Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ТОЖДЕСТВА В МЕТАБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$

ДАНИЕЛА Б. НИКОЛОВА

В [4] отмечено, что тождество вида $[x,_m y]=[x,_n y]$ выполняется во всех группах произведения $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$, но такого тождества нет в $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_q$, $\mathfrak{A}^2$, где p, q — простые числа. Цель этой работы — нахождение минимальных тождеств такого вида в многообразии $\mathfrak{A}_{p^s}\mathfrak{A}_{p^t}$, где p — простое число и в многообразии $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$, когда k и l взаимно простые числа. Будет указан также базис тождеств $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$ для произвольных k и l.

1. Введение. 1.1. Обозначения как в [4]:

$\mathfrak{A}$ — абелевое многообразие групп,

$\mathfrak{A}_k$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты k,

C_l или $\{a\}_l$ — циклическая группа порядка l,

$$x^y=yxy^{-1},\ [x,\ y]=xyx^{-1}y^{-1},$$

$$[x,_n y]=[x,\ \underbrace{y,\dots,y}_{n}]=[[x,\ \underbrace{y,\dots,y}_{n-1}],\ y].$$

1.2. Базис тождеств многообразий вида $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l$.

Предложение 1. *Все тождества многообразия $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l$ следуют из тождеств*:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x^{kl}=1, & (1)\\ [x^l,\ y^l]=1, & (2)\\ [x,\ y]^k=1, & (3)\\ [[x,\ y],\ [z,\ t]]=1, & (4)\\ [x^l,\ [y,\ z]]=1. & (5)\end{cases}$$

При этом тождества (1), (2), (3) *достаточны для определения* $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_l$, *когда* $(k,\ l)=1$, *а* (1), (2) *образуют базис тождеств, когда* $l=2$.

Доказательство. (а). Пусть $\mathfrak{M}_1=\mathrm{var}\ (\mathrm{I})$. $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l\subseteq\mathfrak{M}_1$, так как все тождества (I) выполнены в произведении $\mathfrak{A}_k.\mathfrak{A}_l$. Докажем, что $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$. Пусть $G_1\in\mathfrak{M}_1$.

$$G_1^l=\mathrm{gp}\,(g^l,\ g\in G_1).$$

Рассмотрим $G_1^l.G_1'\lhd G_1$, поскольку $G_1^l.G_1'\supset G_1'$. $G_1^l.G_1'$ — абелева, так как в G_1 выполняются тождества (2), (4) и (5). Из тождеств (1) и (3) следует, что $\exp(G_1^l.G_1')=k$. Таким образом $G_1^l.G_1'\in\mathfrak{A}_k.G_1/G_1^lG_1'$ — абелева, поскольку $G_1^l.G_1'\supset G_1'$, с экспонентой l, следовательно $G_1/G_1^l.G_1'\in\mathfrak{A}_l.\mathfrak{M}_1=\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$.

(б) $(k,\ l)=1$.

Обозначим $\mathfrak{M}_2=\operatorname{var}((1),\ (2),\ (3))$. $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l\subseteq\mathfrak{M}_2$. Пусть $G_2\in\mathfrak{M}_2$. Рассмотрим $G_2^l\lhd G_2$. G_2^l — абелева, поскольку (2). Тогда $\exp(G_2^l)=k$ и $G_2^l\in\mathfrak{A}_k$. Пусть $\bar{G}_2=G_2/G_2^l$. $\exp(\bar{G}_2)=l$. $\forall\bar{x}\in\bar{G}_2$, $\forall\bar{y}\in\bar{G}_2$, $[\bar{x},\bar{y}]\in\bar{G}_2$ и тогда $[\bar{x},\bar{y}]^l=1$. Но в $\mathfrak{M}_2$ выполняется тождество (3) и поэтому $[\bar{x},\bar{y}]^k=1$. Так как $(k,l)=1$, то следует, что $[\bar{x},\bar{y}]=1$, т. е. $\bar{G}_2$ — абелевая группа. Мы получили, что $\bar{G}_2\in\mathfrak{A}_l$ и $\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$.

(в) $l=2$.

Рассуждения аналогичны тем в пункте (б), только здесь абелевость группы $\bar{G}_3=G_3/G_3^2$, где $G_3\in\mathfrak{M}_3=\operatorname{var}((1),\ (2))$, следует из того, что $\exp(\bar{G}_3)=2$ и тождество (3) не является необходимым. Этим предложение 1 доказано.

