Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СХОДИМОСТЬ И (C, δ)-СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ В ТОЧКАХ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ

ГЕОРГИ С. БОЙЧЕВ

В работе рассматриваются некоторые вопросы сходимости и (C, δ)-суммируемости ряда по многочленам Якоби в точках границы его области сходимости.

Пусть α и β — произвольные комплексные числа, такие, что $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1 \neq -1, 2, \ldots$ и $\rho(z)$ — регулярное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}=\frac{\alpha}{z-1}+\frac{\beta}{z+1}$$

в области $\mathbf{C}-[(-\infty, -1]\cup[1, +\infty]]$.

Многочлены Якоби определяются формулой Родрига

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n n!\,\rho(z)}\,\frac{d^n}{dz^n}[\rho(z)(1-z^2)^n],\ n=0, 1, 2, \ldots .$$

Если $\operatorname{Re}\alpha>-1$ и $\operatorname{Re}\beta>-1$, посредством равенства

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(t)(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\,dt,\ n=0, 1, 2, \ldots, z\in\mathbf{C}-[-1, +1],$$

определяются функции Якоби второго рода.

Замечание. Функции Якоби второго рода можно определить и в общем случае, когда α, β и $\alpha+\beta+1\neq -1, -2, \ldots$.

Для многочленов и функций Якоби второго рода имеет место следующая формула типа Кристоффеля — Дарбу:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\nu}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)}{I_n^{(\alpha,\beta)}}+\frac{\Delta^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)}{\zeta-z}, \tag{1}$$

при $\zeta\neq z$, $z\in\mathbf{C}$, $\zeta\in\mathbf{C}-[-1, 1]$, где

$$I_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \tag{2}$$

$$\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)=k_\nu\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)Q_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(\zeta)-P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(\zeta)\},$$

$$k_\nu=-2(\nu+1)(\nu+\alpha+\beta+1)[(2\nu+\alpha+\beta+1)(2\nu+\alpha+\beta+2)I_\nu^{(\alpha,\beta)}]^{-1}.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1981, с. 82—89.

Для k_ν имеет место асимптотическая формула

$$k_\nu = -\nu 2^{-(\alpha+\beta+1)}[1+o(1)], \quad \nu\to\infty, \tag{3}$$

которая получается из (2) и формулы Стирлинга.

Через $w(z)$ обозначим ту из однозначных ветвей функции, обратной функции Жуковского, для которой $w(\infty)=\infty$.

Для многочленов и функций второго рода Якоби при $n\to+\infty$ в области $G=\mathbf{C}-[-1, 1]$ имеют место следующие асимптотические формулы [1]:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = P^{(\alpha,\beta)}(z)\, n^{-1/2}[w(z)]^n [1+p_n(z)], \tag{4}$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = Q^{(\alpha,\beta)}(z) n^{-1/2}[w(z)]^{-n-1}[1+q_n(z)], \tag{5}$$

где $P^{(\alpha,\beta)}(z)\neq 0$, $Q^{(\alpha,\beta)}(z)\neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} p_n(z)=0$, $\lim_{n\to+\infty} q_n(z)=0$ равномерно на каждом компактном подмножестве области G.

Используя асимптотические формулы (3), (4) и (5), получаем следующее представление:

$$\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta) = \left[\frac{w(z)}{w(\zeta)}\right]^\nu [D^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)+\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)], \tag{6}$$

для $z, \zeta\in G$, где $D^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)$ и $\{\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)\}_{\nu=1}^\infty$ — аналитические функции в $G_1=G\times G$ и

$$\lim_{\nu\to+\infty} \delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)=0 \tag{7}$$

равномерно на каждом компактном подмножестве области G_1.

