Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ДВЕ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С МОНОТОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОТКАЗОВ К ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ

Т. А. АЗЛАРОВ, Н. А. ВОЛОДИН

Доказаны теоремы о близости распределенний с монотонной функцией отказов к показательному (в дискретном случае к геометрическому распределению).

1. Рассмотрим неотрицательную случайную величину ξ с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(x)$ и функцией интенсивности отказов $r(x)=F'(x)/(1-F(x))$ определенную на множестве $X=\{x:F(x)<1\}$. Будем говорить, что распределение $F(x)$ принадлежит классу C, если е функция интенсивности отказов $r(x)$ либо не убывает, либо не возрастает для всех $x\in X$. Далее будем полагать $r(0)=\lim_{x\downarrow 0} r(x)$.

Задачи характеризации показательного распределения в классе распределений с возрастающей функцией интенсивности отказов, а также вопросы устойчивости этих характеризаций рассматривались в работах А. Обретенова [1—2]. В данной работе мы сформулируем и докажем некоторые результаты, связанные с оценкой близости распределений из класса C к показательному распределению. Затем мы сформулируем аналогичные оценки близости целочисленных распределений с монотонной интенсивностью отказов к геометрическому распределению.

Обозначим $\bar{F}(x)=1-F(x)$ и $\mu_i=\int_0^\infty x^i dF(x)$, $i=\overline{1,\infty}$.

Теорема 1. *Если* $F(x)\in C$, *то*

$$\sup_{x\geq 0}|\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}|\leq\sqrt{2(1-\mu_1 r(0))(1-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2})}.$$

Теорема 2. *Если* $F(x)\in C$, *то*

$$\sup_{x\geq 0}|\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}|\leq|1-\mu_1 r(0)|.$$

Оценки, полученные в теоремах 1 и 2, являются достижимыми с точностью до постоянной, что показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим случайную величину ξ с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}(1-\varepsilon+\varepsilon x), & \text{если} \quad x\geq 0,\\ 0 \qquad\qquad\quad , & \text{если} \quad x<0,\end{cases} \qquad 0<\varepsilon<1/2.$$

В этом случае $\bar{F}(x)=(1+\varepsilon x)e^{-x}$, $r(x)=1-\varepsilon/(1+\varepsilon x)$, $\mu_1=1+\varepsilon$, $\mu_2=2(1+2\varepsilon)$. Непосредственным подсчетом можно показать, что

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 218—222.

$$\sup_{x \geq 0} | \bar{F}(x) - e^{-x/(1+\varepsilon)} | \geq | \bar{F}(1) - e^{-1/(1+\varepsilon)} | \geq \frac{\varepsilon^2}{8e}$$

при $\varepsilon < 1/2$. Оценки теорем 1 и 2 равны для этого примера соответственно $\varepsilon^2\sqrt{2}/(1+\varepsilon)$ и ε^2.

При помощи теоремы 1 легко получить следующие характеризации показательного распределения.

Следствие 1. *Если $F(x) \in C$, то соотношение $\mu_2 = 2\mu_1^2$ выполнено тогда и только тогда, когда $\bar{F}(x) = e^{-x/\mu_1}$.*

Следствие 2. *Если $F(x) \in C$, то $r(0) = 1/\mu_1$ тогда и только тогда, когда $\bar{F}(x) = e^{-x/\mu_1}$.*

2. Рассмотрим теперь случайную величину ξ, принимающую значения $0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ Для дискретного распределения функцию интенсивности отказов можно определить следующим образом: $r(n) = p_n / \Sigma_{k=n}^{\infty} p_k$ для всех $n \geq 0$, при которых $\Sigma_{k=n}^{\infty} p_k > 0$. Мы скажем также, что распределение $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ принадлежит классу C', если $r(n)$ является либо неубывающей, либо невозрастающей функцией натурального аргумента.