Примерами групп такого типа служат: альтернативная группа A_4: $\operatorname{var}(A_4)=\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ имеет базис тождеств: $x^6=1$, $[x^3,\ y^3]=1$, $[x,\ y]^2=1$, а также группы диэдра D_p порядка $2p$, когда $k=p$ — простое число: $\operatorname{var}(D_p)=\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_2$ имеет базис тождеств: $x^{2p}=1$, $[x^2,\ y^2]=1$.

2. Тождество $[x,_m y]=[x,_n y]$ в многообразиях вида $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$. Поскольку многообразия $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$, $k,\ l\in\mathcal{N}$ — локально-конечные, как произведения локально-конечных $\mathfrak{A}_k=\operatorname{var}(C_k)$ и $\mathfrak{A}_l=\operatorname{var}(C_l)$, то в них выполняется тождество вида:

$$[x,_m y]=[x,_n y],\ m<n. \tag{6}$$

Тождества вида (6), которые выполняются в данной группе G, упорядочены следующим образом: $[x,_{m_1} y]=[x,_{n_1} y]<[x,_{m_2} y]=[x,_{n_2} y]$ тогда и только тогда, когда $(m_1,\ n_1)<(m_2,\ n_2)$ в лексико-графическом смысле (см. [4]). Займемся нахождением минимального тождества такого вида в $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$, в зависимости от чисел $x,\ l\in\mathcal{N}$.

2.1. Тождество (6) в $\mathfrak{A}_{p^s}\mathfrak{A}_{p^t}$.

Предложение 2. *В многообразиях вида* $\mathfrak{A}_{p^s}\cdot\mathfrak{A}_{p^t}$, *где* p — *простое* число, выполняется тождество $[x,_{m+1} y]=[x,_{m+2} y]$, *где* $m=p^t+(s-1)(p-1)p^{t-1}$ *и это тождество — минимальное тождество вида* (6) *в* $\mathfrak{A}_{p^s}\mathfrak{A}_{p^t}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}_{p^s}\mathfrak{A}_{p^t}$. Любая группа G из $\mathfrak{M}$ является расширением группы $A\in\mathfrak{A}_{p^s}$ посредством группы $B\cong G/A\in\mathfrak{A}_{p^t}$ (предполагаем, что $A\neq 1$ и $B\neq 1$, потому что тогда G — абелевая группа и в ней выполнено тождество $[x,\ y]=[x,_2 y]$). Как известно, такая группа вкладывается изоморфно в сплетение $W=A\operatorname{Wr}B$. Так как $\mathfrak{M}$ — локально-конечное многообразие, оно порождается своими конечными группами. Таким образом, для вычисления тождества вида в $\mathfrak{M}$ можно предполагать, что W — конечная группа. Тогда W удовлетворяет условиям теоремы 5.1 Либека [5] и имеет класс энгелевости $m+1$, где $m=p^t+(s-1)(p-1)p^{t-1}$ (см. теорему 6.2 из [5]). Тогда в W выполняется тождество $[x,_{m+1} y]=[x,_{m+2} y]$, и оно является минимальным тождеством вида (6) в $\mathfrak{M}$.

2.2. Тождество (6) в $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_l$, где p — простое число и $(p,\ l)=1$. Известно (см. [6]), что $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_l=\operatorname{var}(T)$, когда $(p,\ l)=1$, где $T=\{a\}_p\operatorname{wr}\{b\}_l$, $|T|=p^l.l$.

$$\forall t\in T,\ t=b^\lambda.c,\ \text{где}\ 0\leq\lambda<l,\ c\in C,\ C=\Pi_{i=0}^{l-1}\times\{a^{b^i}\}_p.$$

Докажем сначала, что если пара чисел $(m_0,\ n_0)$ соответствует паре порождающих элементов $(a,\ b)$ группы T, т. е. $[a,_{m_0} b]=[a,_{n_0} b]$, то в группе T будем иметь тождество $[x,_{m_0+1} y]=[x,_{n_0+1} y]$.

Рассмотрим эндоморфизм φ группы T, сопоставляющий элементу a элемент a^α, где $0<\alpha<p$, и действующий тождественно на $\{b\}_l$. Поскольку $\{a\}_p$ — циклическая группа простого порядка, то φ будет автоморфизмом и паре элементов (a^α, b) соответствует та же пара чисел (m_0, n_0).

