Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЖДЕСТВ В ГРУППАХ

ДАНИЕЛА Б. НИКОЛОВА

Цель настоящей статьи — рассмотрение одного вида групповых тождеств. Эти тождества выполняются, например, в нильпотентных группах класса нильпотентности $\leqq c$, в энгелевых группах класса энгелевости $\leqq m$, в каждой конечной группе, в каждом локально конечном многообразии групп. Будет рассмотрено каким образом выполнение этих тождеств отражается на строении разрешимых групп с конечным числом образующих. В связи с этим в работе дается еще один пример многообразий групп с конечными базисами тождеств. Частные случаи тождеств этого вида оказываются эквивалентными коммутативному закону или свойству нильпотентности в некоторых классах групп. Подсчитаны минимальные тождества этого вида, которые выполняются в некоторых группах маленького порядка.

1. Введение. 1.1. Будем обозначать далее через:

$\mathfrak{A}$ — абелевое многообразие групп,

$\mathfrak{A}_k$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты k,

C_l или $\{a\}_l$ — циклическую группу порядка l.

$Z_k(G)$ $(\Gamma_l(G))$ — члены верхнего (соответственно нижнего) центрального ряда группы G,

$$x^y = yxy^{-1},\ [x, y] = xyx^{-1}y^{-1},\ [x, {}_n y] = [x, \underbrace{y, y, \dots, y}_{n}] = [[x, \underbrace{y, \dots, y}_{n-1}], y]$$

(по Грюнбергу [3]).

Обозначения и понятия, которые мы не определяем, можно найти в [1] и [2].

Напомним определение энгелевой группы:

Определение 1. *Группа G энгелева, если для каждой пары элементов $x, y \in G$ существует натуральное число $k = k(x, y)$, такое, что $[x, {}_k y] = 1$. Если $[x, {}_n y] = 1$ является тождеством в группе G, то G удовлетворяет n-ому условию Энгеля.*

Если G — энгелева группа, которая удовлетворяет n-ому, но не удовлетворяет $(n-1)$-ому условию Энгеля, то говорят, что G имеет класс энгелевости n.

1.2. Будем рассматривать группы, в которых выполняется тождество вида

$$[x, {}_m y] = [x, {}_n y],\ m < n. \tag{1}$$

Например, в нильпотентных группах класса нильпотентности $\leqq c$ выполнено тождество $[x, {}_c y] = [x, {}_{c+1} y]$.

Предложение 1. *Группа G энгелева класса энгелевости m тогда и только тогда, когда в G выполняется тождество $[x, {}_m y] = [x, {}_{m+1} y]$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность: $\forall x \in G$, $\forall y \in G$, пусть $a = [x, {}_m y]$.

$[x,{}_m y]=[x,{}_{m+1} y]\Leftrightarrow a=[a, y]\Leftrightarrow a=aya^{-1}y^{-1}\Leftrightarrow a^{-1}=1\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow[x,{}_m y]=1.$

Предложение 2. *В каждом локально конечном многообразии групп выполняется тождество вида* (1).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — локально конечное многообразие групп, а $F=F_2(\mathfrak{L})$ — свободная группа ранга 2 этого многообразия, со свободными образующими x, y. Поскольку F — конечная группа, число элементов $[x, y]$, $[x,{}_2 y]$, $[x,{}_3 y], \ldots$ тоже конечное. Некоторые из них должны быть равны. Таким образом, для некоторых m и n мы будем иметь: $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$. Но F—относительно свободная группа. Следовательно, $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$ является тождеством в F, и поэтому $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$ — тождество в каждой группе из $\mathfrak{L}$.

Так как каждое многообразие, порожденное конечной группой, является локально-конечным, имеет место:

Следствие 1. *В каждой конечной группе выполняется тождество вида* (1).

