\varepsilon\searrow 0$, $u_\varepsilon \to u$ в $\tilde{W}^s_T$ и $\partial_t u_\varepsilon \to v$ в $\tilde{W}^{s-3}_T$. Отсюда вытекает, что $\partial_x(u^3_\varepsilon) \to \partial_x(u^3)$ в $\tilde{W}^{s-1}_T$ и $\partial_{xxx}u_\varepsilon \to \partial_{xxx}u$ в $\tilde{W}^{s-3}_T$. Из следствия 2 леммы 6 вытекает, что $\varepsilon^2\partial^2_x\partial_t u_\varepsilon \to 0$ в $\tilde{W}_T \Rightarrow \varepsilon^2\partial^2_x\partial_t u_\varepsilon \to 0$ в смысле распределений. Так как $u_\varepsilon \to u$ в $\tilde{W}^S_T$, то $u_\varepsilon \to u$ в смысле распределений и, следовательно, $\partial_t u_\varepsilon \to \partial_t u$ и в смысле распределений, и $v=u_t$. Таким образом, делая предельный переход в (30), получаем, что в смысле распределений $u_t+u^2u_x+u_{xxx}=0$, $u(x, 0]=g(x)$. Отсюда, так как $u \in \tilde{W}^s_T$ и $u_t \in \tilde{W}^{s-3}_T$, ясно, что $u(x, t)$ является L_2-решением задачи (1), если $s=3$, и классическим решением в случае $s>3$ (Термин L_2-решения означает, что все члены в уравнении (1) являются L_2-функциями от x и уравнение (1) удовлетворяется для каждого t почти всюду по x)

Пусть $u_N(x, t)$ обозначает решение (1) на $R\times[0, N]$, где $N=1, 2, \ldots$. Определим на $R\times[0, \infty)$ функцию $u(x, t)=u_N(x, t)$ при $t\leq N$. В силу единственности функция $u(x, t)$ корректно определена и представляет глобальное решение (1), которое принадлежит $\tilde{W}^s_T$ для любого конечного T. Теорема доказана.

Известно [4], что для модифицированного уравнения Кортевега де Фриза существует бесконечная последовательность законов сохранения, которую можно записать в форме

$$I_k(u)=\int_{-\infty}^{\infty} P_k dx, \quad P_k=u^2_{(k)}-c_k u^2 u^2_{(k-1)}+Q_k(u_1, \ldots, u_{(k-2)}),$$

где $k=0, 1, \ldots$; Q_k имеет ранг $k+1$. Согласно определению Миуры и др. [5], полиномиальный ранг для уравнения (1) определяется следующим образом: ранг слагаемого

$$u^{a_0}_{(0)}u^{a_1}_{(1)} \ldots u^{a_p}_{(p)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p}(1+i)a_i$$

и ранг полинома является максимумом рангов своих слагаемых.

Теорема 2. *Пусть $g\in W^s$, $s\geq 3$, и пусть $u(x, t)$ является соответствующим решением* (1) *на $R\times[0, \infty)$. Тогда $I_k(u)$, $k=1, 2, \ldots, s$ существуют и не зависят от времени.*

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ является решением регуляризованной задачи (30). Для краткости вместо u_ε будем писать u.

$$\frac{dI_k}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\ P_k)u_t dx.$$

Здесь подставим $u_t=-u^2u_x-u_{xxx}+\varepsilon^2 u_{xxt}$.

$$\frac{dI_k}{dt}=-\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\, P_k)(u^2u_x+u_{xxx})dx+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\, P_k)u_{xxt}dx. \tag{41}$$

Однако по определению I_k произведение $-(\mathrm{grad}\, P_k)(u^2u_x+u_{xxx})$ является полным дифференциалом, и так как $u\in W^\infty$ для каждого фиксированного t, получаем $-\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\, P_k)(u^2u_x+u_{xxx})dx=0$. Тогда из (41) вытекает, что

$$\frac{dI_k}{dt}=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}}u_{t,(j+2)}+2u_{(k)}u_{t,(k+2)}$$
$$-2c_k u u_{xxt}u^2_{(k-1)}-2c_k u^2 u_{t,(k+1)}u_{(k-1)}\Big\}dx. \tag{42}$$

