Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

РАЗРЕШИМЫЕ A-АЛГЕБРЫ ЛИ

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Построены новые примеры конечномерных A-алгебр Ли над конечным полем (в A-алгебрах Ли все нильпотентные подалгебры абелевы). Доказано, что ими аппроксимируются свободные разрешимые алгебры. В случае алгебраически замкнутого поля показано, что все конечномерные разрешимые A-алгебры — ступени разрешимости три.

В работе изучаются конечномерные A-алгебры Ли. Алгебра Ли называется A-алгеброй, если все ее нильпотентные подалгебры абелевы. Пока неизвестно достаточно большое количество примеров A-алгебр, и поэтому они относительно слабо изучены. Мы имеем хорошую информацию только в метабелевом случае [1]. Один из результатов настоящей работы утверждает, что над конечным полем существуют достаточно много A-алгебр, настолько много, что ими аппроксимируются свободные разрешимые алгебры. С другой стороны, показано, что над алгебраически замкнутым полем все разрешимые A-алгебры — ступени разрешимости 3.

Через K будем обозначать фиксированное поле положительной характеристики p, через $U(L)$ — универсальную обертывающую алгебры L, $A\lambda B$ будет расщепляемое расширение идеала A с помощью алгебры B, а $\mathfrak{A}^s$ — многообразие всех разрешимых K-алгебр ступени разрешимости s. Все A-алгебры будут предполагаться конечномерными над K.

Лемма 1 [2, следствие 8.3]. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли, M — идеал в L и алгебра L/M нильпотентна. Тогда существует нильпотентная подалгебра N в L такая, что $L=M+N$.*

Лемма 2. *Фактор-алгебра A-алгебры является A-алгеброй.*

Доказательство (см. [1, лемма 1]). Пусть I — идеал в L и L/I не является A-алгеброй. Без ограничения общности можем предполагать, что сама L/I нильпотентна и неабелева, т. е. существует $n>2$ такое, что $L^2\not\subset I$, $L^n\subset I$. Следовательно, $L^2\neq L$, и по лемме 1 $L=L^2+N$, N — нильпотентна. Заметим, что N абелева (L является A-алгеброй), и мы можем выбрать N так, что $L^2\cap N=0$, т. е. $L=L^2\lambda N$. Пусть $J=I\cap L^2$. Тогда $L^n\subset I$ и $L^n\subset L^2$, следовательно,

$$L^n\subset J,\quad L^2\not\subset J. \tag{1}$$

Покажем, что (1) невозможно. Рассмотрим $\bar{L}=L/J$, $\bar{L}^n=0$, $\bar{L}=\bar{L}^2\lambda\bar{N}$ ($\bar{L}$ — расщепляема, потому что $J\subset L^2$, $L^2\cap N=0$). В нильпотентной алгебре $\bar{L}$ любое множество элементов, например $\bar{N}$, порождающее $\bar{L}$ по модулю $\bar{L}^2$, порождает $\bar{L}$. Абелевость $\bar{N}$ противоречит (1).

В дальнейшем будем использовать лемму 2 без комментарий.

Предложение 3. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над K, $u_1,\dots,u_t$ — ненулевые элементы из $U(L)$. Тогда существует гомомор-*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 132—135.

физм θ алгебры $U(L)$ на конечномерную алгебру R такой, что $u_1\theta, \dots, u_t\theta$ обратимы в R.

Доказательство. Пусть $l_1, \dots, l_k$ — базис L над K. В $K[x]$ существуют p-многочлены $f_1(x), \dots, f_k(x)$ степени соответственно $n_1, \dots, n_k$ такие, что $z_1 = f_1(l_1), \dots, z_k = f_k(l_k)$ принадлежат центру Z алгебры $U(L)$, и элементы

$$l_1^{\alpha_1} \dots l_k^{\alpha_k} z_1^{\beta_1} \dots z_k^{\beta_k}, \quad 0 \leqq \alpha_j < n_j, \ \beta_j \geqq 0, \ j = 1, \dots, k,$$