Тождества вида (1), которые выполняются в данной группе G, можно упорядочить. Будем говорить, что $[x,{}_{m_1} y]=[x,{}_{n_1} y]<[x,{}_{m_2} y]=[x,{}_{n_2} y]$ тогда и только тогда, когда $(m_1, n_1)<(m_2, n_2)$ в лексикографическом смысле. В дальнейшем мы будем искать минимальное тождество.

В множестве натуральных чисел рассмотрим отношение: $m\equiv n$ тогда и только тогда, когда $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$ есть тождество в группе G. Легко заметить, что здесь имеет место отношение эквивалентности. Данное обозначение оправдано и тем, что если $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$ — минимальное тождество вида (1) в G, а $d=n-m$, это отношение обладает свойствами обычного сравнения натуральных чисел по модулю d. Действительно, верна следующая

Теорема 1. *Если G — группа, в которой выполняется тождество вида* (1), *а $[x,{}_m y]=[x,{}_n y]$ является минимальным тождеством такого вида в G и $d=n-m$, то $[x,{}_{m'} y]=[x,{}_{n'} y]$ — тоже тождество в G тогда и только тогда, когда $m\leqq m'$ и d делит $n'-m'$.*

Доказательство. (а) Пусть $m\leqq m'$, $d(n'-m')$. Тогда $n'=(n-m)q+m'=nq-mq+m'\equiv mq-mq+m'=m'$, т. е. $[x,{}_{m'} y]=[x,{}_{n'} y]$ — тождество в G.

(б) Допустим, что обратное утверждение не верно; пусть тогда $u\equiv v$ будет минимальным контрпримером, т. е. $[x,{}_u y]=[x,{}_v y]$ — тождество в G, но d не является делителем числа $v-u$, при этом u, v выбраны так, что $v-u$ — минимальное возможное. Согласно выбору числа m, мы имеем $m\leqq u$. Из пункта (а) следует, что $u+d\equiv u$, но $u\equiv v$, тогда $u+d\equiv v$. Рассмотрим разницу $d_1=v-u-d$. Если $v>u+d$, то $0<d_1<v-u$ и d не является делителем d_1(иначе d делило бы $v-u$). Полученное противоречит выбору пары чисел u, v. Следовательно, $v<u+d$, т. е. $d>v-u$. Тогда существует натуральное число $q\geqq 1$ такое, что:

$$q(v-u)\leqq d<(q+1)(v-u). \tag{2}$$

Из пункта (а) следует, что $qu\equiv qu+d$, но $qu\equiv qv$, потому что это отношение — отношение эквивалентности. Отсюда $qu+d\equiv qv$. Образуем разницу $d_2=qu+d-qv=d-q(v-u)$. Из (2) следует, что $0\leqq d_2<(q+1)(v-u)-q(v-u)$, т. е. $0\leqq d_2<v-u$. Из выбора чисел u, v следует, что d делит $d_2=d-q(v-u)$, и тогда d делит $q(v-u)$. Но $d\geqq q(v-u)$. Таким образом $d=q(v-u)$, где $q>1$ (иначе $d(v-u)$).

Допустим, что $v \geqq n$. Тогда $u \equiv v = (v-n)+n \equiv (v-n)+m$. Мы имеем тождество $[x, {}_{v-n+m} y] = [x, {}_u y]$, где $u > v-n+m$, потому что $u-(v-n+m) = (u-v)+(n-m) = (q-1)(v-u) > 0$. Если $u \geqq n$, то $u = (u-n)+n \equiv (u-n)+m$. Следовательно, в группе G выполнено тождество $[x, {}_{u-n+m} y] = [x, {}_{v-n+m}]$, где уже $v-n+m > u-n+m$. Таким образом мы продолжаем этот процесс до получения тождества $[x, {}_{u'} y] = [x, {}_{v'} y]$ в группе G такое, что $m \leqq u' < v' \leqq n$. При этом $v' < n$, потому что, если $v' = n$, мы имеем $m \equiv n = v' \equiv u'$, т. е. $m \equiv u'$ и $u' < v' = n$, что противоречит минимальности $m \equiv n$. Тогда $m \equiv n = (n-v')+v' \equiv (n-v')+u' = m+q(v-u)-(v'-u')$, где $q(v-u) > q(v-u)-(v'-u') > 0$, что противоречит минимальности $m \equiv n$.