Интегрируя (42) по частям, а потом по $[0, t]$, нетрудно получить равенство

$$J_k(u)=J_k(g_\varepsilon)+\varepsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}}u_{t,(j+2)}$$
$$+2c_k[2uu_x u_{(k+1)}u_{t,(k)}-uu_{xxt}u^2_{(k-1)}-2uu_t u^2_{(k)}]\Big\}dxd\tau, \tag{43}$$

где

$$J_k(u)=\int_{-\infty}^{\infty}[(1-2\varepsilon^2c_k u^2)u^2_{(k)}+\varepsilon^2u^2_{(k+1)}-c_k u^2u^2_{(k-1)}+Q_k]dx. \tag{44}$$

В силу леммы 6 $J_k(g_\varepsilon)\to I_k(g)$ при $\varepsilon\searrow 0$, $k=1,\ldots,s$. Кроме того, из следствия (1) леммы 6 вытекает, что $J_k(u_\varepsilon)\to I_k(u)$ при $\varepsilon\searrow 0$, $k=1, 2, \ldots, s$, где u — решение уравнения 1, существующее в силу теоремы 1. В конце, используя следствия 1 и 2 леммы 6, имеем, что интеграл в правой части формулы (43) стремится к нулю при $\varepsilon\searrow 0$. Таким образом, переходя к пределу в (43) при $\varepsilon\searrow 0$, получаем, что $I_k(u)=I_k(g)$, $k=1, 2,\ldots, s$, для каждого t.

Следствие. *Пусть $g\in W^s$, $s\geqq 3$, и пусть $u(x, t)$ является соответствующим решением* (1) *на* $R\times[0,\infty)$. *Тогда* $\|u\|_k$, $k=1,\ldots,s$, *равномерно ограничены по* $t\in[0,\infty)$.

Доказательство. $I_0(u)=\|u\|^2$ не зависит от времени. При $k=1$, $\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx=c_1+\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}u^4dx\leqq C(1+\|u_x\|)$. Из этого квадратного неравенства вытекает, что $\|u_x\|$ ограничены равномерно по t.

Допустим по индукции, что $\|u\|_{k-1}$ ограничена равномерно по t. Из этого предположения в силу леммы 1 следует, что $|u|,\ldots,|u_{(k-2)}|$ ограничены на $R\times[0,\infty)$, кроме того, из теоремы 2 вытекает, что $I_k(u)\equiv C$, $k=1,\ldots, s$, для всех $t\geqq 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2_{(k)}dx=C+c_k\int_{-\infty}^{\infty}u^2u^2_{(k-1)}dx-\int_{-\infty}^{\infty}Q_k(u,\ldots,u_{(k-2)})dx. \tag{45}$$

Оценивая (45), в силу индуктивного предположения, получим, что $\|u_{(k)}\|$ ограничена равномерно по t.

Объединяя теорему 1 и следствие теоремы 2 и дифференцируя $l-1$ раз ($s-3l\geqq 0$) по t уравнение $u_t=u^2u_x+u_{xxx}$ получаем основной результат настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть $g\in W^s$, $s\geqq 3$. Тогда существует единственное глобальное решение $u(x,t)$ задачи Коши* (1), *которое принадлежит пространству* $\tilde W^s_\infty$. *Кроме того, если $s-3l\geqq 0$, то $\partial_t^l u$ принадлежит $\tilde W^{s-3l}_\infty$.*

4. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Пусть $g(x)\in W^s$, $s\geqq 3$. Тогда в силу теоремы 3 $U(g)=u(x,t)$ отображает W^s в пространство

$$X_{s,\infty}=\{u\in\tilde W^s_\infty:\partial_t^l u\in\tilde W^{s-3l}_\infty,\quad s-3l\geqq 0\}.$$

Простой пример показывает, что U не является непрерывным. Действительно, уравнение (1) имеет решение вида уединенной волны $u_c(x,t) = \Phi_c(x-c^2t) = c\sqrt{6}\,\mathrm{sech}\,[c(x-c^2t)]$. Простые оценки показывают, чта $\Phi_c \to \Phi_d$ в W^s при $c \to d$ в R.