составляют базис $U(L)$ над K [3, стр. 225]. Следовательно, $U(L)$ — свободный модуль конечного типа над $K[z_1, \dots, z_k]$, и для каждого u_i, $i = 1, \dots, t$, существуют многочлены $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \dots, \varphi_{r_i i}$ из $K[z_1, \dots, z_k]$ такие, что $\varphi_{0i} \neq 0$ и $u_i^{m_i}(\varphi_{0i} + \varphi_{1i} u_i + \dots + \varphi_{r_i i} u_i^{r_i}) = 0$. В $U(L)$ нет делителей нуля, поэтому

$$\varphi_{0i} + \varphi_{1i} u_i + \dots + \varphi_{r_i i} u_i^{r_i} = 0, \ \varphi_{0i} \neq 0, \ i = 1, \dots, t. \tag{2}$$

В алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля K существуют элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такие, что если мы подставим α_j вместо z_j, $j = 1, \dots, k$, то

$$\prod_{i=1}^{t} \varphi_{0i}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0. \tag{3}$$

Присоединим $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ к полю K. Тогда $K[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ — конечное расширение K (α_j алгебраичны над K). Определим гомоморфизм $\psi: K[z_1, \dots, z_k] \to K[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ равенствами $z_j\psi = \alpha_j$. Из (3) следует, что $\varphi_{0i}(z_1, \dots, z_k)\psi$ — обратимые элементы. Пусть θ — естественный гомоморфизм $\theta: U(L) \to U(L)/U(L) \ker \psi = R$. Из конечности и свободы модуля $U(L)$ над $K[z_1, \dots, z_k]$ и конечной коразмерности $\ker \psi$ в $K[z_1, \dots, z_k]$ следует, что K-алгебра R конечномерна и что можно вложить $K[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ в R. Ввиду (2)

$$u_i\theta(\varphi_{1i} + \dots + \varphi_{r_i i} u_i^{r_i - 1})\theta = -\varphi_{0_i}\theta \neq 0 \ \text{ в } \ K[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \subset R,$$

т. е. $u_i\theta$ обратимы в R.

В предложениях 4—8 поле K — конечно.

Следствие 4. *Пусть L — конечная алгебра Ли. Существует точное конечномерное представление L, в котором все ненулевые элементы из L действуют обратимо.*

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_k \in L \subset U(L)$ — все ненулевые элементы из L. Достаточно рассмотреть регулярное представление алгебры R из предложения 3 и индуцированное им представление $U(L)$ (а, следовательно, и представление L).

Теорема 5. *Пусть L — конечная A-алгебра Ли. Существует точный конечномерный L-модуль M такой, что расщепляемое расширение $M\lambda L$ является A-алгеброй Ли.*

Доказательство. По следствию 4 существует конечномерный L-модуль M, в котором все ненулевые элементы из L действуют обратимо. Покажем, что $S = M\lambda L$ является A-алгеброй. Пусть N — нильпотентная подалгебра в S. Тогда $\bar{N}$ абелева, где $\bar{N} \subset \bar{S} = S/M \cong L$ (в L все нильпотентные подалгебры — абелевы). Предположим, что $\bar{N} \neq \bar{0}$ и $N^2 \neq 0$ (если $\bar{N} = \bar{0}$, то $N \subset M$, $N^2 \subset M^2 = 0$). Тогда $N^2 \subset M$ и любой элемент из $N \setminus M$ действует обратимо на N^2, что противоречит нильпотентности N.

Теорема 6. *Свободные разрешимые алгебры над конечным полем аппроксимируются A-алгебрами.*

(Алгебра L аппроксимируется A-алгебрами, если сечение всех идеалов I, для которых L/I являются A-алгебрами, равно нулю [4, гл. I, § 7]).