Умножая обе стороны (1) на $(\zeta-z)$, получаем тождество

$$1\equiv(\zeta-z)\sum_{n=0}^{\nu}[I_n^{(\alpha,\beta)}]^{-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)+\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta),$$

которое очевидно верно и для $\zeta=z$. Следовательно, $\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, z)\equiv 1$ или $D^{(\alpha,\beta)}(z, z)+\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, z)\equiv 1$. Тогда имея в виду (7), получим, что

$$D^{(\alpha,\beta)}(z, z)\equiv 1 \quad \text{и} \quad \delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, z)\equiv 0 \tag{8}$$

для каждого ν и $z\in G$.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в внутренности эллипса γ_r, фокусы которого совпадают с точками -1 и $+1$ и через $w(z)$ изображается в окружность радиусом $r>1$. Тогда f разлагается в области $E_r=\operatorname{int}\gamma_r$ в ряд по многочленам Якоби

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P^{(\alpha,\beta)}(z) \tag{9}$$

с коэффициентами $a_n=[2\pi i]_n^{(\alpha,\beta)}]^{-1}\int_{\gamma r'} Q^{(\alpha,\beta)}(\zeta)f(\zeta)d\zeta$, $n=0, 1, 2, \ldots$, где $\gamma_{r'}$ — эллипс, определенный подобным образом, как и γ_r и $1<r'<r$.

Дальше будем предполагать, что функция f представима в области E_r интегралом типа Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{10}$$

где $\varphi(\zeta)$ определена и суммируема на γ_r. Тогда коэффициенты ряда (9) получаются из формулы $a_n=[2\pi i I_n^{(\alpha,\beta)}]^{-1}\int_{\gamma_r} Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta,\ n=0, 1, 2, \ldots$.

Используя формулы Кристоффеля — Дарбу (1), находим, что для каждого $z\in E_r$ имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\nu} a_nP_n^{(\alpha,\beta)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)}{\zeta-z}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Если через $s_\nu^{(\alpha,\beta)}$ обозначим сумму первых $\nu+1$ членов ряда (9), тогда

$$s^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)}{\zeta-z}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Поскольку $\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,z)\equiv 1$ для каждого $z\in G$, функция $(\zeta-z_0)[1-\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)]$ голоморфна на $F_r=\bar{E}_r-[-1,1]$ относительно ζ. Следовательно, для каждого $z_0\in F_r$ имеем

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Имея в виду асимптотическую формулу (6), при $\nu\geqq 1$ и $z_0\in F_r$ получаем

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-D^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\delta^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Это возможно, потому что функции $1-D^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu$ и $\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)$ голоморфны относительно ζ и в точке z_0 обращаются в нуль.

Пусть

$$r_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta$$

для $\nu\geqq 1$ и

$$s_0^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-D^{(\alpha,\beta}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Так как $\lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)=0$ равномерно на каждом компактном подмножестве области G_1, то $\lim_{\nu\to+\infty} r_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=0$. Следовательно, при $\nu\to+\infty$ и $z_0\in F_r$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-D^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta+o(1).$$

Тогда, используя (8) и лемму Римана — Лебега, получаем

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{1-[w(z_0)/w(z)]^\nu}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta+o(1),\ \nu\to+\infty. \tag{11}$$

Дальше для удобства верхние индексы будем пропускать и будем записывать $s_\nu(z_0)=s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)$.

Цель настоящей работы исследовать поведение ряда

$$a_0P_0^{(\alpha,\beta)}(z)+a_1P_1^{(\alpha,\beta)}(z)+\cdots+a_nP_n^{(\alpha,\beta)}(z)+\cdots, \tag{12}$$

представляющий функцию (10) в области E_r, когда $z\in\gamma_r$. Мы дадим некоторые достаточные условия для того, чтобы он был сходящим или (C,δ)-суммируемым для каждого $\delta>0$.

Пусть $\delta>-1$. Напомним, что ряд $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ с частичными суммами $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ называется (C, δ)-суммируемым с суммой S, если $\lim_{n\to\infty} S_n^\delta/C_n^\delta=S$, где $S_n^\delta=\Sigma_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta-1}S_k$, $C_k^l=\binom{k+l}{k}$, $l\in\mathbf{R}$.

Для каждого $\delta>-1$ имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{\delta-1}=C_n^\delta. \tag{13}$$

$(C, 0)$-суммируемость есть обычная сходимость.