С другой стороны,

$$[a,_{m_0} b]=[a,_{n_0} b]\Leftrightarrow[a,_{m_0} b]^{b^\beta}=[a,_{n_0} b]^{b^\beta}\Leftrightarrow[a^{b^\beta},_{m_0} b]=[a^{b^\beta},_{n_0} b],$$

так что паре (a^{b^β}, b) тоже соответствует пара (m_0, n_0).

Рассмотрим теперь произвольный элемент c из абелевого нормального делителя C в T:

$$c=a^{\alpha_0}.(a^b)^{\alpha_1}.(a^{b^2})^{\alpha_2}\ldots(a^{b^{l-1}})^{\alpha_{l-1}},\quad 0\leq\alpha_i<p.$$

Воспользуемся формулами Холла и формулами Либека (лемма 5.4 (iii из [5]), а именно:

если $w_i=b_ic_i$, $b_i\in\{b\}_l$, $c_i\in C$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, $c, c'\in C$, то $[c, w_1, \ldots, w_s]=[c, b_1, \ldots, b_s]$ и $[cc', w_1, \ldots, w_s]=[c, w_1, \ldots, w_s]=[c', w_1, \ldots, w_s]$. Получаем, что:

$$[c, b]=[a^{\alpha_0}, b]\,[(a^b)^{\alpha_1}, b]\ldots[(a^{b^{l-1}})^{\alpha_{l-1}}, b].$$

Из предыдущего следует, что паре (c, b) соответствует та же пара (m_0, n_0)

Наконец, рассмотрим произвольную пару элементов (x, y) из T: $x=b^\lambda.a_1$, $y=b^\mu.a_2$, где $0\leq\lambda, \mu\leq l-1$; $a_1, a_2\in C$. $[x, y]=[b^\lambda a_1, b^\mu a_2]=[a_1, b^\mu]^{b^\lambda}.[b^\lambda, a_2]^{b^\mu}=[a_1^{b^\lambda}, b^\mu][b^\lambda, a_2^{b^\mu}]\in C$. $[x,_2 y]=[[a_1^{b^\lambda}, b^\mu][b^\lambda, a_2^{b^\mu}], b^\mu]=[[a_1', b^\mu].a_2', b^\mu]=[a_1',_2 b^\mu][a_2', b^\mu]$.

Индукцией по n видно, что: $[x,_{n+1} y]=[a_1',_{n+1} b^\mu]\,[a_2',_n b^\mu]$.

Рассмотрим гомоморфизм ($\{a\}_p$ — абелевая группа):

$$\begin{aligned}\psi:\ T&\to T\\ b&\to b^\mu\\ a&\to a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x,_{n_0+1} y]&=[a_1',_{n_0+1} b^\mu]\,[a_2',_{n_0} b^\mu]=[a_1',_{n_0+1} b]\psi.[a_2',_{n_0} b]\psi\\ &=([a_1',_{n_0+1} b].[a_2',_{n_0} b])\psi=([a_1',_{m_0+1} b].[a_2',_{m_0} b])\psi\\ &=[a_1',_{m_0+1} b^\mu].[a_2',_{m_0} b^\mu]=[x,_{m_0+1} y].\end{aligned}$$

Следовательно, в T будем иметь тождество $[x,_{m_0+1} y]=[x,_{n_0+1} y]$.

Определим, какие будут m_0, n_0 для пары порождающих элементов (a, b), с помощью формулы (см. [4], формулу (4))

$$[a,_m b]=a\left(a^{-\binom{m}{1}}\right)^b\left(a^{\binom{m}{2}}\right)^{b^2}\cdots\left(a^{(-1)^k\binom{m}{k}}\right)^{b^k}\cdots\left(a^{(-1)^m}\right)^{b^m} \tag{7}$$

(*i*) $l=2$.

Применяя формулу (7), мы получаем, что $[a,_{n_0} b]=a^r.(a^s)^b$, где:

$$r=\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{2}+\binom{n_0}{4}+\cdots=2^{n_0-1},\quad s=-\binom{n_0}{1}-\binom{n_0}{3}-\binom{n_0}{5}-\cdots=-2^{n_0-1}.$$

Сравнивая $[a, b]=a(a^{-1})^b$ и $[a,_{n_0}b]a^{2^{n_0-1}}.(a^{-2^{n_0-1}})^b$, мы получаем, что если n_0 будет наименьшим целым положительным числом со свойством: $2^{n_0-1}\equiv 1 \pmod p$, то $[a,_1b]=[a,_{n_0}b]$. Это, очевидно, минимальное в лексико-графическом смысле равенство вида (6), соответствующее паре элементов (a, b).

