Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ

М. М. ЧОБАН

В работе исследуется строение открытых отображений в зависимости от свойств пространств. Найдены общие условия, при которых в образе содержатся точки, прообразы которых являются неразреженными пространствами. Вводится понятие рассеянного отображения и находятся условия, при которых открытое отображение рассеяно. Полученные результаты применяются к изучению поведения функций размерностного типа при открытых отображениях.

Рассмотрим непрерывное однозначное отображение $f: X \to Y$ и свойство $\mathcal{R}$. Положим, $\mathcal{R}_f = \{y \in Y \mid f^{-1}(y)$ обладает свойством $\mathcal{R}\}$ и $N\mathcal{R}_f = Y \setminus \mathcal{R}_f$.

Задача 1. *Исследовать строение множеств $\mathcal{R}_f$ и $N\mathcal{R}_f$ в зависимости от свойств пространств X и Y и дополнительной информации об отображении f.*

Задача 2. *При каких условиях множество $N\mathcal{R}_f$ не пусто?*

Задача 1 имеет глобальный характер, а задача 2 является ее частным случаем. Конкретные результаты, относящиеся к задаче 2, могут быть классифицированы как теоремы существования.

Общие постановки задач 1 и 2 содержат различные конкретные реализации. Одной из них является:

Проблема П. С. Александрова 1. *Исследовать размерностные свойства множеств $NS_f = \{y \in Y \mid f^{-1}(y)$ несчетно$\}$ и $S_f = Y \setminus NS_f$.*

Исследования, связанные с проблемой П. С. Александрова, были начаты в работах П. С. Александрова [2], А. Н. Колмогорова [3]. Методы, развитые в работах П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, принципиально различны, хотя в некоторых аспектах дают общие результаты. Метод П. С. Александрова позволяет получить утверждения, относящиеся к изучению множества $I_f = \{y \in Y \mid f^{-1}(y)$ содержащего изолированную точку относительно $f^{-1}(y)\}$ и $NI_f = Y \setminus I_f$. Этот метод был развит в исследованиях А. Д. Тайманова [4], А. В. Архангельского [5; 6] и М. М. Чобана [7—11], а метод А. Н. Колмогорова — в исследованиях Е. Г. Скляренко [12, 13], Ю. М. Смирнова [14] и Б. А. Пасынкова [15]. В данной работе методы П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова получают дальнейшее развитие. Результаты работы составили содержание докладов автора на Всесоюзной топологической конференции в Минске в 1977 г. и на Международной топологической конференции в Москве в 1979 г. Случай замкнутых отображений рассмотрен автором в работе [11].

Замечания и обозначения. 1. Все пространства предполагаются нормальными, а отображения — однозначными и непрерывными, если отсутствуют точные указания.

2. $|X|$ — мощность множества X.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 205—217.

3. wX — вес пространства X.

4. βX — стоун-чеховское бикомпактное расширение пространства X.

5. Пространство X называется нульмерным, если $\dim X=0$.

6. K — канторово совершенное множество. Точка $i \in K$ имеет вид $i=(i_1 i_2 \ldots i_n \ldots)$, где $i_j=0,1$ для всех $j=1, 2, \ldots$. Для каждого кортежа $i_1 i_2 \ldots i_n$ положим $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}=\{(j_1 j_2 \ldots j_n \ldots) \mid j_1=i_1, j_2=i_2, \ldots, j_n=i_n\}$. Множества $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ образуют открытую базу пространства K.

7. Все понятия, которые здесь не определены, имеются в монографии П. С. Александрова и Б. А. Пасынкова [16]. Они содержатся также в монографии Р. Энгелкинга [17]. Подробные обзоры современного состояния теории размерности даны в работе [18] и монографиях [16] и [17].

1. Метод П. С. Александрова. Исследование изолированных отображений. Пространство X называется пространством с G_δ-диагональю, если $\Delta(X)=\{(x, x) \mid x \in X\}$ есть G_δ-множество пространства X^2.

Теорема 1. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое бикомпактное отображение паракомпакта X с G_δ-диагональю на совершенно нормальное пространство Y. Тогда:*

1. *Существует счетное число замкнутых в X множеств $\{X_n \mid n=1, 2, \ldots\}$ таких, что $I_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} fX_n$ и для каждого n множество fX_n замкнуто в Y, а $f \mid X_n$ — гомеоморфизм;*

2. $\dim NS_f \geq \dim NI_f \geq \dim Y - \dim X - 1$;

3. *Если X счетномерно, а Y несчетномерно, то и подпространства NS_f и NI_f несчетномерны;*

4. *Если X сильно счетномерно, а Y сильно несчетномерно, то и подпространства NS_f и NI_f сильно несчетномерны;*

5. *Если X* ind-*счетномерно, а Y* ind-*несчетномерно, то и подпространства NS_f и NI_f* ind-*несчетномерны;*

6. *Если X* Ind-*счетномерно, а Y* Ind-*несчетномерно, то и подпространства NS_f и NI_f* Ind-*несчетномерны;*

7. *Если X A-слабо бесконечномерно, а Y A-сильно бесконечномерно, то и подпространства NS_f и NI_f A-сильно бесконечномерны;*

8. *Если $NI_f=\emptyset$ и пространство X или счетномерно, или слабо счетномерно, или сильно счетномерно, или* ind-*счетномерно, или* Ind-*счетномерно, или A-слабо бесконечномерно, то таково соответственно и пространство Y. В частности,* $\dim Y \leq \dim X$ *и* $\operatorname{Ind} Y \leq \operatorname{Ind} X$.

Замечание. Пространство счетномерно, если оно представимо в виде счетной суммы нульмерных подпространств. Пространство слабо счетномерно, если оно является объединением счетного числа конечномерных в смысле dim замкнутых подпространств. Если пространство является суммой счетного числа конечномерных в смысле dim подпространств, то оно называется сильно счетномерным. Пространство ind-счетномерно (соответственно, Ind-счетномерно), если оно представимо в виде счетной суммы конечномерных в смысле ind (соответственно, в смысле Ind) подпространств. Можно рассматривать и n-dim-счетномерные (n-ind-счетномерные, n-Ind-счетномерные) пространства, являющиеся суммой счетного числа подпространств размерности n. И для таких свойств верны утверждения 5 и 8 теоремы 1.