Дальше будем использовать следующие две предложения:

Теорема 1 [3, стр. 131]. *Если $\delta\in(-1,0)$, коэффициенты C_n^δ положительны, убывают (как функция от n) и*

$$C_n^\delta=\frac{n^\delta}{\Gamma(\delta+1)}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=O(n^\delta),\quad n\to+\infty.$$

Теорема 2 [3, стр. 132]. *Если ряд (C,δ)-суммируем для $\delta>-1$ с суммой S, то он также $(C,\delta+\varepsilon)$-суммируем к S при любом $\varepsilon>0$.*

Следствие. *Каждый ряд, который сходится, (C,δ)-суммируем для каждого $\delta>0$.*

В [2] рассматриваются некоторые достаточные условия для сходимости ряда (12) при $z\in\gamma_r$. В [4] устанавливаются условия для сходимости рядов по многочленам Бесселя в точках границ областей сходимости. Обращено внимание на то, что они после некоторых изменений являются достаточными условиями для сходимости ряда (12) для $z\in\gamma_r$. Соответствующим результатом является следующее предложение.

Теорема 3. *Если голоморфная функция $f(z)$ представляется интегралом типа Коши (10), где $1<r<+\infty$ и $\varphi(\zeta)$ суммируема на γ_r, и для $z_0\in\gamma_r$ имеем*

$$\int_{\gamma_r}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\right|ds<+\infty, \tag{14}$$

то ряд (12), представляющий f в области E_r, сходится в точке z_0 к сумме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(z_0). \tag{15}$$

С помощью асимптотической формулы (11) здесь мы дадим более короткое доказательство этой теоремы.

Во-первых, легко можно доказать, что для каждого ν и $z_0\in\gamma_r$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu}{\zeta-z_0}d\zeta=1. \tag{16}$$

Тогда, используя (11) и (14), находим, что при $\nu\to+\infty$

$$s_\nu(z_0)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta+\varphi(z_0)+o(1).$$

Применяя лемму Римана – Лебега, получаем

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu d\zeta=0.$$

Следовательно, ряд (12) сходится в точке z_0 и

$$\lim_{\nu\to+\infty}s_\nu(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\frac{\varphi(z_0)}{2}\cdot$$

Теперь остановимся на (C, δ)-суммируемости ряда (12). Пусть $\zeta, z_0\in\gamma_r$, где z_0 фиксировано. Вводим функцию $\psi(\theta)=\varphi[2^{-1}(r\exp i\theta+r^{-1}\exp(-i\theta))]$, которая, очевидно, является периодической и суммируема на каждом конечном интервале. Далее определяем функцию $\Phi(t)=\int\limits_0^t|\psi(\theta_0+\theta)-\psi(\theta_0)|d\theta$,

где $\theta_0\in[-\pi, \pi]$ определено равенством $z_0=2^{-1}[r\exp i\theta_0+r^{-1}\exp(-l\theta_0)]$.

Теорема 4. *Пусть аналитическая функция f представляется в области E_r интегралом типа Коши* (10), *где $1<r<+\infty$ и $\varphi(\zeta)$ суммируема на γ_r. Тогда, если для $z_0\in\gamma_r$*

(17) $$\Phi(t)=o(t),\ t\to0,$$

и интеграл в (15) *существует в смысле главного значения, ряд* (12), *представляющий f в E_r, (C, δ)-суммируем в точке z_0 для каждого $\delta>0$ к сумме* (15).

Доказательство. Предположим, что $\delta\in(0, 1)$ и образуем средние Чезаро

$$\sigma_n^\delta(z_0)=(C_n^\delta)^{-1}\sum_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta-1}s_k(z_0).$$

Используя асимптотическую формулу (11), получим, что при $n\to+\infty$

$$\sigma_n^\delta(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-K_n(z_0, \zeta)}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta+o(1),$$

где $K_n(z_0, \zeta)=(C_n^\delta)^{-1}\Sigma_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta-1}[w(z_0)/w(\zeta)]^k$. Имея в виду (16) и (13), находим, что

$$\sigma_n^\delta(z_0)-\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{1-K_n(z_0, \zeta)}{\zeta-z_0}[\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)]d\zeta+o(1).$$