Теорема 3. *Если $\{p_i\}_{i=0}^{\infty} \in C'$, то справедлива следующая оценка:*

$$\sup_{n \geq 0} | \sum_{k=n}^{\infty} p_k - q^n | \leq | 1 - (1+\mu_1) r(0) |, \quad q = \mu_1/(1+\mu_1).$$

Теорема 4. *Если $\{p_i\}_{i=0}^{\infty} \in C'$, то справедлива оценка*

$$\sup_{n \geq 0} | \sum_{k=n}^{\infty} p_k - q^n | \leq \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu_1} [1 - (1+\mu_1) r(0)] [1 - \frac{\sigma^2}{\mu_1(1+\mu_1)}]}, \quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Здесь q — то же, что и в теореме 3, а $\mu_i = \Sigma_{k=1}^{\infty} k^i p_k$, $i = 1, 2, \ldots$.

Следствие 3. *Если $\{p_i\}_{i=0}^{\infty} \in C'$, то $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ является геометрическим распределением тогда и только тогда, когда либо $r(0) = 1(1+\mu_1)$, либо $\mu_2 = 2\mu_1^2 + \mu_1$.*

3. Отметим, что теоремы 1 и 4 уточняют более ранние результаты авторов [3] и А. Обретенова [4]. Для других классов распределений и другими методами оценки близости к показательному распределению были получены в работах [5, с. 103] и [6]. Заметим также, что если для распределений с неубывающей функцией интенсивности отказов все μ_i существуют, то для распределений с невозрастающей $r(x)$ это уже необязательно. Таким образом, когда мы рассматриваем распределения с невозрастающей $r(x)$, то дополнительно предполагается существование μ_1 и μ_2.

4. Докажем теоремы 1 и 2. Доказательство проведем для распределений с невозрастающей $r(x)$, т. к. для распределений с неубывающей $r(x)$ доказательство проводится аналогично.

Введем сопровождающую случайную величину η с функцией распределения $\mu_1^{-1} \int_0^x [1 - F(y)] dy$. Случайная величина η имеет функцию интенсивности отказов

$$r_1(x) = \bar{F}(x) / \int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy.$$

Из того, что $r(x)$ не возрастает, легко показать, что $r_1(x)$ также не возрастает и $r_1(x) \leq r(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=1-F(x)-\frac{1}{\mu_1}\int\limits_x^\infty [1-F(y)]dy. \tag{1}$$

Так как $\varphi(x)=[r_1(x)-r_1(0)]\int_x^\infty [1-F(y)]dy$, то $\varphi(x)\leqq 0$ при всех $x\geqq 0$.

Если обозначить $\Psi(x)=\int_x^\infty [1-F(y)]dy$, то (1) можно преписать в виде $\varphi(x)=-\Psi'(x)-\Psi(x)/\mu_1$. Общее решение этого уравнения имеет вид $\Psi(x)=Ke^{-x/\mu_1}-\int_0^x e^{(y-x)/(\mu_1)}\varphi(y)dy$, где постоянная K находится из граничного условия $\Psi(0)=\mu_1$. Следовательно, $K=\mu_1$ и

$$\Psi(x)=\mu_1 e^{-x/\mu_1}-\int\limits_0^x e^{(y-x)/\mu_1}\varphi(y)dy. \tag{2}$$

С помощью (2) равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}=\varphi(x)-\frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^x e^{(y-x)/\mu_1}\varphi(y)dy. \tag{3}$$

Так как $\varphi(x)\leqq 0$, то из (3) получаем неравенство

$$\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}\geqq\varphi(x). \tag{4}$$

Продифференцируем (1): $\varphi'(x)=-F'(x)+[1-F(x)]/\mu_1=[1-F(x)]\,[1/\mu_1-r(x)]$ Отсюда мы можем получить два неравенства:

$$\varphi'(x)\geqq 1/\mu_1-r(0), \tag{5}$$

$$\varphi'(x)\geqq[1-F(x)]\,[1/\mu_1-r(0)]. \tag{5'}$$

Далее, так как $r(x)$ убывает, то существует единственное $x_0\in[0,\infty)$ такое что $\varphi(x_0)=\min\limits_x\varphi(x)$. Следовательно, с учетом (4):

$$\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}\geqq\varphi(x_0). \tag{6}$$