Доказательство. Утверждение 1 теоремы доказывается так же как и теорема 9 в работе [8]. Остальные утверждения теоремы вытекают из утверждения 1 и результатов монографии [16] (теорема 16, с. 271; теорема 6, с. 409; теорема 22 и следствие 3, с. 536).

Пространство разрежено, если каждое его непустое подпространство содержит изолированную точку. Для отображения $f: X \to Y$ положим $R_f = \{y \in Y \mid f^{-1}(y)$ разрежено$\}$ и $NR_f = Y \setminus R_f$.

Теорема 2. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое отображение метризуемого пространства X на слабо паракомпактное пространство Y и существует метрика ρ на X такая, что множество $\{y \in Y \mid f^{-1}(y)$ не полно относительно $\rho\}$ σ-дискретно в Y. Тогда*:

1. *Существуют счетное число замкнутых в X множеств $\{X_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ таких, что $R_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} fX_n$ и для каждого n множество fX_n замкнуто в Y, а $f \mid X_n$ есть гомеоморфизм*;
2. $\dim NR_f \geq \dim X - \dim Y - 1$;
3. *Для NB_f верны аналоги утверждений* 3—7 *теоремы* 1;
4. *Если $NR_f = \varnothing$, то верно утверждение* 8 *теоремы* 1.

Доказательство. Вытекает из следствия 1 работы [8] и теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое s-отображение метрического пространства X на сильно метризумое пространство Y. Тогда справедливы утверждения* 1—8 *теоремы* 1.

Замечание. Отображение $f: X \to Y$ называется s-отображением, если $f^{-1}(y)$ сепарабельно для всех $y \in Y$. Пространство сильно метризуемо, если оно обладает базой, распадающейся в счетную систему звездно конечных покрытий [16, с. 382].

Доказательство. Достаточно установить справедливость утверждения 1. Пусть $\gamma = \{\gamma_n = \{U_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n = 1, 2, \dots\}$ — база пространства X, где γ_n — дискретное семейство, а $\omega = \underbrace{\hphantom{xx}}_{m=1}^{\infty} \omega_m$ — база пространства Y, где $\omega_1, \omega_2, \dots$ — звездноконечные покрытия. Для каждого m существует дискретное покрытие $\xi_m = \{W_\beta^m \mid \beta \in B_m\}$, где W_β^m — компонента сцепленности покрытия ω_m [16, с. 70]. Для любого $\beta \in B_m$ существует счетное семейство $\sigma_\beta^m = \{V_\beta^{mk}$ $k = 1, 2, \dots\} = \{V \in \omega_m \mid V \cap W_\beta^m \neq \varnothing\} = \{V \in \omega_m \mid V \subseteq W_\beta^m\}$. Для всякого элемента $\alpha \in A_n$ положим $L_\alpha^n = \{x \in X \mid \{x\} = U_\alpha^n \cap f^{-1}(f(x))\}$. Множества L_α^n и fL_α^n являются F_σ-множествами, а $f \mid L_\alpha^n$ есть гомеоморфизм. Фиксируем натуральные числа n, m, k. Множество $\{U \in \gamma_n \setminus fU \supseteq V_\beta^{mk}\}$ не более чем счетно для каждого $\beta \in B_m$. Пусть $\{U_\beta^{nmkt} \mid t = 1, 2, \dots\} = \{U \in \gamma_n \mid fU \supseteq V_\beta^{mk}\}$. Положим $H_\beta^{nmkt} = L_\beta^{nmkt} \cap f^{-1} W_\beta$ и $H_{nmkt} = \cap \{H_\beta^{nmkt} \mid \beta \in B_m\}$. Тогда H_{nmkt} и fH_{nmkt} являются F_σ-множествами, а $f \mid H_{nmkt}$ есть гомоморфизм. Легко заметить, что $f(\cup \{H_{nmkt} \mid n, m, k, t = 1, 2, \dots\}) \supseteq Y \setminus NI_f$. Доказательство теоремы завершено.

Вопрос 1. Пусть $f: X \to Y$ — открытое s-отображение метрического пространства X на метрическое пространство Y. Верно ли неравенство $\dim Y \leq \dim X$?

Положительный ответ на вопрос 1 дал бы не только окончательное обобщение теоремы 3, но и теоремы А. Д. Тайманова [4]. Для не s-отображений ответ на вопрос 1 отрицателен.

Построение 1. Рассмотрим отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ и подмножество $L \subseteq Y$. Для каждой точки $y \in Y$ фиксируем точку $x(y) \in f^{-1}(y)$ и положим $X_y = (X \setminus f^{-1}(y)) \cup \{x(y)\}$ и $f_y = f \mid X_y$. Через X_L обозначим дискретную сумму пространств $\{X_y \mid y \in Y \setminus L\}$, а $f_L: X_L \to Y$ таково, что $f_L \mid X_y = f_y$ для всех $y \in Y \setminus L$.

Свойство 1. Если X метризуемо или совершенно нормально, то таково и X_L, а $\dim X_L = \dim X$ и $\operatorname{Ind} X_L = \operatorname{Ind} X$.

Свойство 2. Если X есть совершенно нормальное полное в смысле Чеха пространство, то таково и X_L.

Свойство 3. Всегда $L \supseteq NI_{f_L}$ и $w\, X_L = wX + |Y \setminus L|$. Если же $I_f = \varnothing$, то $L = NI_{f_L}$.

Свойство 4. Если f открыто, то и f_L открыто.

Теорема 4. *Пусть Y — полное метризуемое пространство и $L \subseteq Y$. Тогда существуют полное нульмерное метризуемое пространство S и такое открытое одозначное непрерывное отображение $g: S \xrightarrow{\text{на}} Y$, что $NI_g = L$ и $wS = wY + \aleph_0 + |Y \setminus L|$.*

Доказательство. В силу теоремы А. В. Архангельского [5], существуют полное нульмерное метрическое пространство X и открытое бикомпактное отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$. Можем считать, что $I_f = \varnothing$, ибо в противном случае вместо X мы рассматривали бы $X \times K$, а вместо f — композицию из f и проекции $X \times K$ на X. Построение 1 и свойства 1—4 завершают доказательство теоремы.