Итак, не существует минимального контрпримера, т. е., если $[x, {}_{m'} y] = [x, {}_{n'} y]$ — тождество в G, то d делит разницу $n'-m'$. Этим теорема доказана.

В обозначениях теоремы 1 верно следующее:

Следствие 2.

(i) *Если* $[x, {}_r y] = [x, {}_s y]$ *и* $[x, {}_u y] = [x, {}_v y]$ — *тождества в группе* G, *то в* G *выполняются* ***и*** *тождества:* $[x, {}_{r+u} y] = [x, {}_{s+v} y]$, $[x, {}_{ru} y] = [x, {}_{sv} y]$. *Если* k — *отличное от нуля натуральное число, в* G *выполняется и* $[x, {}_{kr} y] = [x, {}_{ks} y]$.

(ii) *Если* $[x, {}_{lt} y] = [x, {}_{lw} y]$ — *тождество в* G *и* l — *отличное от нуля натуральное число, взаимно простое с* d, *а* $m \leqq t$, *то* $[x, {}_t y] = [x, {}_w y]$ — *тоже тождество в* G.

Теорема 1 дает нам практический метод получения чисел m, n минимального тождества вида (1) в конечной группе G, а именно: Рассмотрим все $l = (|G|-1)(|G|-2)$ упорядоченных пар элементов из G, которые не равняются единице, соответствующие им минимальные равенства типа (1) и разницы:

$$g_1,\ h_1 \in G,\ [g_1, {}_{m'} h_1] = [g_1, {}_{n'} h_1],\quad d' = n'-m'$$

$$g_2,\ h_2 \in G,\ [g_2, {}_{m''} h_2] = [g_2, {}_{n''} h_2,]\quad d'' = n''-m'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_l,\ h_l \in G,\ [g_l, {}_{m^{(l)}} h_l] = [g_l, {}_{n^{(l)}} h_l],\quad d^{(l)} = n^{(l)} - m^{(l)}.$$

Мы ищем числа $m, n \in \mathbf{N}$ такие, что $d^{(i)}/(n-m)$, $\forall i$ и чтобы $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$ являлось тождеством в G. Пусть d — наименьшее общее кратное чисел $d^{(i)}$, $m = \max(m', m'', \ldots, m^{(l)}$ и $n = m+d$. Тогда в G выполняется тождество $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$ и (m, n) — минимальная в лексикографическом смысле пара, которая, как видно, определяется единственным образом.

В качестве примеров мы нашли минимальные тождества вида (1) некоторых конечных групп маленького порядка. Ясно, что для абелевых групп тождество — $[x, {}_1 y] = [x, {}_2 y]$. Для неабелевой группы S_3 порядка 6 тождество — $[x, {}_2 y] = [x, {}_4 y]$. Для неабелевых групп D_4 и Q_8 порядка 8 тождество — $[x, {}_2 y] = [x, {}_3 y]$, так как в них выполняется $[x, y, z] = 1$. Для вычисления тождества в A_4 мы воспользовались представлением A_4 в виде

$$A_4 = (C_2 \times C_2) \lambda C_3$$

как полупрямом произведении группы Клейна на циклическую группу порядка 3:

$$\forall g \in A_4, \ g = c^{\varepsilon} k, \ \varepsilon = 0, 1, -1, \ k \in K = C_2 \times C_2.$$

Пользуясь хорошо известными тождествами Холла, которые в наших обозначениях имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&[xy, z] = [y, z]^x [x, z], \\
(3) \qquad &[x, yz] = [x, y][x, z]^y, \\
&[xy, zt] = [y, z]^x [y, t]^{zx} [x, z][x, t]^z,
\end{aligned}
$$

и легко выводимыми отношениями:

$$
\begin{aligned}
&[k, c^{\varepsilon}] = [c^{\varepsilon}, k], \\
&[[k_i, c^{\varepsilon}], k_j] = 1, \\
&[k_i, c^{\varepsilon} k_j] = [k_i, c^{\varepsilon}], \\
&[k_i k_j, c^{\varepsilon}] = [k_i, c^{\varepsilon}][k_j, c^{\varepsilon}], \text{ где } k_i, k_j \in K,
\end{aligned}
$$

мы получаем, что тождество в A_4 — это $[x, {}_2 y] = [x, {}_5 y]$.