Доказательство. Пусть $F(\mathfrak{A}^s)$ — свободная разрешимая алгебра. Доказательство будем вести индукцией по s. Основание индукции $s=1$ очевидно. Из теоремы вложения [5, теорема 1] следует, что $F(\mathfrak{A}^s)$ вкладывается в абелево сплетение $B \operatorname{wr} F(\mathfrak{A}^{s-1})$, B — абелева алгебра. (Теорема вложения доказана при $\operatorname{char} K=0$, но ограничение на характеристику используется только для аппроксимирования относительно свободных алгебр нильпотентными алгебрами.) Поэтому достаточно показать, что $W=B \operatorname{wr} F(\mathfrak{A}^{s-1})$, $\dim B=1$, аппроксимируется A-алгебрами.

Алгебра W изоморфна $C\lambda F(\mathfrak{A}^{s-1})$, C — свободный циклический $F(\mathfrak{A}^{s-1})$-модуль. Пусть $0 \neq cf(x_1, \ldots, x_n)+g(x_1, \ldots, x_n) \in W$, c — образующий модуля C, $f \in U(F(\mathfrak{A}^{s-1}))$, $g \in F(\mathfrak{A}^{s-1})$. В силу индуктивного предположения достаточно доказать, что в случае $g=0$ существует идеал I в W такой, что $cf \notin I$ и W/I является A-алгеброй. По теореме Пуанкаре — Биргкофа — Витта

$$f=\Sigma a f_1^{\alpha_1} \ldots f_k^{\alpha_k},\ f_i \in F(\mathfrak{A}^{s-1}), \quad i=1, \ldots, k$$

и $f_1, \ldots, f_k$ линейно независимы над K. Рассмотрим всевозможные ненулевые линейные комбинации $u_\lambda=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_k f_k$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$. По индукции существует конечное число A-алгебр L_λ (поле K — конечно!) и гомоморфизмы $\varphi_\lambda: F(\mathfrak{A}^{s-1}) \to L_\lambda$ такие, что $u_\lambda \varphi_\lambda \neq 0$. Пусть $L=\bigoplus_\lambda L_\lambda$ и φ — гомоморфизм из $F(\mathfrak{A}^{s-1})$ в L, продолжающий φ_λ. Мы нашли A-алгебру L такую, что $u_\lambda \varphi \neq 0$, т. е. $f_1\varphi, \ldots, f_k\varphi$ линейно независимы в L. Поэтому $h=\Sigma a(f_1\varphi)^{\alpha_1} \ldots (f_k\varphi)^{\alpha_k}$ — ненулевой элемент из $U(L)$. В силу предложения 3 существует A-алгебра $M\lambda L$, в которой h действует на M обратимо, т. е. $Mh \neq 0$. Следовательно, W аппроксимируется A-алгебрами.

Следствие 7. *Свободная алгебра Ли над конечным полем аппроксимируется A-алгебрами.*

Замечание 8. Аналоги теоремы 6 и следствия 7 в теории групп доказываются тривиально: Пусть $\mathfrak{M}(p)$ — класс всех конечных абелевых p-групп. Тогда класс $\{(\ldots(G_1 \operatorname{wr} G_2) \operatorname{wr} \ldots) \operatorname{wr} G_s \mid G_i \in \mathfrak{M}(p_i), p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа$\}$ состоит из A-групп и аппроксимирует свободную разрешимую группу.

Для ассоциативных алгебр следствие 7 неверно (в ассоциативной A-алгебре все нильпотентные подалгебры с тривиальным умножением): Пусть R — конечная A-алгебра. Тогда $R=J\lambda E_m$, E — расширение поля K, J — радикал R. Очевидно $J^2=0$ и $m \leq 2$ (иначе в E_m существует нильпотентная подалгебра ступени нильпотентности >2). Следовательно, R удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)s_4(y_1, y_2, y_3, y_4)=0$.

До конца работы K будет алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$.