Построение 2. Рассмотрим отображение $f: X \to Y$ бикомпакта X на Y и подмножество $L \subseteq Y$. Для каждой точки $y \in Y$ в X склеиваем в одну точку множество $f^{-1}(y)$, а полученное фактор-пространство обозначим через X_y. Существует естественное отображение $f_y: X_y \xrightarrow{\text{на}} Y$, где $f_y^{-1}(y)$ одноточечно. Обозначим через X_L дискретную сумму $\{X_y \mid y \in Y \setminus L\}$, а $f_L: X_L \to Y$ таково, что $f_y = f_L | X_y$. Из теоремы Мардешича [16, с. 304] вытекает существование такого бикомпактного расширения S пространства X_L, что $\dim S = \dim X_L$ и $wS = wX_L$, а f_L продолжается до непрерывного отображения $g: S \to Y$. Если отображение f индуктивно открыто, то таково и g.

Из построения 2 и результатов работы [5] вытекает

Теорема 5. *Для каждого бикомпакта Y и подмножества $L \subseteq Y$ существуют такие нульмерный бикомпакт S и индуктивно открытое непрерывное отображение $g: S \xrightarrow{\text{на}} Y$, что $NI_g \subseteq L$ и $wS \leq wY + |Y \setminus L|$.*

Приведенные выше результаты показывают, что разработанный П. С. Александровым метод исследования множеств I_f и NI_f применим к s-отображениям и пространствам, близким к метризуемым. В общем случае размерностные свойства подмножеств I_f и NI_f оценить невозможно.

2. Пространства и отображения. Пусть заданы пространство X, подпространство $L \subseteq X$, открытые покрытия $\{\gamma_n = \{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ пространства X и отображения $\{\pi_n: A_{n+1} \to A_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, для которых выполняются некоторые из условий:

1°. $U_\alpha = \cup\{U_\beta \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\} = \cup\{[U_\beta] \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\beta)\}$ для всех $\alpha \in A_n$ и $n = 1, 2, \ldots$

2°. Если множества $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ замкнуты в X, $F_n \cap L \neq \varnothing$ и существует такая последовательность $\{\alpha_n \in A_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, что $F_n \subseteq U_{\alpha_n}$ и $\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то:

а) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \cap L) \neq \varnothing$; б) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \cap L)$ есть бикомпакт.

Эти условия позволяют ввести следующие понятия:

1. Если $L = X$ и выполняются условия 1° и 2°а, то X называется слабо А-полным пространством, а покрытия $\{\gamma_n\}$ и отображения $\{\pi_n\}$ образуют

слабую А-структуру на X. Если же выполяется и условие 2°б, то X называется А-полным пространством, а $\{\gamma_n\}$ и $\{\pi_n\}$ образуют А-структуру на X.

2. Если задано отображение $f:X\to Y$ и существуют покрытия $\{\gamma_n\}$ и отображения $\{\pi_n\}$ такие, что для каждого $L=f^{-1}(y)$, где $y\in Y$, выполняются условия 1° и 2°а, то f называется равномерно слабо А-полным отображением, а если выполняется и условие 2°б, то f называется равномерно А-полным отображением. В этом случае будем говорить, что отображение f равномерно (слабо) А-полно относительно $\{\gamma_n, \pi_n\}$.

Введенные выше понятия изучены в работах [19; 20; 21]. Открытый образ полного в смысле Чеха пространства является А-полным пространством. Все бикомпактные отображения и все отображения А-полных пространств являются равномерно А-полными отображениями.

Для каждого отображения $f: X\to Y$ положим $P_f=\{y\in Y\,|\,f^{-1}(y)$ содержит замкнутое счетнокомпактное множество, допускающее непрерывное однозначное отображение на $K\}$ и $K_f=\{y\in Y\,|\,f^{-1}(y)$ содержит не разреженный бикомпакт$\}$. Имеем включения $R_f\subseteq I_f$ и $K_f\subseteq P_f\cap NR_f$. Если отображение f равномерно слабо А-полно, то $P_f\subseteq NR_f$, а для равномерно А-полного отображения f всегда $K_f=NR_f$ (см. [11], [21]).

3. Рассеянные отображения. Определение. *Отображение $f:X\to Y$ называется:*

1) *рассеянным, если для любого непустого подпространства $Y'\subseteq Y$ найдется непустое открытое в $f^{-1}Y'$ множество U, для которого fU открыто в Y' и $f|U$ есть гомеоморфизм;*

2) *слабо рассеяно, если для любого непустого подпространства $Y'\subseteq Y$ найдется непустое подмножество $U\subset f^{-1}Y'$, для которого fU открыто в Y', $f|U$ есть гомеоморфизм;*

3) *сильно рассеяно, если для любого непустого открытого в X множества V отображение $f|V$ на пространство fV рассеяно.*

Любое отображение на разреженное пространство слабо рассеяно. Если отображение $f:X\to Y$ рассеяно, то $Nf_f=\emptyset$. Если $f:X\to Y$ есть сильно рассеянное отображение на разреженное пространство Y, то каждое открытое непустое подмножество пространства X содержит изолированную точку.

Легко доказывается

Лемма 1. *Пусть $f:X\to Y$ — слабо рассеянное отображение T_1-пространства X на T_1-пространство Y. Тогда существуют порядковое число $r(f)$ и трансфинитная последовательность $\{U_\sigma\,|\,\alpha<r(f)\}$ подмножеств пространства X, для которых:*

1. *$Y=U\{fU_\alpha\,|\,\alpha<r(f)\}$;*

2. *$f|U_\alpha$ — гомеоморфизм и $\cup\{fU_\beta\,|\,\beta<\alpha\}$ открыто в Y для всех $\alpha<r(f)$;*

3. *Если отображение f рассеяно, то множество U_α открыто в $f^{-1}fU_\alpha$;*

4. *Если же отображение f сильно рассеяно, то множество точек локальной топологичности отображения f всюду плотно в пространстве X.*

Значение рассеянных отображений раскрывается следующей универсальной теоремой.