Используя указанный метод, мы можем утверждать:

Следствие 3. *Если в многообразиях групп $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ выполняются тождества вида* (1), *то и в объединении многообразий $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{V}$ выполняется тождество вида* (1), *в то время как в $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ необязательно существование такого тождества.*

Доказательство. Действительно, если минимальное тождество вида (1) в $\mathfrak{U}: [x, {}_{m_1} y] = [x, {}_{n_1} y]$, а в $\mathfrak{V}: [x, {}_{m_2} y] = [x, {}_{n_2} y]$, то в $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{V}$ минимальное тождество имеет вид: $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$, где $m = \max(m_1, m_2)$, d — наименьшее общее кратное чисел $d_1 = n_1 - m_1$ и $d_2 = n_2 - m_2$, а $n = m + d$.

Рассмотрим теперь многообразия $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_p \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}_q$, где p, q — простые числа. Докажем, что в этих многообразиях такого тождества нет, хотя в $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_p = \mathrm{var}(C_p)$, $\mathfrak{A}_q = \mathrm{var}(C_q)$ тождество вида (1) выполняется.

Заметим, что, если A и B — две группы, то в группе $W = A \mathrm{Wr} B$:

$$
(4) \qquad [a, {}_m b] = a \left(a^{-\binom{m}{1}}\right)^b \left(a^{\binom{m}{2}}\right)^{b^2} \cdots \left(a^{(-1)^k \binom{m}{k}}\right)^{b^k} \cdots \left(a^{(-1)^m}\right)^{b^m},
$$

где $a \in A$, $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$, $\binom{m}{i}$ обозначают биномные коэффициенты. Формула доказывается индукцией по m.

В группе $\{a\}_p \mathrm{wr} \{b\}_\infty = (\Pi_{i=0}^{\infty} \{a^{b^i}\}_p) \lambda \{b\}_\infty$ видно, что последний множитель формулы (4) не сокращается с предыдущими, ибо $b^m \neq b^k$ при $k < m$, $\forall m$. Но, $\{a\}_p \mathrm{wr} \{b\}_\infty \in \mathfrak{A}_p \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^2$, значит, тождества вида (1) в этих многообразиях нет.

С другой стороны, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_q \supseteq \mathfrak{A}_{q^s} \mathfrak{A}_q$, $\forall s$, $\forall q$ — простое число. Но в $\mathfrak{A}_{q^s}\mathfrak{A}_q$ выполняется тождество $[x, {}_{m+1} y] = [x, {}_{m+2} y]$, где $m = q + (s-1)(q-1)$, оно также является минимальным тождеством вида (1), как видно из теорем 5.1 и 6.2 работы Либека [4]. Ясно, что $m \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Следовательно, и в $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_q$ тождество вида (1) не выполняется.

Заметим, что поскольку многообразия $\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l$, $k, l \in \mathbf{N}$, — локально конечные, как произведения локально конечных $\mathfrak{A}_k = \mathrm{var}(C_k)$ и $\mathfrak{A}_l = \mathrm{var}(C_l)$, то в них выполняется тождество вида (1).

2. Конечно порожденные разрешимые группы. Здесь будет рассмотрено, каким образом выполнение тождества вида (1) отражается на строении разрешимых групп с конечным числом образующих.