С другой стороны, из (3) следует

$$\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}\leqq-\frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^x e^{(y-x)/\mu_1}\varphi(y)dy\leqq-\varphi(x_0)\cdot\frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^x e^{(y-x)/\mu_1}dy\leqq-\varphi(x_0). \tag{7}$$

Неравенства (6) и (7) дают

$$\sup_x|\bar{F}(x)-e^{-x/\mu_1}|\leqq|\varphi(x_0)|. \tag{8}$$

Пусть $x\leqq x_0$. Интегрируя (5) от x до x_0, имеем

$$\varphi(x_0)-\varphi(x)\geqq(x_0-x)(1-\mu_1 r(0))/\mu_1.$$

Учитывая, что $\varphi(0)=0$, получаем $\varphi(x_0)\geqq x_0(1-\mu_1 r(0))/\mu_1$. Так как $\varphi'(x)$ монотонно возрастает на $[0,x_0]$, то $\varphi(x)$ на этом интервале выпукла вниз. Поэтому

$$\mu_1-\frac{\mu_2}{2\mu_1}=\int^\infty\varphi(x)dx\leqq\int^{x_0}\varphi(x)dx\leqq\frac{1}{2}x_0\varphi(x_0)\leqq\frac{\mu_1}{2}\varphi^2(x_0)(1-\mu_1 r(0))^{-1}$$

и получаем оценку $\varphi^2(x_0)\leqq 2(1-\mu_1 r(0))(1-\mu_2/2\mu_1^2)$. Подставляя эту оценку в (8), получаем утверждение теоремы 1.

Интегрируя неравенство (5′) от 0 до x_0, получим

$$\varphi(x_0)-\varphi(0)\geqq\left[\frac{1}{\mu_1}-r(0)\right]\int_0^{x_0}\bar F(x)dx\geqq\left[\frac{1}{\mu_1}-r(0)\right]\int_0^{\infty}\bar F(x)dx=1-\mu_1 r(0).$$

Так как $\varphi(0)=0$ и $\varphi(x_0)<0$, то $|\varphi(x_0)|\leqq|1-\mu_1 r(0)|$, что вместе с (8) доказывает утверждение теоремы 2.

Доказательства следствий 1 и 2 тривиальны.

Докажем теоремы 3 и 4. Рассмотрим лишь случай неубывающей $r(n)$.

Пусть η — дискретная случайная величина с распределением $\{\tilde p_n\}$, $\tilde p_n=(1+\mu_1)^{-1}q_n$, где $q_n=p_n+p_{n+1}+\cdots, n\geqq 0$. Для распределения $\{\tilde p_n\}$ функция интенсивности отказов $\tilde r(n)=q_n/\Sigma_{k=n}^{\infty}q_k$ также не убывает по n. Кроме того, $\tilde r(n)\geqq r(n)$, что при $n=0$ дает $p_0(1+\mu_1)\leqq 1$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(n)=q_n-(1+\mu_1)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}q_k. \tag{9}$$

Так как $\tilde r(0)=(1+\mu_1)^{-1}$, то $\varphi(n)$ неотрицательна:

$$\varphi(n)=\sum_{k=n}^{\infty}q_k\left(\tilde r(n)-\frac{1}{1+\mu_1}\right)\geqq\sum_{k=n}^{\infty}q_k\left(\tilde r(0)-\frac{1}{1+\mu_1}\right)=0.$$

Положим $f(n)=\Sigma_{k=n}^{\infty}q_k$ и обозначим через $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)=-q_n$. Тогда (9) можно записать так:

$$\varphi(n)=-\Delta f(n)-\frac{1}{1+\mu_1}f(n). \tag{10}$$

Если считать $f(n)$ неизвестной функцией от n, то (10) есть линейное разностное уравнение. Общее решение этого уравнения будет

$$f(n)=\left(\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\right)^n\cdot\left[-\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(\nu)\left(\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\right)^{-\nu-1}+K\right].$$

Постоянную K определяем из условия $f(1)=\mu_1$, и решение имеет вид

$$f(n)=-\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(k)\cdot q^{n-k-1}+\mu_1\cdot q^{n-1},\quad q=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}. \tag{11}$$