Теорема 6. *Рассмотрим слабо рассеянное отображение $f:X\to Y$ T_1-пространства X на регулярное пространство Y и топологические свойства Ω и Q, для которых: свойства Ω и Q наследственны по зам-*

кнутым подпространствам; если замкнутое подпространство $Z \subseteq Y$ удовлетворяет свойству Ω и локально свойству Q, то Z удовлетворяет свойству Q; если $Z = F \cup M \subseteq Y$ удовлетворяет свойству Ω и замкнуто в Y, F удовлетворяет свойству Q и замкнуто в Y, $F \cap M = \emptyset$ и M локально удовлетворяет свойству Q, то и Z удовлетворяет свойству Q. Тогда, если X удовлетворяет локально свойству Q, а Y удовлетворяет свойству Ω, то Y удовлетворяет свойству Q.

Доказательство. Достаточно доказать, что Y локально удовлетворяет свойству Q. Пусть трансфинитная последовательность $\{U_\alpha \mid \alpha < r(f)\}$ удовлетворяет условиям 1—3 леммы 1. Допустим, что $\cup \{U_\beta \mid \beta < \alpha\}$ удовлетворяет локально свойству Q и фиксируем точку $y \in f U_\alpha$. Фиксируем окрестность O_y точки y в Y такую, что $[O y] \subseteq \cup \{f U_\beta \mid \beta \leq \alpha\}$. Положим $F = [Oy] \setminus \cup \{f U_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Тогда $\varphi = f^{-1} F \cap U_\alpha$ замкнуто в X и $f \mid \varphi$ — гомеоморфизм. Значит, F локально удовлетворяет свойству Q, а в силу сделанных предположений и множество $[Oy]$ удовлетворяет свойству Q. Следовательно, Y локально удовлетворяет свойству Q. Теорема доказана.

В дальнейшем Ω будет выражать свойства типа компактности, а Q — свойства типа размерности.

Определение. *Семейство $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ наследственно консервативно, если $[U\{L_\alpha \subseteq H_\alpha \mid \alpha \in A\}] = \cup \{[L_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ для любого семейства $\{L_\alpha \subseteq H_\alpha \mid \alpha \in A\}$.*

Определение. *Семейство ω $\aleph_0$-консервативно, если $\omega = \cup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, где ω_1 наследственно консервативно и замкнуто $(\cup \{L \in \omega_i\}) \cap (\cup \{L \in \omega_j\}) = \emptyset$ при $i \neq j$ и для любого $n > 1$ семейство ω_n наследственно консервативно и замкнуто в $X \setminus \cup \{L \in \cup_{i=1}^{n-1} \omega_i\}$.*

Определение. *Пространство X L-паракомпактно, если в любое открытое покрытие можно вписать $\aleph_0$-консервативное покрытие. Если в любое открытое покрытие пространства X можно вписать $\aleph_0$-консервативное покрытие из F_σ-множеств, то пространство X называется L_σ-паракомпактным пространством.*

Определение. *Множество U называется L-множеством пространства X, если существует такое $\aleph_0$-консервативное семейство γ, что $U = \cup \{M \in \gamma\}$. Пространство X сильно нормально, если каждое его открытое множество является L-множеством.*

Определение. *Множество U называется LD-множеством пространства X, если существует такое дизъюнктное $\aleph_0$-консервативное семейство γ из F_σ-множеств пространства X, что $U = \cup \{M \in \gamma\}$. Пространство X называется ультранормальным, если для любых отделенных множеств F и Φ существуют такие открытые дизъюнктные LD-множества U и V, что $F \subseteq U$ и $\Phi \subseteq V$.*

Ультранормальные пространства наследственно нормальны. Эти понятия обобщают ряд понятий, введенных в работах [17, 22—25]. Несомненное достоинство введенных выше понятий — разумная их широта.

Без труда доказываются следующие утверждения:

А. *Каждое слабо паракомпактное T_0-пространство L-паракомпактно. Каждое нормальное (наследственно нормальное) наследственно слабо паракомпактное пространство сильно (ультра) нормально.*

В. *Каждое θ-измельчающееся T_0-пространство [26] L-паракомпактно. Каждое нормальное (наследственно нормальное) наследственно θ-измельчающееся пространство сильно (ультра) нормально.*

C. *Каждое σ-паракомпактное пространство L-паракомпактно. Каждое нормальное (наследственно нормальное) наследственно σ-паракомпактное пространство сильно (ультра) нормально. Пространство σ-паракомпактно, если в любое открытое покрытие можно вписать замкнутое σ-дискретное покрытие.*

D. *Каждое L-паракомпактное совершенно нормальное пространство σ-паракомпактно.*

E. *Свойство быть L-паракомпактным пространством сохраняется при замкнутых отображениях и инвариантно при совершенных отображениях. Свойство быть сильно нормальным пространством сохраняется при замкнутых отображениях.*

Имеют место утверждения:

F. *Если ω есть $\aleph_0$-консервативное покрытие пространства X, то* $\dim X = \sup\{\dim F \mid F$ замкнуто в $X, F \subseteq H \in \omega\}$.

Доказательство. Для наследственно консервативных замкнутых семейств утверждение доказывается так же, как и теорема Катетова — Мориты [16, с. 282]. Теоремы 15 и 16 из [16, с. 270 и 271] завершают доказательство утверждения. Из утверждения F вытекает:

G. *Для L-паракомпактного пространства X имеем* $\dim X = \operatorname{locdim} X$.

H. *Если Y есть подпространство наследственно нормального сильно нормального пространства X, то* $\dim Y \leqq \dim X$.

Доказательство. Для открытых подпространств неравенство вытекает из утверждения F. Предложение Лифанова [16, с. 280] завершает доказательство утверждения.

I. *Пусть ω есть дизъюнктное $\aleph_0$-консервативное покрытие из F_σ-множеств наследственно нормального пространства X. Тогда* $\operatorname{Ind} X = \sup\{\operatorname{Ind} P \mid P \in \omega\}$.

Замечание. Понятие дизъюнктного $\aleph_0$-консервативного покрытия совпадает с понятием чешуйчатого покрытия [22], [24].