2.1. Нашим основным результатом является:

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{V}$ — *разрешимое многообразие, порожденное группой* G *с конечным числом образующих. В* $\mathfrak{V}$ *выполняется тождество вида* (1) *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{V}=\mathfrak{N}\vee\mathfrak{L}$, *где* $\mathfrak{N}$ — *нильпотентное, а* $\mathfrak{L}$ — *кроссовое многообразие.*

Доказательство. Достаточность следует из следствия 3. Для доказательства обратного утверждения напомним, что мы показали, что $\mathfrak{A}^2\not\subseteq\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}\not\subseteq\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_q\not\subseteq\mathfrak{V}$, $\forall p, q$ — простые числа. Применим теорему C(iii) Гроувза [5]:

Теорема C(iii). *Если* $\mathscr{V}\subseteq\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\ldots\mathfrak{W}_k$, *где* $\mathfrak{W}_i$ — *разрешимые или кроссовые многообразия групп и* $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}\not\subseteq\mathscr{V}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_q\not\subseteq\mathscr{V}$, $\forall p$, q — *простые числа, то* $\mathscr{V}$ *является объединением нильпотентного многообразия и многообразия конечной экспоненты.*

Следовательно, $\mathfrak{V}=\mathfrak{N}_1\vee\mathfrak{L}_1$, где $\mathfrak{N}_1$ — нильпотентное многообразие, а $\exp(\mathfrak{L}_1)<\infty$. Заметим, что $\mathfrak{L}_1$ — локально конечное многообразие, так как оно является подмногообразием разрешимого многообразия.

Пусть $\mathfrak{V}=\operatorname{var}(G)$, где G порождается r образующими. Тогда $\mathfrak{V}=\operatorname{var}(F_r(\mathfrak{V}))$, где $F_r(\mathfrak{V})$ — свободная группа ранга r многообразия $\mathfrak{V}$. Из представления $\mathfrak{V}=\mathfrak{N}_1\vee\mathfrak{L}_1$ следует, что $F_r(\mathfrak{V})$ изоморфна поддекартову произведению свободных групп ранга r многообразий $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{L}_1$. Отсюда следует, что $\mathfrak{V}=\operatorname{var}(Fr(\mathfrak{V}))=\operatorname{var}(F_r(\mathfrak{N}_1)\times F_r(\mathfrak{L}_1))=\operatorname{var}(F_r(\mathfrak{N}_1))\vee\operatorname{var}(F_r(\mathfrak{L}_1))=\mathfrak{N}\vee\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{N}$ — нильпотентное многообразие, а $\mathfrak{L}$ — кроссово (порождается конечной группой).

Используя следствие 2 работы Косси [6], получаем следующее интересное следствие:

Следствие 4. *Если* G — *конечно порожденная, разрешимая группа, в которой выполняется тождество вида* (1), *то* $\operatorname{var}(G)$ — *конечно базируемое многообразие.*

2.2. Некоторые другие свойства конечно-порожденной разрешимой группы G с тождеством вида (1). Ф. Холл дал следующее определение (см. [7]):

Определение 2. *Говорят, что* A-fn-*группа* (finite-by-nilpotent), *если существует конечный нормальный делитель* H *в* A, *такой, что фактор-группа* A/H *нильпотентна.*

Как заметил Холл, A — fn-группа тогда и только тогда, когда некоторый член $\Gamma_i(A)$ нижнего центрального ряда группы A конечен. Известное и другое необходимое и достаточное условие fn-группы:

(5) *A — fn-группа тогда и только тогда, когда индекс* $[A:Z_k(A)]$ *некоторого члена верхнего центрального ряда группы* A *конечен.*

Достаточность этого утверждения впервые была доказана Баером [8], а одиннадцать лет спустя Ф. Холл доказал его необходимость [7].

Легко заметить, что свойство „fn" является закрытым относительно подгрупп и гомоморфных образов.