(ii) $l\neq 2$, $(p, l)=1$.

Рассмотрим группу C как векторное пространство V над полем F_p с базисом: $e_1=a$, $e_2=a^b$, $e_3=a^{b^2}, \ldots, e_l=a^{b^{l-1}}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — линейный оператор, действующий на пространство V следующим образом:

$$\mathscr{B}e_i=[e_i, b], \quad i=1, 2, \ldots, l.$$

Тогда оператор $\mathscr{B}$ в заданном базисе имеет матрицу:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=(b_{ij}), \quad 1\leq i, j\leq l.$$

Для пары элементов (c, b), где $c\in C$, выполняется равенство $[c,_1b]=[c,_{n_0}b]$, тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}^{n_0}=\mathscr{B}$.

Характеристическими корнями матрицы B являются числа $\lambda_i=1-\zeta_i$, где $\zeta_i^l=1$, $i=0, 1, \ldots, l-1$. Пусть ζ — первообразный корень степени l, $(p, l)=1$, над полем F_p. Пусть $k=F_p(\zeta)$, $[k : F_p]=\alpha . k$ — это минимальное расширение F_p, содержащее все ζ_i. При этом $k\cong F_{p^\alpha}$, где α — наименьшее целое положительное число, такое, что $l\,(p^\alpha-1)$. В этом поле все ζ_i разные, так как они — корни уравнения $g(x)=x^l-1=0$, а $g'(x)=lx^{l-1}\neq 0$, потому что $\mathrm{char}(k)=p\neq l$. Тогда матрица B подобна диагональной матрице $D=\mathrm{diag}(1-\zeta_0, 1-\zeta_1, \ldots, 1-\zeta_{l-1})$. $B=\Pi^{-1}D\Pi$, где Π — матрица перехода из базиса $\{l_1, l_2, \ldots, l_l\}$ в базис, состоящий из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\lambda_i=1-\zeta_i$, $i=0, 1, \ldots, l-1$.

$$\mathscr{B}^{n_0}=\mathscr{B}\Leftrightarrow B^{n_0}=B\Leftrightarrow D^{n_0}=D.$$

Пусть элементы $\lambda_l=1-\zeta_i$, $i=1, 2, \ldots, l-1$, имеют мультипликативные порядки $\varkappa_i$ над F_p, т. е. $\varkappa_i$ — наименьшие положительные числа, такие, что $\lambda_i^{\varkappa_i}=1$. Обозначим через $r_{p,l}$ наименьшее общее кратное чисел $\varkappa_i$, $i=1, 2, \ldots, l-1$. Тогда $D^{r_{p,l}+1}=D$ и $[a,_1b]=[a,_{r_{p,l}+1}b]$. Ясно, что $r_{p,l}|(p^\alpha-1)$, потому что $\lambda_i\in k^*$, $i\neq 0\Rightarrow \lambda_i^{p^{\alpha-1}}=1$.

Таким образом, из того, что $[a,_1b]=[a,_{r_{p,l}+1}b]$, следует, что в T выполняется тождество $[x,_2y]=[x,_{r_{p,l}+2}y]$. С другой стороны существует пара элементов (b, a), для которой $[b,_2a]=[b,_3a]$ — минимальное равенство вида (6). Итак, верна следующая

Теорема 1. *Пусть p — простое число, $(p, l)=1$. Пусть $\zeta_i^l=1$, $i=0, 1, \ldots, l-1$. Тождество $[x,_2 y]=[x,_{r_{p,l}+2} y]$ является минимальным тождеством вида* (6) *в многообразии $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_l$, если $l\neq 2$, где $r_{p,l}$ — наименьшее общее кратное мультипликативных порядков элементов $\lambda_i=1-\zeta_i$, $i=1, 2, \ldots, l-1$, над конечным полем F_p. Если $l=2$, то минимальным тождеством вида* (6) *в $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_2$ будет $[x,_2 y]=[x,_{n_0+1} y]$, где n_0 — наименьшее натуральное число, такое, что $p|(2^{n_0-1}-1)$.*

Авторогм подсчитаны следующие примеры:

Многообразие	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_7\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_7\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{13}$
Минимальное тождество вида (6)	$2\equiv 4$	$2\equiv 6$	$2\equiv 5$	$2\equiv 5$	$2\equiv 26$	$2\equiv 8$	$2\equiv 10$	$2\equiv 17$	$2\equiv 82$	$2\equiv 12$	$2\equiv 28$

где $m\equiv n$ обозначает, что $[x,_m y]=[x,_n y]$ — тождество в многообразии (см. [4]).