Пусть $U_n=\{\zeta:|\zeta-z_0|<n^{-1}\}$, $d_n=\gamma_r\cap U_n$, $\gamma_n=\gamma_r-d_n$. Обозначим через $\zeta_{1,n}$ и $\zeta_{2,n}$ крайние точки дуги d_n. Тогда $\zeta_{j,n}=2^{-1}[r\exp i\theta_{j,n}+r^{-1}\exp(-i\theta_{j,n})]$, $j=1, 2$, и для определенности примем, что $\theta_{1,n}<\theta_0<\theta_{2,n}$. Далее имеем

$$\sigma_n^\delta(z_0)-\varphi(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{K_n(z_0, \zeta)}{\zeta-z_0}[\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)]d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{d_n}\frac{1-K_n(z_0, \zeta)}{\zeta-z_0}[\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)]d\zeta+o(1)=-I_{1,n}+I_{2,n}+o(1).$$

Здесь покажем, что $I_{1,n}=o(1)$ и $I_{2,n}=o(1)$ при $n\to+\infty$ для каждого $\delta\in(0, 1)$.

Для интеграла $I_{1,n}$ имеем

$$I_{1,n}=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\theta_{1,n}}+\int_{\theta_{2,n}}^{\pi}\right)\left[\frac{K_n(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}(\psi(\theta)-\psi(\theta_0))(r\exp i\theta-r^{-1}\exp(-i\theta))d\theta\right]=I_{1,n}^{(1)}+I_{1,n}^{(2)}.$$

Нетрудно установить, что при $n\to+\infty$ имеем $\theta_{j,n}-\theta_0=O(n^{-1})$, $j=1,2$. Очевидно

$$|I_{1,n}^{(2)}|\leq A_1\int_{\theta_{2,n}}^{\pi}\frac{|K_n(z_0,\zeta)||\psi(\theta)-\psi(\theta_0)|}{|\exp i\theta-\exp i\theta_0|}d\theta,$$

где A_1 — постоянная, не зависещая от θ. Произведя замену переменной интегрирования $\theta=\theta_0+t$, находим

$$|I_{1,n}^{(2)}|\leq A_1\int_{t_{2,n}}^{\pi-\theta_0}\frac{|K_n(z_0,\zeta)|}{|2\sin(t/2)|}|\psi(\theta_0+t)-\psi(\theta_0)|dt,$$

где $t_{2,n}=O(n^{-1})$ при $n\to\infty$. Пусть для определенности предположим, что $\theta_0\in(0,\pi)$. Тогда $t_{2,n}>0$. Очевидно имеем

$$C_n^\delta|K_n(z_0,\zeta)|=|\sum_{k=0}^{n}C_k^{\delta-1}\exp ikt|.$$

Используя, что $t>0$, $\delta-1>-1$, как и свойства биномного ряда, получаем

$$C_n^\delta|K_n(z_0,\zeta)|=|(1-\exp it)^{-\delta}-\sum_{k=n+1}^{\infty}C_k^{\delta-1}\exp ikt|.$$

Здесь коэффициенты $C_k^{\delta-1}$ монотонно убывают к 0 (теорема 1). Следовательно, для каждого $t\in(0,\pi)$

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty}C_k^{\delta-1}\exp ikt|\leq 2C_{n+1}^{\delta-1}|1-\exp it|^{-1}.$$

Тогда для достаточно большого n имеем, что

$$\frac{|K_n(z_0,\zeta)|}{\sin(t/2)}\leq\frac{1}{C_n^\delta\sin(t/2)}\left(\frac{1}{(2\sin(t/2))^\delta}+\frac{C_{n+1}^{\delta-1}}{\sin(t/2)}\right)\leq\frac{A_2}{n^\delta(\sin(t/2))^{\delta+1}},$$