Доказательство. Имеем $\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i$, где семейство ω_1 замкнуто и дискретно в X, а при $i < 1$ семейство ω_i замкнуто и дискретно в $X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \{L \in \omega_j\}$. Поэтому для $X_n = \bigcup\{L \in \omega_n\}$ имеем $\operatorname{Ind} X_n = \sup\{\operatorname{Ind} P \mid P \in \omega_n\}$. Равенство $\operatorname{Ind} X = \sup\{\operatorname{ind} X_n \mid n = 1, 2 \ldots\}$ вытекает из аддиционной теоремы Даукера [16, с. 401].

J. *Свойство быть ультранормальным пространством наследственно по всем подпространствам. Для любого подпространства Y ультранормального пространства X имеем* $\operatorname{Ind} Y \leqq \operatorname{Ind} X$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе докажем по индукции. Пусть утверждение верно, как только $\operatorname{Ind} X < n$, и рассмотрим случай $\operatorname{Ind} X = n$. Рассмотрим замкнутые дизъюнктные множества F и Φ пространства Y. Существуют дизъюнктные открытые множества U и V, для которых $F \subseteq U$ и $\Phi \subseteq V$. Имеем $\operatorname{Ind} U \leqq \operatorname{Ind} X$. Существует такое открытое в X множество W, что $F \subseteq W \subseteq U$, $[W] \cap Y \leq U$ и $\operatorname{Ind} (H = ([W] \cap U) \setminus W) \leqq n-1$. Это возможно, поскольку множество F замкнуто в $U \cup Y$. Тогда $H \cap Y$ есть перегородка между F и Φ в Y и по предположению индукции $\operatorname{Ind} (H \cap Y) \leqq \operatorname{Ind} H \leq n-1$. Доказательство завершено.

K. *Пусть ω есть $\aleph_0$-консервативное покрытие ультранормального пространства Z. Тогда* $\operatorname{Ind} Z = \sup\{\operatorname{Ind} P \mid P \in \omega\}$. *В частности,* $\operatorname{Ind} X = \operatorname{loc} \operatorname{Ind} X$ *для любого ультранормального L-паракомпактного пространства X.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции относительно $n=\sup\{\mathrm{Ind}\ P \mid P\in\omega\}$. Для $n=0$ утверждение вытекает из утверждения F. Пусть утверждение верно как только $n<k$ и докажем его для $n=k$. В силу теоремы Даукера [16, с. 401] достаточно рассмотреть случай, когда ω есть замкнутое наследственно консервативное семейство. Предположим, что $\omega=\{P_\alpha \mid \alpha\in A\}$, где множество A вполне упорядочено. Фиксируем дизъюнктные замкнутые в Z множества F и Φ. Положим $Z_\alpha=\cup\{P_\beta \mid \beta<\alpha\}$. Построим открытые в Z_α множества U_α и V_α и замкнутые в Z множества C_α такие, что $F\cap Z_\alpha\subseteq U_\alpha$, $\Phi\cap Z_\alpha\subseteq V_\alpha$, $U_\alpha\cap V_\alpha=\varnothing$, $U_\alpha\cup V_\alpha=Z_\alpha\setminus C_\alpha$, $\mathrm{Ind}\ C_\alpha<k$, $U_\beta\subset U_\alpha$ $C_\beta\subset C_\alpha$ и $V_\beta\subseteq V_\alpha$, где $\beta<\alpha$. Множества U_1, V_1, C_1 легко строятся. Пусть объекты U_α, V_α, C_α построены для всех $\alpha<\xi$. Положим $Y_\xi=Z_\xi\setminus\cup\{C_\alpha \mid \alpha<\xi\}$, $F_\xi=(F\cap Y_\xi)\cup\cup\{U_\alpha \mid \alpha<\xi\}$, $\Phi_\xi=(\Phi\cap Y_\xi)\cup\cup\{U_\alpha \mid \alpha<\xi\}$. По предположению индукции $\mathrm{Ind}\ (\cup\{C_\alpha \mid \alpha<\xi\}=\cup\ \{C_\alpha\cap P_\alpha \mid \alpha<\xi\}<k$. В силу утверждения F имеем $\mathrm{Ind}\ (Y_\xi\cap P_\xi)\leq \mathrm{Ind}\ P_\xi\leq k$. Так как множества F_ξ и Φ_ξ замкнуты в Y_ξ, тогда (см. [17, теорема 2.2.4, с. 172]) существуют открытые в Z_ξ множества U_ξ и V_ξ, замкнутое в Y_ξ множество C'_ξ, для которых $U_\xi\cap V_\xi=\varnothing$, $U_\xi\cup V_\xi=Y_\xi\setminus C'_\xi$ и $\mathrm{Ind}\ C'_\xi<k$. По теореме Даукера [16, с. 401] имеем $\mathrm{Ind}\ (C_\xi=C'_\xi\cup\cup\{C_\alpha \mid \alpha<\xi\})<k$. Объекты U_ξ V_ξ и C_ξ построены. Тогда $C=\cup\{C_\alpha \mid \alpha\in A\}$ есть перегородка между F и Φ. По построению, семейство $\{C_\alpha\cap P_\alpha \mid \alpha\in A\}$ замкнуто и консервативно. Поэтому по предположению индукции имеем $\mathrm{Ind}\ (C=\cup\{C_\alpha\cap P_\alpha \mid \alpha\in A\})<k$. Первое утверждение доказано. Второе утверждение вытекает из первого. Доказательство завершено.

Легко доказывается утверждение

L. *Каждое L-паракомпактное пространство счетно паракомпактно. Каждое счетнокомпактное L-паракомпактное T_0-пространство бикомпактно.*

Из теоремы 6, утверждений А—L и ряда теорем из [16] (теорема 20, с. 282; следствие 1 и теорема 16, с. 271; теоремы 2 и 3, с. 401) вытекают:

Следствие 1. *Пусть $f: X\to Y$ есть слабо рассеянное отображение на L-паракомпактное пространство Y. Тогда* :

1. $\dim Y\leq \mathrm{locdim}\ X$;

2. *Если Y ультранормально, то* $\mathrm{Ind}\ Y\leq \mathrm{loc\ Ind}\ X$;

3. *Если Y наследственно нормально и сильно нормально, а X или счетномерно, или сильно счетномерно, то таково, соответственно, и пространство Y*;

4. *Если пространство Y ультранормально, а* X Ind-*счетномерно, то и Y* Ind-*счетномерно*;

5. *Если X локально А-слабо бесконечномерно, то и Y А-слабо бесконечномерно.*

Следствие 2. *Пусть $f: X\to Y$ — слабо рассеянное отображение на наследственно нормальное пространство Y. Если для X определена трансфинитная размерность* ind X, *то и для Y определена трансфинитная размерность* ind Y.