Следствие 5. *В каждая конечно порожденной, разрешимой группе выполняется тождество вида* (1), *тогда и только тогда, когда G является* $\mathfrak{fn}$-*группой.*

Доказательство. Пусть $G_1 = F_r(\mathfrak{N}_1) \times F_r(\mathfrak{L}_1)$ (в обозначениях теоремы 2). Следовательно, $\exists F_r(\mathfrak{L}_1) \lhd G$ такой, что $|F_r(\mathfrak{L}_1)| < \infty$ и $G_1/F_r(\mathfrak{L}_1) \cong F_r(\mathfrak{N}_1)$ — нильпотентная группа. Таким образом G_1 — $\mathfrak{fn}$-группа. Тогда $F_r(\mathfrak{V})$ — тоже $\mathfrak{fn}$-группа, а отсюда и G является $\mathfrak{fn}$-группой, как гомоморфный образ группы $F_r(\mathfrak{V})$.

Следствие 6. *Каждая конечно порожденная, разрешимая группа G, без центра* ($Z(G)=1$), *в которой выполняется тождество вида* (1) *конечна.* (Следует из (5)).

Определение 3. *Говорят, что A почти нильпотентная группа* ($A-\mathfrak{nf}$-*группа*), *если существует нильпотентный нормальный делитель N в A, такой, что фактор A/N — конечная группа.*

Так как $x \in Z_k(A) \Leftrightarrow [x, y_1, y_2, \ldots, y_k] = 1$, $\forall y_i \in A$, то члены верхнего центрального ряда группы A нильпотентны. Отсюда, а также из (5), следует, что каждая $\mathfrak{fn}$-группа является почти нильпотентной.

Следствие 7. *Каждая конечно порожденная, разрешимая группа, в которой выполняется тождество вида* (1), *почти нильпотентна.*

3. Некоторые частные случаи тождеств вида (1).

3.1. Эквивалентность тождества $[x, y] = [x, {}_n y]$ коммутативному закону.

В этой части мы будем иметь дело только с группами, удовлетворяющими тождеству

$$[x, y] = [x, {}_n y], \quad n > 1, \tag{6}$$

и это будет минимальное тождество вида (1) в них. Наша цель — установить эквивалентность между тождествами $[x, y] = 1$ и (6) в некоторых классах групп. Из предложения 1 следует

Следствие 8. *Каждая энгелева группа G класса энгелевости r, которая удовлетворяет тождеству* (6), *абелева.*

Доказательство. Пусть G — энгелева группа класса r (r — энгелева группа), т. е. в G выполняется $[x, {}_r y] = 1$. Следовательно, $[x, {}_r y] = [x, {}_{r+1} y]$. Но в G выполняется тоже $[x, {}_1 y] = [x, {}_n y]$. Так как это тождество является минимальным вида (1), то разница $n-1$ должна делить каждую разницу, в случае $(r+1)-r=1$. Таким образом $n=2$. В G выполняется тождество $[x, {}_1 y] = [x, {}_2 y]$, что по предложению 1 эквивалентно абелевости группы G.

Лемма 1. *Если в группе G с тождеством* (6) *существует абелев нормальный делитель A, то он содержится в центре $Z(G)$ группы G.*

Доказательство. $\forall g \in G$, $\forall a \in A$, $[g, a] = a^g a^{-1} \in A$, поскольку $A \lhd G$. Тогда $[g, {}_2 a] = 1$, поскольку A — абелев. Следовательно, $[g, {}_n a] = 1 = [g, a]$. $A \subseteq Z(G)$.

Теорема 3 [15]. *Каждая разрешимая группа G с тождеством* (6) *абелева.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по индексу разрешимости. Пусть G — разрешимая группа индекса l. Рассмотрим производный ряд

$$G = G^{(0)} \supset G' \supset G'' \supset \cdots \supset G^{(l-1)} \supset G^{(l)} = 1.$$

По лемме 1 $G^{(l-1)} \subseteq Z(G)$.

Группа $\bar{G}=G/G^{(l-1)}$ разрешима, индекса меньше l. По индукционному предположению она абелева. Следовательно, $G'\subseteq G^{(l-1)}\subseteq Z(G)$. Получаем, что $[x, y, z]=1$ — тождество в G, но тогда и $[x, {}_2\, y]=1$ — тоже тождество в G. Отсюда $[x, {}_n\, y]=1=[x, y]$, $\forall x\in G$, $\forall y\in G$. G является абелевой группой.