Предложение 9. *Пусть L — A-алгебра из $\mathfrak{A}^4$, M — минимальный идеал в L, $M \subset L'''$. Тогда $[M, L'']=0$.*

Доказательство. Пусть $\bar{L}=L/L'''$. Из $(L''')^2=0$ следует, что M является неприводимым $\bar{L}$-модулем. Если $n \in \bar{L}$, $l \in \bar{L}''$, то $[n, l] \in \bar{L}''$ и $[n, l, l]=0$. Поэтому $[n, l^p]=[n, \underbrace{l, \ldots, l}_{p}]=0$ в $U=U(\bar{L})$ и l^p принадлежит центру Z

алгебры $U(\bar{L})$. Пусть φ — представление $U(\bar{L})$ в M, индуцированное действием $\bar{L}$ в M. Модуль M унитарен и неприводим, а поле K — алгебраически замкнуто. По теореме Бернсайда $U\varphi \cong K_r$, $r \geq 1$ и, поэтому, $\dim Z\varphi = 1$. Покажем, что $\dim L''\varphi \leq 1$: Для любых l_1, l_2 из $\bar{L}''$ существуют $k_1, k_2 \in K$ такие, что $k_1 l_1^p + k_2 l_2^p \in \ker\varphi$ $(l_1^p, l_2^p \in Z, \dim Z\varphi = 1)$. Из $[l_1, l_2] = 0$ следует, что существуют α_1, α_2 $(\alpha_1^p = k_1, \alpha_2^p = k_2)$ такие, что $(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)^p = k_1 l_1^p + k_2 l_2^p \in \ker\varphi$. Пусть l из L'' — представитель смежного класса $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2$. Подалгебра $M + \langle l \rangle$ A-алгебры L нильпотентна. Поэтому она абелева, $[M, l] = 0$ и $\alpha_1 l_1 + a_2 l_2 \in \ker\varphi$.

Пусть $\dim \bar{L}''\varphi = 1$. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим алгебру $S = \bar{L} / \bar{L}'' \cap \ker\varphi$. Тогда $\dim S'' = 1$ и S'' — одномерный S/S'' — модуль. Все элементы из S' действуют на S'' тривиально (они со следом нуль), т. е. $[S'', S'] = 0$ и $[\bar{L}'', \bar{L}'] \subset \ker\varphi$. Тогда $N = S'$ нильпотентна: $N^2 = S'' \neq 0$ $N^3 = [S'', S'] = 0$, что невозможно (S является A-алгеброй).

Следовательно, $\dim \bar{L}''\varphi = 0$, т. е. $\bar{L}'' \subset \ker\varphi$ и $[M, L''] = 0$.

Теорема 10. *Каждая конечномерная разрешимая A-алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики принадлежит $\mathfrak{A}^3$. (По теореме Ли при нулевой характеристике основного поля все разрешимые A-алгебры метабелевы.)*

Доказательство. В силу леммы 2 мы можем предполагать, что L — A-алгебра из $\mathfrak{A}^4$. Пусть $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s = L'''$ — композиционный ряд идеалов в L'''. По предложению 9 $[M_i, L''] \subset M_{i-1}$. Следовательно, любой элемент из L'' действует на L''' нильпотентно, и для любого $l \in L''$ алгебра $L''' + \langle l \rangle$ нильпотентна. Поэтому $[L''', L''] = 0$ и алгебра L'' тоже нильпотентна. Таким образом $0 = (L'')^2 = L'''$ и $L \in \mathfrak{A}^3$.

Замечание 11. Конечномерные A-алгебры из $\mathfrak{A}^3 \setminus \mathfrak{A}^2$ существуют: Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли и M — неприводимый L-модуль размерности p [3, стр. 65]. Легко проверить, что расщепляемое расширение $M\lambda L$ является A-алгеброй.

Автор благодарит А. Л. Шмелькина за постановку задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Шеина. Многообразия метабелевых A-алгебр Ли, I, II. *Вестн. Моск. унив. мат., мех.,* 1977, № 4, 37—46; 1978, № 3, 52—59.
2. D. A. Towers. Frattini theory for algebras. *Proc. London Math. Soc.*, **27**, 1973, 440—462.
3. Н. Джекобсон. Алгебры Ли. Москва, 1964.
4. Х. Нейман. Многообразия групп, Москва, 1969.
5. А. Л. Шмелькин. Сплетения алгебр Ли и их применение в теории групп. *Тр. Моск. мат. о-ва,* **29**, 1973, 247—260.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 31. III. 1981