Известно, что S-слабая бесконечномерность в ряде случаев определяется через размерность dim, A-слабую бесконечномерность и бикомпактность (Е. Г. Скляренко [16, с. 539]. Справедливо следующее утверждение.

М. *Пусть X—L-паракомпактное пространство. Пространство X S-слабо бесконечномерно тогда и только тогда, когда существует такой*

A-слабо бесконечномерный бикомпакт $F \subset X$, что $\dim(X \setminus U) < \infty$ *для каждого открытого в X множества $U \supseteq F$.*

Доказательство. Вытекает из утверждений L и G и теорем Е. Г. Скляренко [16, теоремы 24 и 25, с. 539].

Определение. *Пусть δ и $\varkappa$ два топологических инварианта. Пространство X обладает свойством $(\delta, \varkappa)$, если в X существует такой бикомпакт F, что F удовлетворят свойству $\varkappa$ и для каждого открытого в X множества $U \supseteq F$ подпространство $X \setminus U$ удовлетворяет свойству δ.*

Предложение 1. *Пусть заданы топологические инварианты δ и $\varkappa$, классы пространств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ и класс отображений $\mathscr{L}$, для которых:*

1) *классы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ наследственны по замкнутым подпространствам;*

2) *если задано отображение $f: X \to Y$, где $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{B}$, $f \in \mathscr{L}$ и F замкнуто в Y, то $f | f^{-1} F = f \in \mathscr{L}$;*

3) *пусть задано отображение $f: X \to Y$, где $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{B}$ и $f \in \mathscr{L}$. Если для X определен инвариант δ (соответственно $\varkappa$), то и для Y определен инвариант δ (соответственно $\varkappa$).*

Тогда отображения $f: X \to Y$, где $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{B}$ и $f \in \mathscr{L}$, сохраняют свойство $(\delta, \varkappa)$.

Доказательство. Вытекает из определения свойства $(\delta, \varkappa)$ и условий 1—3 предложения 1.

Из предложения 1 и утверждения M вытекает

Теорема 7. *Пусть $f: X \to Y$ — слабо рассеянное отображение S-слабо бесконечномерного пространства X на L-паракомпактное пространство Y. Тогда Y S-слабо бесконечномерно.*

Следствия 1 и 2 и теорема 7 указывают на значение рассеянных отображений. Отметим, что разреженные отображения, введенные Б. А. Пасынковым и Р. Н. Ормоцадзе [27], рассеяны. В следующем параграфе приведем критерии рассеянности отображений.

4. Разреженные отображения. Метод А. Н. Колмогорова. Отображение $f: X \to Y$ разрежено, если $NR_f = \varnothing$.

Замечание. Понятия разреженности в нашем смысле и в смысле работы [27] неидентичны.

Теорема 8. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое не рассеянное отображение регулярного пространства X на регулярное слабо A-полное пространство Y. Тогда:*

1°. *Если отображение f равномерно A-полно, то $K_f = NR_f \neq \varnothing$;*

2°. *Если отображение f равномерно слабо A-полно, то $P_f \neq \varnothing$.*

Доказательство. Можем считать, что f не содержит точек локальной топологичности. Пусть отображение f равномерно (слабо) A-полно относительно покрытий $\{\xi_n = \{V^n_\beta \mid \beta \in B_n\}$ и отображений $\{p_n: B_{n+1} \to B_n\}$, а покрытия $\{\gamma_n = \{U^n_\beta \mid \alpha \in A_n\}$ и отображения $\{\pi_n: A_{n+1} \to A_n\}$ образуют слабую A-структуру на Y. При помощи математической индукции будут построены непустые открытые в X множества $W_{i_1 i_2 \ldots, i_n}$, открытые в Y множества Q_n, элементы $\alpha_n \in A_n$ и $\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in B_n$, где $i_j = 0, 1$ и $j \leq n = 1, 2, \ldots$, для которых:

1. $[W_{i_1 i_2 \ldots i_n}] \subseteq U^n_{\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n}}$ и $[O_n] \subseteq U^n_{\alpha_n}$.
2. $[W_{i_1 i_2 \ldots i_n 0}] \cap [W_{i_1 i_2 \ldots i_n 1}] = \varnothing$ и $[W_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}}] \subseteq W_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.
3. $\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ и $P_n(\beta_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}}) = \beta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.
4. $f W_{i_1 i_2 \ldots i_n} = O_n \supseteq [O_{n+1}]$.

При $n=1$ указанные выше объекты строятся легко. Допустим, что эти объекты построены для всех $n \leqq k$. Теперь построим их для $n=k+1$. Фиксируем такой элемент $\alpha_{k+1} \in \pi_k^{-1}(\alpha_k)$, что $O_k \cap U^{k+1}_{\alpha_{k+1}} \neq \varnothing$. Все кортежи $i_1 i_2 \dots i_k$ упорядочим $(i_1^j i_2^j \dots i_k^j \mid j \leqq 2^k\}$. Для первого кортежа $i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1$ выбираем элементы $\beta_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0} = \beta_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 1} \in p_k^{-1}(\beta_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1})$, открытые в X множества $L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0}$ и $L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 1}$, открытое в Y множество $H_1^k \neq \varnothing$ такие, что $[L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0} \cup L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 1}] \subseteq W_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1} \cap U^{k+1}_{\beta_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0}}$, $[L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0}] \cap [L_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 1}] = \varnothing$ и $fL_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 0} = fL_{i_1^1 i_2^1 \dots i_k^1 1} = H_1^k \subseteq [H_1^k] \subseteq O_k \cap U^{k+1}_{\alpha_{k+1}}$. Если непустые множества $L_{i_1^m i_2^m \dots i_k^m i_{k+1}}$ и H_m^k и элементы $\beta_{i_1^m i_k^m \dots i_k^m i_{k+1}}$ построены, как при $m=1$, то и следующие множества строятся таким же образом, но только с условием $H^k_{m+1} \subseteq H^k_m$. Существование таких объектов вытекает из условия несуществования точек локальной топологичности отображения f. Положим $O_{k+1} = \cap \{H_m^k \mid m \leqq 2^k\}$ и $W_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} = L_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} \cap f^{-1} O_{k+1}$. Искомые объекты построены для $n=k+1$.