где A_2 — постоянная, не зависящая от n и t. Так как $t\in(0,\pi)$, то $\pi\sin(t/2)\geq t$. Следовательно, $|K_n(z_0,\zeta)|/2\sin(t/2)\leq A_3/n^\delta t^{\delta+1}$, где постоянная A_3 не зависит от n и t. Имея в виду условие (17), находим, что при $n\to+\infty$

$$|I_{1,n}^{(2)}|\leq\frac{A_4}{n^\delta}\int_{t_{2,n}}^{\pi-\theta_0}\frac{|\psi(\theta_0+t)-\psi(\theta_0)|}{t^{\delta+1}}dt=\frac{A_4}{n^\delta}\int_{t_{2,n}}^{\pi-\theta_0}\frac{d\Phi(t)}{t^{\delta+1}}=\frac{A_4}{n^\delta}\cdot\frac{\Phi(t)}{t^{\delta+1}}\Bigg|_{t_{2,n}}^{\pi-\theta_0}$$

$$+\frac{(\delta+1)A_4}{n^\delta}\int_{t_{2,n}}^{\pi-\theta_0}\frac{\Phi(t)}{t^{\delta+2}}dt=o(1)\quad A_4=A_1A_3.$$

Следовательно, $I_{1,n}^{(2)}=o(1)$ при $n\to+\infty$. Аналогичным образом устанавливается, что $I_{1,n}^{(1)}=o(1)$.

Теперь покажем, что $I_{2,n}=o(1)$, $n\to+\infty$. Очевидно имеет место неравенство

$$|I_{2,n}|\leqq A_5\int_{t_{1,n}}^{t_{2,n}}\frac{|1-K_n(z_0,\zeta)|}{|2\sin(t/2)|}\cdot|\psi(\theta_0+t)-\psi(\theta_0)|dt,$$

где постоянная A_5 не зависит от t, $t_{j,n}=O(n^{-1})$, $j=1, 2$ и $t_{1,n}<0<t_{2,n}$. Используя тождество (13) и неравенство $|\sin kt|\leqq k|\sin t|$, находим, что

$$\frac{|1-K_n(z_0,\zeta)|}{2|\sin(t/2)|}=\frac{|\Sigma_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta-1}(1-\exp(-ikt))|}{C_n^\delta 2|\sin(t/2)|}\leqq\frac{1}{C_n^\delta}\sum_{k=0}^n|C_{n-k}^{\delta-1}\frac{\sin(kt/2)}{\sin(t/2)}|\leqq\frac{n\,\Sigma_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta-1}}{C_n^\delta}=n.$$

Следовательно,

$$|I_{2,n}|\leqq nA_5\int_{t_{1,n}}^{t_{2,n}}|\psi(\theta_0+t)-\psi(\theta_0)/dt=A_5\left[\frac{\Phi(t_{2,n})}{n^{-1}}-\frac{\Phi(t_{1,n})}{n^{-1}}\right].$$

Имея в виду условие (17), заключаем, что $I_{2,n}=o(1)$ при $n\to+\infty$.

Таким образом, для каждого $\delta\in(0, 1)$ установлена асимптотическая формула

$$\sigma_n^\delta(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta-\varphi(z_0)=o(1),\ n\to+\infty.$$

Используя, что интеграл в (15) существует в смысле главного значения, получаем, что последовательность $\{\sigma_n^\delta(z_0)\}_{n=0}^\infty$ сходится для каждого $\delta\in(0, 1)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\delta(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta+\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\frac{\varphi(z_0)}{2}\cdot$$

Таким образом мы установили, что ряд (12) (C, δ)-суммируем в точке z_0 с суммой (15) для кажого $\delta\in(0, 1)$. Используя теорему 2, получаем, что это имеет место для каждого $\delta>0$. Таким образом, теорема 4 доказана.

Следствие. *Если $f(z)$ — аналитическая функция в $E_r(1<r<+\infty)$ и непрерывная на $\bar{E}_r$, то ряд* (12), *представляющий f в области E_r, (C, δ)-суммируем для каждого $z_0\in\gamma_r$ и $\delta>0$ с суммой $f(z_0)$.*

В конце отметим, что аналогичные теоремы могут быть установлены для рядов по функциям Якоби второго рода, а также и для рядов по многочленам и функциям второго рода Бесселя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
2. П. Русев. Развитие на аналитични функции по полиномите на Якоби. *Известия Мат. инст. БАН*, 7, 1963, 61—73.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
4. И. Байчев. Сходимост и сумируемост на редове по обобщените полиноми на Бесел. *Известия Мат. инст. БАН*, 10, 1969, 17—26.

Высший институт зоотехнии и ветеринарной медицины
6000 Стара Загора Болгария

Поступила 31. 3. 1981