Замечание. Задачу о нахождении чисел $r_{p,l}$ из теоремы 1 можно переформулировать на языке теории чисел следующим образом.

Пусть p — простое число, l — натуральное число, $(p, l)=1$. Рассмотрим все корни l-й степени из единицы над полем F_p и пусть ζ — первообразный корень. Расширение $k=F_p(\zeta)$ является наименьшим расширением поля F_p, которое содержит все корни l-й степени из единицы — оно нормальное и абелево над F_p. При этом, $k\cong F_q$, $q=p^\alpha$, где α — наименьшее целое положительное число, такое, что $l\,|\,(p^\alpha-1)$, поскольку ζ порождает поле k над F_p: если бы, например, $l\,|\,(p^\beta-1)$, $\beta<\alpha$, то первообразный корень ζ степени l из единицы был бы элементом мультипликативной группы меньшего поля F_{p^β}. Из теоремы Ферма—Ойлера ясно, что $\alpha\,|\,\varphi(l)$.

Наша задача — найти порядок $\varkappa$ элемента $1-\zeta$ в мультипликативной группе k^* поля k. Ясно, что $\varkappa\,|\,(p^\alpha-1)$, так как $1-\zeta\in k^*$ и $|k^*|=p^\alpha-1$. Подобное ограничение имеется и для $\varkappa$, а именно: для любого делителя α_1 числа α, $\varkappa$ не делит $p^{\alpha_1}-1$ (иначе $1-\zeta$ лежал бы в подполе $F_{p^{\alpha_1}}\subset F_{p^\alpha}$).

Рассмотрим теперь Q_p — поле p-адических чисел. Пусть η — первообразный корень l-й степени из единицы над полем Q_p. Расширение $K=Q_p(\eta)$ является, при этом, неразветвленным расширением Q_p степени α. Пусть также $\mathfrak{o}$ — кольцо целых элементов поля K, $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}=(\pi)$. При этом $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}\cong F_k\cong k$, и можно предполагать, что при этом изоморфизме η соответствует ζ (см. гл. I [2]).

Обозначим $\varkappa_1=(q-1)/\varkappa$. Тогда в группе F_q^* разрешимо уравнение: $x^{\varkappa_1}=1-\zeta$, а в кольце $\mathfrak{o}$ разрешимо сравнение: $x^{\varkappa_1}\equiv 1-\eta \pmod{\mathfrak{p}}$.

Тогда и символ степенного вычета $((1-\eta)/v)$, соответствующий степени $\varkappa_1$ и нормированию v, связанному с идеалом $\mathfrak{p}$, равен 1 (см. [2], с. 453, упражнение 1.5): $((1-\eta)/v)=1$.

Символ степенного вычета можно, при этом, связать со символом норменного вычета (см. [2], с. 457): $(a, b)_v=(a/v)^{v(b)}$.

Если $b=\pi$, то $v(b)=1$ и получаем $((1-\eta)/v)=(1-\eta, \pi)_v$.

Итак, наша задача может быть переформулирована следующим образом. Найти наибольший делитель $\varkappa_1$ числа $q-1$, такой, что символ норменного вычета $(1-\eta,\ \pi)_v$ (связанный с кмеровым расширением степени $\varkappa_1$ поля K) равен 1. При этом искомый порядок $\varkappa=(q-1)/\varkappa_1$.

Явные вычисления такого символа можно найти, например, в работе И. Р. Шафаревича [3].

Итак, путь вычисления мультипликативного порядка элемента $1-\zeta$ над F_p следующий. Среди всех делителей числа $\varphi(l)$ найти наименьший делитель α, такой, что $l|(p^\alpha-1)$. Потом, среди делителей числа $p^\alpha-1$ найти наибольший делитель $\varkappa_1$, такой, что $(\eta-1,\ \pi)_v=1$. Тогда искомый порядок имеет вид $\varkappa=(p^\alpha-1)/\varkappa_1$.