А, с другой стороны, нетрудно просчитать, что $\lim_{t\to\infty} \| u_c - u_d \|^2 = \| \Phi_c \|^2 + \| \Phi_d \|^2$. Следовательно, u_c не стремится к u_d в L_2 (а значит и в W^s) равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Однако, если рассматривать конечный интервал времени, имеют место следующая

Теорема 4. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и пусть* $u(x, t) = Ug : W^k \to X_{s,T}$, $g \in W^s$, $s \geq 3$, u — *сужение на* $[0, T]$ *единственного глобального решения и уравнения* (1). *Тогда* U *является непрерывным.*

Доказательство. Отметим, что для этого достаточно доказать что $U : W^s \to \tilde{W}^s_T$ является непрерывным. Используя индукцию и уравнение, (1), будет следовать, что $U : W^s \to X_{s,T}$ тоже является непрерывным.

Пусть $g_n \to g$ в W^s, $s \geq 3$. Необходимо показать, что $u^n = U(g_n) \to u = U(g)$ в $\tilde{W}^s_T$ или, другими словами, $\| u^n - u \|_s \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

(46) Имеем $$\| u^n - u \|_s \leq \| u^n - u^n_\varepsilon \|_s + \| u^n_\varepsilon - u_\varepsilon \|_s + \| u_\varepsilon - u \|_s.$$

Здесь u_ε и u^n_ε — решения регуляризованной задачи (2) с гладкими g_ε и $g_{n\varepsilon}$ Припоминая доказательство леммы 7, имеем оценку при $\delta \leq \varepsilon$.

$$\| u_\delta - u_\varepsilon \|_s \leq C\varepsilon^{1/6} + C(\| g - g_\varepsilon \|_s + \| g - g_\delta \|_s).$$

Устремляя $\delta \to 0$ в этом неравенстве, получаем, что для $t \in [0, T]$

$$\| u - u_\varepsilon \|_s \leq C(\varepsilon^{1/6} + \| g - g_\varepsilon \|_s, \quad \| u^n - u^n_\varepsilon \|_s \leq C(\varepsilon^{1/6} + \| g_n - g_{n\varepsilon} \|_s). \tag{47}$$

В доказательстве леммы 7 константы C зависели только от T и $\| g \|_s$ а так как $\| g_n \|_s \leq M(g_n \to g$ в $W^s)$, в (47) можно писать константу C, не зависящую от n. В силу леммы 6 $\| g - g_\varepsilon \|_s$ и $\| g_n - g_{n\varepsilon} \|_s$, $n = 1, 2, \ldots$, стремятся равномерно к нулю при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда оценки (47) показывают, что $\| u^n - u^n_\varepsilon \| \to 0$, $\| u - u_\varepsilon \|_s \to 0$ при $\varepsilon \searrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$ и по $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, из (46) видно, что для того, чтобы получить утверждение теоремы, достаточно доказать, что $\| u^n_\varepsilon - u_\varepsilon \|_s \to 0$ при $n \to \infty$ для фиксированного ε равномерно по $t \in [0, T]$.

Доказательство этого факта подобно доказательству леммы 7. Применяя трансформацию (3), сведем регуляризованную задачу (30) к задаче

$$v_t + v_x + v^2 v_x - v_{xxt} = 0, \qquad v(x, 0) = h(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x). \tag{48}$$

Пусть v^n и v являются решениями (48) соответственно для $h_n(x) = \varepsilon g_{n\varepsilon}(x)$ и $h(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x)$. Тогда, если мы докажем, что $v^n \to v$ в $\tilde{W}^s_R$ для произвольного конечного R, то обращая (3) (ε — фиксированное), получим, что $u^n_\varepsilon \to u_\varepsilon$ в $\tilde{W}^s_T$.