Для многообразия групп, рассмотренного в параграфе 2, даже без условия конечной порожденности группы G, верно следующее

Следствие 9. *Разрешимое многообразие групп $\mathfrak{V}$, порожденное группой G, в которой выполняется тождество вида* (1), *абелево тогда и только тогда, когда минимальное тождество этого вида в G является: $[x, {}_1\, y]=[x, {}_n\, y]$.*

Напомним следующий результат Миллера, Морено, который здесь будет доказан другим методом:

Лемма 2 [9]. *Любая конечная группа, в которой каждая подгруппа — абелева, является разрешимой.*

Доказательство. Допустим что утверждение неверно. Пусть G — минимальный по порядку контрпример. Тогда G — простая группа. Пусть M — максимальная подгруппа G. M нормализует себя, т. е. $M=N_G(M)$, поскольку M — абелева, а G — простая группа. Тогда $\forall g\in G\setminus M$, $M^g\neq M$ и M^g — максимальная в G. Следовательно, $G=\mathrm{gp}(M, M^g)$.

Пусть $H=M\cap M^g$. H — подгруппа абелевой группы M, и поэтому $M\subseteq N_G(H)$. Аналогично $M^g\subseteq N_G(H)$. Следовательно, $G=N_G(H)$. Но G — простая, поэтому $H=1$, т. е. $\forall g\in G\setminus M$, $M\cap M^g=1$.

Применим к G теорему Фробениуса (см. [14]): $\exists G^*\lhd G$, такой, что $M\cap G^*=1$, $MG^*=G$ и $G/G^*\cong M$. Ясно, что, поскольку M — собственная нетривиальная подгруппа G, то и G^* — собственная нетривиальная нормальная подгруппа G. Получается противоречие с простотой группы G. Лемма доказана.

Теорема 4 [15]. *Каждая конечная группа G с тождеством* (6) *абелева.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по порядку $|G|$. Пусть $|G|=m<\infty$. Предположим, что для групп порядка $<m$ теорема верна. Тогда каждая собственная подгруппа G абелева. Применяя лемму 2, обнаруживаем, что G оказывается разрешимой и согласно теореме 3, она абелева.

Теорема 5. *Любая линейная группа G над полем K, в которой выполняется тождество* (6), *является абелевой.*

Доказательство. Воспользуемся следующей альтернативой Тица [11]. Если G линейная группа над полем K, то либо она содержит свободную подгруппу F_2 ранга 2, либо является расширением разрешимой группы с помощью линейной (над K) периодической группы. Так как в нашей группе G имеется тождество, то существует разрешимый нормальный делитель H, фактор-группа, по которому $\bar{G}=G/H$ является линейной периодической группой над полем K. Следовательно, каждая конечно порожденная подгруппа $\bar{N}$ группы $\bar{G}$ конечна (первая теорема Шура [10]). Применяя теорему 4, $\bar{N}$ — абелева. Следовательно, $\bar{G}$ — абелева группа. Тогда G является разрешимой группой, как расширение разрешимой группы H при помощи абелевой группы $\bar{G}$. По теореме 3 G — абелева группа.

В заключении отметим, что в 1966 г. Н. Д. Гупта (см. [15]) занимался изучением групп, удовлетворяющих тождеству $[x, y]=C_n$, где $C_n=[c_1, c_2, \ldots,$

$c_n]$, $c_i \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$. Аналогичными методами (заменой леммы 1 на Т 3.1) он доказал теорему 3 и теорему 4. Он доказал тоже, что каждое из тождеств $[x, {}_1 y] = [x, {}_2 y]$ и $[x, {}_1 y] = [x, {}_3 y]$ эквивалентно коммутативному закону для произвольной группы G. Являются ли вообще абелевыми группы, которые удовлетворяют тождеству (6), еще неизвестно.