Перепишем (9) с помощью (11) следующим образом:

$$q_n-q^n=\varphi(n)-\frac{1}{1+\mu_1}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(k)\cdot q^{n-k-1}, \tag{12}$$

т. к. $\varphi(k)\geqq 0$, то из (12) получаем неравенство

$$q_n-q^n\leqq\varphi(n). \tag{13}$$

Рассмотрим

$$\Delta_n=\varphi(n+1)-\varphi(n)=q_{n+1}-q_n+\frac{q_n}{1+\mu_1}=q_n\left(\frac{1}{1+\mu_1}-r(n)\right). \tag{14}$$

Поскольку $r(n)$ не убывает и $r(0)=p_0\leq\tilde{r}(0)=1/(1+\mu_1)$, то из (14) видно, что сначала Δ_n неотрицательная, а потом меняет знак. Пусть m — единственное число, для которого $r(m)\leq 1/(1+\mu_1)$, $r(m+1)>1/(1+\mu_1)$. Тогда $\max_n \varphi(n)=\varphi(m)$ и используя (13), получаем

$$q_n-q^n\leq\varphi(m) \text{ для всех } n=0, 1, \ldots \tag{15}$$

С другой стороны, из (12) следует

$$q_n-q^n\geq -\frac{1}{1+\mu_1}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(k)q^{n-k-1}\geq -\varphi(m)\cdot\frac{1}{1+\mu_1}\cdot\frac{1}{1-q}=-\varphi(m). \tag{16}$$

Неравенства (15) и (16) дают

$$|q_n-q^n|\leq\varphi(m). \tag{17}$$

Очевидно,

$$\varphi(m)=\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_k\leq\sum_{k=0}^{m-1}q_k\left(\frac{1}{1+\mu_1}-r(0)\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}q_k\cdot\frac{1}{1+\mu_1}(1-(1+\mu_1)r(0))$$
$$=1-(1+\mu_1)\,r(0).$$

Полученная оценка вместе с (17) доказывает теорему 3.

Далее,

$$\varphi(m)\leq\sum_{k=0}^{m-1}q_k\left(\frac{1}{1+\mu_1}-r(0)\right)\leq\frac{m}{1+\mu_1}\,[1-(1+\mu_1)r(0)]$$

и так как $\{\varphi(n)\}$ при $0\leq n\leq m$ выпукла вверх, то

$$\tilde{\varphi}(\infty)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)\geq\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)\geq\frac{m\varphi(m)}{2}\geq\frac{1+\mu_1}{2}\,\varphi^2(m)[1-(1+\mu_1)\,r(0)]^{-1},$$

т. е.

$$\varphi(m)\leq\sqrt{\frac{2\tilde{\varphi}(\infty)}{1+\mu_1}\,[1-(1+\mu_1)r(0)]}.$$

Учитывая, что $\tilde{\varphi}(\infty)=\mu_1[1-\sigma^2/\mu_1(1+\mu_1)]/2$ и используя (17), получаем утверждение теоремы 4.

Доказательство следствия 3 сразу же получается из оценок теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Obretenov. Convergence of IFR-distribution to the exponential one. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 1383—1387.

5. А. Обретенов. Оценка на разликата между рззпределение с растяща функция на интензивност и експоненциалното. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **66**, 1974, 107—112.

3. Т. А. Азларов, Н. А. Володин. О близости к экспоненциальному распределений с монотонной интенсивностью отказов. *Теория вероятн. и ее примен.*, **36**, 1981, 665.

4. А. Обретенов. Оценка отклонения дискретного распределения с возрастающей интенсивностью от геометрического. *Доклады БАН*, **31**, 1978, *501—504*.

5. А. Д. Соловьев. Основы математической теории надежности. Вып. **2**, 3. М., 1975.

6. С. С. Heyde, J. R. Leslie. On moment measures of depature from the normal and exponential laws. *Stochast. Process. and Appl.*, **4**, 1976, 317—328.

Институт математики
Академгородок, ул. Ф. Ходжаева
Ташкент—143 СССР 700 143

Поступила 28. IX. 1981