В силу условия 2°а из 2, имеем $H = \cap_{k=1}^{\infty} O_k \neq \varnothing$. Выбираем точку $y_0 \in H$. Положим $F_{i_1 i_2 \dots i_k} = [W_{i_1 i_2 \dots i_k}] \cap f^{-1}(y_0)$. Построенные множества удовлетворяют условиям:

5. $F_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap F_{i_1 i_2 \dots i_n 1} = \varnothing$ и $F_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}} \subseteq F_{i_1 i_2 \dots i_n} \neq \varnothing$.

6. Множество $F_i = \cap_{n=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ не пусто и счетнокомпактно для любой последовательности $i = (i_1 i_2 \dots i_m \dots) \in K$.

7. Если U открыто в X и $U \supseteq F_i$, то $U \supseteq F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ для некоторого натурального числа n.

Условия 5 и 6 очевидны. Докажем условие 7. Допустим обратное. Тогда $U^n_{\beta i_1 i_2 \dots i_n} \supseteq \Phi_n = F_{i_1 i_2 \dots i_n} \setminus U \neq \varnothing$ и $\Phi_{n+1} \subseteq \Phi_n$. Следовательно, в силу условия 2°а из 2, для $L = f^{-1}(y_0)$ имеем $\cap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi \neq \varnothing$, а по построению $\Phi \subseteq F_i \setminus U$. Противоречие. Условие 7 доказано.

Положим $F = \cup \{F_i \mid i \in K\}$ и $\varphi : F \to K$, где $\varphi^{-1}(i) = F_i$. В силу условия 5, отображение φ однозначно, а, в силу условия 6, φ есть счетнокомпактное отображение на K. Докажем, что отображение φ замкнуто. Фиксируем открытое в X множество $U \supseteq \varphi^{-1}(i) = F_i$. В силу условия 7, $U \supseteq F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ для некоторого n. Так как $F \cap F_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varphi^{-1} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, то отображение φ замкнуто и непрерывно. Следовательно, множество F счетнокомпактно и замкнуто в Y, а тогда $P_f \neq \varnothing$. Если отображение f равномерно A-полно, то множества F_i бикомпактны в силу условия 2°б из 2. Тогда отображение φ совершенно, а множество F_i бикомпактно, то есть $K_f \neq \varnothing$.
Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $f : X \to Y$ — открытое равномерно слабо A-полное отображение регулярного пространства X на регулярное слабо A-полное пространство Y. Если $P_f = \varnothing$, то отображение f сильно рассеяно.*

Следствие 4. *Пусть $f : X \to Y$ — открытое равномерно A-полное разреженное отображение на регулярное слабо A-полное пространство Y. Тогда отображение f сильно рассеяно.*

Следствие 5. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое бикомпактное разреженное отображение регулярного пространства X на полное в смысле Чеха вполне регулярное пространство Y. Тогда отображение f сильно рассеяно.*

Следствие 6. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое разреженное отображение вполне регулярного полного в смысле Чеха пространства на регулярное пространство Y. Тогда f сильно рассеяно.*

Замечание 1. Обозначим через U множество точек локальной топологичности отображения $f: X \to Y$. Если отображение f рассеяно, то fU содержит открытое всюду плотное в Y множество, а если же отображение f сильно рассеяно, то множество U всюду плотно в X.

Замечание 2. Теоремы А. Н. Колмогорова [3] и Б. А. Пасынкова [13] вытекают из следствия 6, так как всякое полное в смысле Чеха счетное или σ-дискретное пространство разрежено.

Теорема 8 позволяет решить задачу 2 для свойства $\mathscr{R} = R$. Из теорем 7 и 8 и следствий 1 и 2 вытекает

Следствие 7. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое равномерно A-полное отображение на слабо A-полное пространство Y и выполняется одно из условий:*

Ω_1. $\dim Y > \operatorname{locdim} X$ *и* Y *L-паракомпактно.*

Ω_2. $\operatorname{Ind} Y > \operatorname{loc\,Ind} X$ *и* Y *ультранормально и L-паракомпактно.*

Ω_3. *X счетномерно, а Y есть несчетномерное наследственно нормальное сильно нормальное L-паракомпактное пространство.*

Ω_4. *X A-слабо бесконечномерно, а Y есть A-сильно бесконечномерное L-паракомпактное пространство.*

Ω_5. *X S-слабо бесконечномерно, а Y есть S-сильно бесконечномерное L-паракомпактное пространство.*

Ω_6. *Для X определена трансфинитная размерность* ind X, *Y наследственно нормально, а трансфинитная размерность* ind Y *не определена.*

Ω_7. *X сильно счетномерно, а Y есть сильно несчетномерное сильно нормальное наследственно нормальное L-паракомпактное пространство.*

Ω_8. *X* Ind-*счетномерно, а Y есть* Ind-*несчетномерное ультранормальное L-паракомпактное пространство.*

Тогда $K_f = NR_f \neq \varnothing$.