В силу леммы 6 $g_{n\varepsilon} \to g_\varepsilon$ в W^k для всех $k \geq 0$ (при $k > s$ сходимость зависит от ε). Следовательно, h_n, $h \in W^\infty$ и $h_n \to h$ в W^k для всех $k \geq 0$. По доказанному v^n, $v \in \tilde{W}^{\infty,\infty}_R$ для всех $0 < R < \infty$. Умножим уравнение $v^n_t + v^n_x + (v^n)^2 v^n_x - v^n_{xxt} = 0$ на $v^n_{(2j)}$ и проинтегрируем по частям, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[(v^n_{(j)})^2+(v^n_{(j+1)})^2]dx=-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}[(v^n)^3]_{(j+1)}(v^n)_{(j)}dx.$$

Отсюда, используя индукцию и правило Лейбница, аналогично тому, что делалось раньше, можно показать $\|v^n\|_k\leq C_n$, $t\in[0,R]$, где C_n зависят только от $\|h_n\|_k$ и R. Учитывая, что $h_n\to h$ в W^k для всех $k\geq 0$, получим

(49) $$\|v^n\|_k\leq C,\quad t\in[0,R].$$

$w^n=v^n-v$ удовлетворяет следующее уравнение:

(50) $$w^n_t+w^n_x+(w^n)^2w^n_x+(vv^nw^n)_x-w^n_{xxt}=0.$$
$$w^n(x,0)=h_n(x)-h(x)=f_n(x).$$

Далее для краткости вместо w^n будем писать w. Умножая (50) на $w_{(2j)}$, интегрируя по R и по $[0,t]$, после соответствующего интегрирования по частям, получим

$$W_j(t)=W_j(0)+(-1)^{j+1}.2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[w^2w_x+(v^2w)_x+(vw^2)_x]w_{(2j)}dxd\tau,$$

где $W_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[w^2_{(j)}+w^2_{(j+1)}]dx$.

Интегрируя по частям и применяя формулу Лейбница, получим

(51) $$\frac{dW_j}{dt}\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}|w_{(j+1-k)}w_{(k-s)}w_{(s)}w_{(j)}| + \sum_{k=0}^{j+1}\sum_{s=0}^{k}(|w_{(j+1-k)}v_{(k-s)}v_{(s)}w_{(j)}|+|w_{(j+1-k)}w_{(k-s)}v_{(s)}w_{(j)}|)\Big]dxd\tau.$$

Отметим, что в силу (49) $\|w\|_k\leq C$, $t\in[0,R]$, причем C не зависит от n. (51) в случае $j=0$ запишется в виде $dW_0/dt\leq C\sup|wv_x+2vv_x|\int_{-\infty}^{\infty}w^2dx\leq CW_0$. Отсюда $W_0(t)\leq W_0(0)\exp[ct]\Rightarrow\|w^n\|_1\leq\|f_n\|_1\exp[CR]$ и, следовательно, $\|w^n\|_1\to 0$ ($\|f_n\|_1\to 0$) равномерно по $t\in[0,R]$.

Допуская индуктивно, что $\|w^n\|_j\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по $t\in[0,R]$, из (51), получим, что

$$W_j(t)^{1/2}\leq W_j(0)^{1/2}\exp[CR]+a_n(\exp[CR]-1),$$

где $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда можем заключить, что $\|w^n\|_{j+1}\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по $t\in[0,R]$. Тогда по индукции следует, что $\|v^n-v\|_k=\|w^n\|_k\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно на ограниченном временном интервале для всех $k\geq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что попутно мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5. *Рассмотрим задачу*

(52) $$u_t+u_x+u^2u_x-u_{xxt}=0,\quad u(x,0)=g(x),\quad x\in R.\quad t\geq 0.$$

Пусть $g(x)\in W^m$, $m\geq 2$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (52), которое принадлежит $\tilde{W}^m_T$ для всех конечных T, а $\partial^l_t u\in\tilde{W}^{m+1}_T$ для всех $l>0$. Решение u (соответственно $\partial^l_t u$) зависит непрерывно в $\tilde{W}^m_T$ (соответственно $\tilde{W}^{m+1}_T$) от начальных данных g в W^m.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur. *Studies Appl. Math.*, **53**, 1974, p. 249.
2. T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. *Phis. Trans. R. Soc. Lond. A*, **272**, p. 47.
3. J. L. Bona, R. Smith. *Phil. Trans. R. Soc. Lond, A*, **278**, p. 555.
4. M. D. Kruskal, R. M. Miura, C. S. Gardner, N. J. Zabusky. *J. Math. Phys.*, **11**, 1970, p. 952.
5. R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal. *J. Math. Phys.*, **9**, 1968, p. 1204.
6. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series N 30, Princeton, 1970.

Поступила 18. 3. 1981

Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации
Главный почтамт п/я 79, 101 000 Москва, СССР