2.3. Определение минимального тождества вида (1) в многообразиях $\mathfrak{A}_k{\cdot}\mathfrak{A}_l$, когда $(k,\ l)=1$. Верна следующая

Теорема 2. *Пусть $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$, где p_i — простые числа, для $i=1,$ $2,\dots,s$ и l — целое положительное число, такое, что $(k,\ l)=1$. Тогда в многообразии $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l$ минимальным тождеством вида* (6) *является тождество $[x,_2 y]=[x,_{2+D} y]$, где D — наименьшее общее кратное чисел $p_i^{\alpha_i-1}.d_i$, для $i=1,\ 2,\dots,s$, а $d_i=n_i-m_i$ — разницы минимальных тождеств $[x,_{m_i} y]=[x,_{n_i} y]$ в многообразиях $\mathfrak{A}_{p_i}{\cdot}\mathfrak{A}_l$.*

Доказательство. (i) Докажем сначала, что если минимальное тождество вида (6) в $\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}{\cdot}\mathfrak{A}_l$, где p — простое число, а $(p,\ l)=1$, является тождеством — $[x,_m y]=[x,_{m+d} y]$, то искомое тождество в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}{\cdot}\mathfrak{A}_l$ имеет вид — $[x,_m y]=[x,_{m+pd} y]$.

Рассмотрим произвольную группу G из $\mathfrak{A}_{p^\alpha}{\cdot}\mathfrak{A}_l$. $\exists B\lhd G,\ B\in\mathfrak{A}_{p^\alpha},\ G/B\in\mathfrak{A}_l$.

Обозначим $A=\mathrm{gp}\,(b^{p^{\alpha-1}},\ b\in B)\lhd B$.

Так как B абелева, A тоже абелева и, следовательно, $\exp(A)=p$ и $A\in\mathfrak{A}_p$, а $B/A\in\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}$.

С другой стороны, $A\overset{a}{<}B\lhd G\Rightarrow A\lhd G$. Рассмотрим группу G/A. $\exists\ B/A\lhd G/A: B/A\in\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}$, а $(G/A)/(B/A)\cong G/B\in\mathfrak{A}_l$, т. е. $G/A\in\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}{\cdot}\mathfrak{A}_l$. Итак, мы получили следующую схему:

$$1\lhd A\lhd B\lhd G\quad (A\in\mathfrak{A}_p,\ B\in\mathfrak{A}_{p^\alpha},\ G\in\mathfrak{A}_{p^\alpha}\mathfrak{A}_l)$$

$$B/A\quad G/B\quad (B/A\in\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}},\ G/B\in\mathfrak{A}_l)$$

$$G/A\qquad (G/A\in\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\mathfrak{A}_l).$$

Пусть $n=m+d$. Если $[x,_m y]=[x,_n y]$ — минимальное тождество вида (6) в $\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}{\cdot}\mathfrak{A}_l$, то:

$$\forall\, x\in G,\ \forall\, y\in G,\ [x,_n y]=[x,_m y].a,\ \text{где}\ a\in A\in\mathfrak{A}_p.$$

Из тождеств Холла и из того, что $\mathfrak{A}_{p^\alpha}{\cdot}\mathfrak{A}_l$ — метабелевое многообразие, следует, что

$$[x,_{n+1} y]=[[x,_m y]\,.\,a,\ y]=[a,\ y]\,.\,[x,_{m+1} y].$$

Индукцией по r видно, что

$$[x,_{n+r} y]=[x,_{m+r} y].[a,_r y]. \tag{8}$$

Но для пары элементов (a, y) верно следующее:

(9) $$[a,_m y]=[a,_n y], \quad a \in A \in \mathfrak{A}_p.$$

Действительно, рассмотрим группу $H=\mathrm{gp}(a, y)=\{a\}^H\lambda\{y\}$, где нормальный делитель $\{a\}^H \in \mathfrak{A}_p$, а $Y=\{y\} \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}\mathfrak{A}_l$.

$$\exp(Y)=p^\alpha . l \Rightarrow t=|y|\,|p^\alpha l.$$

— если $t|l$. В группе $H \in \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_l \subset \mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\cdot\mathfrak{A}_l$ будет выполнено тождество — $[x,_m y]=[x,_n y]$.