Замечание 3. В условиях следствия 7 множество $[NR_f]$ обладает теми же качествами, что и Y. Например, в условии Ω_1 имеем $\dim [NR_f] = \dim Y$, а в условии Ω_4 (Ω_5) пространство $[NR_f]$ A-сильно (S-сильно) бесконечномерно. В условиях следствия 7 замкнутые в Y подмножества множества R_f обладают теми же качествами, что и X. Например, если F замкнуто в Y и $F \subseteq R_f$, то $\dim F \leq \dim X$ в условии Ω_1, а в условии Ω_3 пространство F счетномерно. Эти факты дают возможность частично решить задачу 1. Различные требования, присутствующие в вышеуказанных утверждениях, существенны по разным причинам. Требование L-паракомпактности существенно в силу следующих фактов: 1) существуют „хорошие" пространства, удовлетворяющие локально свойству Q, но не удовлетворяющие ему интегрально. Такие пространства, как правило, являются дискретными образами пространств со свойством Q при локально топологических отображениях; 2) существует бесконечномерное в смысле dim совершенно нормальное счетно-компактное пространство, являющееся открытым образом разреженного полного метрического пространства. Требование полноты отображения существенно, так как метризуемые пространства являются открытыми дискретными образами σ-дискретных метризуемых пространств. Требование полноты образа существенно, поскольку даже открытые конечнократные отображения метризуемых пространств не обязаны быть слабо рассеянными. Тем не менее, открытые конечнократные отображения сохраняют ряд важных свойств в силу того, что они близки к рассеянным отображениям.

Рассмотрим открытое отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$. Обозначим $\Psi_f^n = \{y \in Y \mid |f^{-1}(y)| = n\}$, $\Psi_f = \cup_{n=1}^{\infty} \Psi_f^n$, $N\Psi_f = Y \setminus \Psi_f$. Тогда: 1) для каждого n множество $\cup_{i=1}^{n} \Psi_f^i$ замкнуто в Y; 2) для каждого n отображение $f \mid f^{-1} \Psi_f^n$ локально топологично и, в частности, сильно рассеяно. Эти факты позволяют установить справедливость следующих предложений.

Предложение 2. *Для открытых конечнократных отображений справедливо утверждение теоремы 1.*

Предложение 3. *Пусть $f: X \to Y$—непрерывное отображение, $X' \subseteq X$, $fX' = Y$, а $f \mid X'$—открытое конечнократное отображение. Тогда:*

1. *Если Y есть L-паракомпактное пространство, то верны утверждения 1—4 следствия 1;*

2. *Если для X определена трансфинитная размерность* ind *X и Y наследственно нормально, то для Y определена трансфинитная размерность* ind *Y;*

3. *Если Y L-паракомпактно, а X S-слабо бесконечномерно, то и Y S-слабо бесконечномерно.*

Предложение 4. *Пусть $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$—открытое отображение и выполняется одно из условий $\Omega_1 - \Omega_8$ следствия 7. Тогда $N\Psi_f \neq \varnothing$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. О некоторых основных направлениях в общей топологии. *Успехи мат. наук*, № 6, **19**, 1964, 3—46.
2. П. С. Александров. О счетнократных открытых отображениях. *ДАН СССР*, **4**, 1936, 283—288.
3. А. Н. Колмогоров. Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов. *ДАН СССР*, **30**, 1941, 477—479.
4. А. Д. Тайманов. Об открытых образах борелевских множеств. *Матем. сб.*, **37**, 1955, 293—300.
5. А. В. Архангельский. Отображения открытые и близкие к открытым. Связи между пространствами. *Труды Московск. матем. об-ва*, **15**, 1966, 181—223.
6. А. В. Архангельский. О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова. *Матем. сб.*, **69**, 1966, 13—33.
7. М. М. Чобан. Многозначные отображения и некоторые смежные вопросы *ДАН СССР*, **190**, 1970, 293—296.
8. М. М. Чобан. Общие теоремы о сечениях и их приложения. *Сердика* **4**, 1978, 74—90.
9. М. М. Чобан. Об изолированных отображениях. Материалы VII Всесоюзной топологической конференции, Минск, 1977.
10. М. М. Чобан. Отображения и размерностные свойства пространств. Материалы международной топологической конференции, М., 1979.
11. М. М. Чобан. Отображения и размерностные свойства пространств. *Успехи мат. наук*, 1980 (в печать).
12. Е. Г. Скляренко. Несколько замечаний о бесконечномерных пространствах. *ДАН СССР*, 126, 1959, 1203—1206.
13. Е. Г. Скляренко. Две теоремы о бесконечномерных пространствах. *ДАН СССР*, 143, 1962, 1053—1056.

14. Ю. М. Смирнов. О трансфинитной размерности. *Матем. сб.*, **58**, 1962, 415—422.
15. Б. А. Пасынков. Об открытых отображениях. *ДАН СССР*, **172**, 1967, 292—295.
16. П. С. Александров, Б. А. Пасынков. Введение в теорию размерности, М., 1973
17. R. Engelking. Dimension Theory. Warszawa—Oxford—New York, 1978.
18. Б. А. Пасынков, В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. Теория размерности, *Итоги науки и техники: Алгебра. Топология. Геометрия*. **17**. М., 1979, 229—306.
19. H H. Wicke. Open continuous images of certain kinds of M-spaces and completeness of mappings and spaces. *General Topology and Appl.*, **1**, 1971, 85—100.
20. J. Chaber, M. Čoban, K. Nagami. On monotonic generalizations of Moore spaces Čech complete spaces and p-spaces. *Fund. Math.*, **84**, 1974, 107—119.
21. М. М. Чобан. Открытые отображения и классы пространств. В сб.: *Топологические пространства и алгебраические системы*, Кишинев, Штиинца, 1979, 148—173.
22. Б. А. Пасынков. Факторизационная теорема для незамкнутых множеств. *ДАН СССР*, **202**, 1972, 1274—1267.
23. И. К. Лифанов, Б. А. Пасынков. О двух классах пространств и размерности. *Вестник Моск. у-та*, № 3, 1970, 33—37.
24. Л. Г. Замбахидзе, Б. А. Пасынков. Поведение функций размерностного типа в некоторых специальных классах пространств. *Сообщения АН Грузинской ССР*, **79**, 1975, 549—552.
25. T. Nishiura. A subset theorem in dimension theory. *Fund. Math.*, **95**, 1977, 105—109.
26. J. M. Worrell, H. H. Wicke. Characterizations of developable topological spaces. *Canad. J. Math.*, **17**, 1965, 820—830.
27. Р. Н. Ормоцадзе. О приводимых и разреженных отображениях. *Сообщения АН Грузинской ССР*, **92**, 1978, 49—52.

ул. Одесская, 90, кв. 50
Тирасполь, 278 000 Молдавская ССР

Поступила 11. IX. 1981