3.2. Эквивалентность тождества $[x, {}_m y] = [x, {}_{m+1} y]$ свойству нильпотентности.

Здесь будут рассмотрены группы с тождеством

$$[x, {}_m y] = [x, {}_{m+1} y], \tag{7}$$

и это будет минимальное тождество вида (1) в них. Оказывается, что это тождество дает необходимое и достаточное условие нильпотентности для некоторых классов групп, как, например, конечные группы и группы, принадлежащие многообразию, рассмотренному в параграфе 2.

Лемма 3. *Нильпотентная группа G, в которой $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$ — минимальное тождество вида (1), является энгелевой группой класса энгелевости m.*

Доказательство. Пусть группа G имеет класс нильпотентности c. Тогда в ней выполняется тождество $[x, {}_c y] = [x, {}_{c+1} y]$. Так как минимальное тождество вида (1) в G — это тождество $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$, то разница $d = n - m$ должна делить $(c+1) - c = 1$. Следовательно, $n = m + 1$, и согласно предложению 1 G — m-энгелева.

Предложение 3. *Конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество* (7).

Доказательство. Если G — конечная группа, то согласно следствию 1, в ней выполняется тождество вида (1), и по лемме 3 она является энгелевой, если она нильпотентна. С другой стороны, из результатов Виляцера [12] и Плоткина [13] известно, что конечная энгелева группа нильпотентна.

Наконец, вернемся к многообразию групп, рассмотренному во втором параграфе, а именно, докажем, что верно следующее

Предложение 4. *Разрешимое многообразие групп $\mathfrak{V}$, порожденное группой G с конечным числом образующих, в которой выполняется тождество вида* (1), *и $[x, {}_m y] = [x, {}_n y]$ — минимальное тождество такого вида, является нильпотентным тогда и только тогда, когда $n = m + 1$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 3. Пусть G — энгелева группа. Из теоремы 4 работы Грюнберга [3] следует, что G локально нильпотентна, так как она разрешима. Но G — конечно порожденная, следовательно, она нильпотентна. $\mathfrak{V}$ — нильпотентное многообразие.

Автор хотел бы выразить свою благодарность А. Ю. Ольшанскому и Г. К. Генову за постановку задачи и научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Нейман. Многообразия групп. М., 1969.
2. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М., 1972.
3. K. W. Gruenberg. The Engel Elements of a Soluble Group. *Illinois J. Math.*, **3**, 1959, 151—168.
4. H. Liebeck. Concerning Nilpotent Wreath Products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58**, 1962, 443—451.

5. J. R. J. Groves. Varieties of Soluble Groups and a Dichotomy of P. Hall. *Bull. Austr. Math. Soc.*, **5**, 1971, 391—410.
6. J. Cossey. Laws in Nilpotent-by-Finite Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**, 1968, 685—688.
7. P. Hall. Finite-by-Nilpotent Groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52**, 1956, 611—616.
8. L. Baer. Representations of Groups as Quotient Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58**, 1945, 295—419.
9. G. A. Miller, H. C. Moreno. Non-Abelian Groups in Which Every Subgroup Is Abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1903, 398—404.
10. I. Schur. Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen, *S—B, Preuss Akad. der Wiss*, 1911, 619—627.
11. J. Tits. Free Subgroups in Linear Groups. *J. Algebra*, **20**, 1972, 250—270.
12. В. Г. Виляцер. К теории локально нильпотентных групп. *Успехи мат. наук*, **13**, 1958, № 2, 163—168.
13. Б. И. Плоткин. О некоторых признаках локально нильпотентных групп. *Успехи мат. наук*, **9**, 1954, № 3, 181—186.
14. G. Frobenins. Über auflösbare Gruppen, IV. *Sitzber Preuss. Akad. Wiss.*, 1901, 1216—1230.
15. N. D. Gupta. Some Group-Laws Equivalent to the Commutative Law. *Arch. Math.*, **17**, 1966, 97—102.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 11. 6. 1981