— если $y-p$ — элемент. Так как $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ — локально конечное многообразие, считаем, что G — конечная группа.

$$\exp(G)=p^\alpha . l \,|\, |G| \Rightarrow |G|=p^{\alpha u}l^v.$$

$\forall \bar{x} \in \bar{G}=G/B \in \mathfrak{A}_l$, $|\bar{x}|\,|l$, т. е. в $\bar{G}$ нет p-элементов и тогда $|B|=p^{\alpha u}c$. Но $B \in \mathfrak{A}_{p^\alpha} \Rightarrow \forall\, b \in B$, $|b|\,|p^\alpha \Rightarrow |B|=p^{\alpha u}$. Мы получили, что B-силовская p-подгруппа группы G; при этом она единственная силовская p-подгруппа, так как $B \lhd G$. Таким образом p-элементы a, $y \in B \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}$, следовательно, они коммутируют и равенство (9) имеет место и в этом случае.

— если $t=p^i.l_1$, где $i=1, 2, \ldots, \alpha$; $l_1|l$; $(p, l)=1$. Тогда $Y=\{y\}=C_{p^i}\times C_{l_1}$, так как $(p^i, l_1)=1$. $y=y_1a_1$, $y_1 \in C_{l_1} \in \mathfrak{A}_l$, $a_1 \in C_{p^i} \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}$. Образуем $H_1=\mathrm{gp}(a, y_1)=\{a\}^{H_1}\lambda\{y_1\} \in \mathfrak{A}_p\cdot\mathfrak{A}_l$. $[a, y]=[a, y_1a_1]=[a, y_1]$, так как a, a_1 — p-элементы и тогда a, $a_1 \in B \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}$, следовательно, они коммутируют. Так как $[a,_m y_1]=[a,_n y_1]$ $(H_1 \in \mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\cdot\mathfrak{A}_l)$, то и $[a,_m y]=[a,_n y]$. Этим доказано равенство (9).

Используя (8), получаем:

$$\begin{aligned}
[x,_{m+pd}\, y]&=[x,_{m+pn-pm}\, y]=[x,_{n+(p-1)n-(p-1)m}\, y]\\
&=[x,_{n+(p-1)d}]=[x,_{m+(p-1)d}\, y]\;[a,_{(p-1)d}\, y],\\
[x,_{m+(p-1)d}\, y]&=[x,_{m+(p-1)n-(p-1)m}\, y]=[x,_{n+(p-2)n-(p-2)m}\, y]\\
&=[x,_{n+(p-2)d}\, y]=[x,_{m+(p-2)d}\, y]\;[a,_{(p-2)d}\, y],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[x,_{m+(p-(p-2))d}\, y]&=[x,_{m+2d}\, y]=[x,_{m+2n-2m}\, y]\\
&=[x,_{n+d}\, y]=[x,_{m+d}\, y]\;[a,_d\, y],\\
[x,_{m+d}\, y]&=[x,_n\, y]=[x,_m y].a.
\end{aligned}$$

После умножения левых и правых сторон этих равенств получаем, что

$$[x,_{m+pd}\, y]=[x,_m y]a[a,_d\, y]\;[a,_{2d}\, y]\ldots[a,_{(p-1)d}\, y].$$

Если $[a, y]\neq 1$, то следует, что $a=[a,_d y]=\cdots=[a,_{(p-1)d}\, y]$, так как y действует на группу $\{a\}_p$ без неподвижных точек (если $[a, y]=1$, то тогда равенство (6) выполнено (см. [7])).

Таким образом $[x,_{m+pd}\, y]=[x,_m y]a^p$. Но $a \in A \in \mathfrak{A}_p$, поэтому:

(10) $$[x,_{m+pd}\, y]=[x,_m y], \quad \forall x \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l, \quad \forall y \in \mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l.$$

Докажем, что это минимальное тождество вида (6) в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$, когда $(p, l)=1$. Допустим, что минимальным тождеством в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ является $[x,_{m'} y]=[x,_{n'} y]$, $n'=m'+d'$. Из того, что (10) тоже тождество, следует, что $m'\leqq m$ и $d'|pd$.

Но $\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\cdot\mathfrak{A}_l\subseteq\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ (см. 21. 21 из [1]). Отсюда следует, что кроме минимального тождества $[x,_m y]=[x,_n y]$, в $\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\cdot\mathfrak{A}_l$ выполнено и тождество $[x,_{m'} y]=[x,_{n'} y]$. При этом $m\leqq m'$ и $d|d'$. Получаем, что минимальное тождество в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ имеет вид:

$$[x,_m y]=[x,_{m+d'} y], \text{ где } d|d'p|d.$$

Из того, что p — простое число, следует, что или $d'=d$, или $d'=pd$. Допустим, что $d'=d$. Перейдем тогда к $\mathfrak{A}_{p^{\alpha+1}}\mathfrak{A}_l$ и, используя равенство $d'=d$, получим (уже для минимального тождества в $\mathfrak{A}_{p^{\alpha+1}}\cdot\mathfrak{A}_l$) равенство $d''=d'$ и т. д., т. е. $[x,_m y]=[x,_{m+d} y]$ справедливо в $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_l=\bigvee_{i=1}^{\infty}\mathfrak{A}_{p^i}\cdot\mathfrak{A}_l$, что невозможно. Таким образом, $d'=pd$ и минимальное тождество в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ действительно имеет вид $[x,_m y]=[x,_{m+pd} y]$, если минимальным тождеством в $\mathfrak{A}_{p^{\alpha-1}}\cdot\mathfrak{A}_l$ является $[x,_m y]=[x,_{m+d} y]$.

Вспомним сейчас, что в теореме 1 мы показали, что минимальное тождество вида (6) в $\mathfrak{A}_p\cdot\mathfrak{A}_l$, когда $(p, l)=1$ имеет вид: $[x,_2 y]=[x,_n y]$, $n=2+d$. Тогда в $\mathfrak{A}_{p^\alpha}\cdot\mathfrak{A}_l$ искомое тождество будет: $[x,_2 y]=[x,_{2+p^{\alpha-1}.d} y]$.

(ii) С другой стороны, $\mathfrak{A}_{st}\cdot\mathfrak{A}_l=\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_l\vee\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_l$, когда $(s, t)=1$. Этот факт следует из 21.23 и 21. 34 из [1]. Тогда $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l=\mathfrak{A}_{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}}\mathfrak{A}_l=\bigvee_{i=1}^{s}\mathfrak{A}_{p_i^{\alpha_i}}\mathfrak{A}_l$, $(p_i, l)=1$, $i=1, 2, \ldots, s$.

Если в $\mathfrak{A}_{p_i}\cdot\mathfrak{A}_l$ минимальным тождеством вида (6) является $[x,_2 y]=[x,_{2+d_i} y]$, то в $\mathfrak{A}_{p_i^{\alpha_i}}\cdot\mathfrak{A}_l$ оно $[x,_2 y]=[x,_{2+p_i^{\alpha_i-1}.d_i} y]$. Получаем (см. [4], следствие 3), что в $\mathfrak{A}_k\cdot\mathfrak{A}_l$ искомое тождество выглядит следующим образом:

$$[x,_2 y]=[x,_{2+D} y],$$

где D — наименьшее общее кратное чисел $p_i^{\alpha_i-1}.d_i$, для $i=1, 2, \ldots, s$. Этим теорема доказана.

Автором подсчитаны следующие примеры:

Минимальное тождество вида (6) в / (p,l)	$\mathfrak{A}_p\cdot\mathfrak{A}_l$	$\mathfrak{A}_{p^2}\cdot\mathfrak{A}_l$	$\mathfrak{A}_{p^3}\cdot\mathfrak{A}_l$
(2,3)	$2\equiv5$	$2\equiv8$	$2\equiv14$
(3,2)	$2\equiv4$	$2\equiv8$	
(3,4)	$2\equiv10$	$2\equiv26$	
(7,3)	$2\equiv8$	$2\equiv44$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Нейман. Многообразия групп. М., 1969.
2. Дж. Касселс, А. Фрелих. Алгебраическая теория чисел. М., 1969.
3. И. Р. Шафаревич. Общий закон взаимности. *Матем. сб.* **26**, 1950, 113—146.
4. Д. Б. Николова. Об одном классе тождеств в группах. *Сердика*, **9**, 1983, 189—197.
5. H. Liebeck. Concerning Nilpotent Wreath Products. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **58**, 1962, 443-451.
6. G. Higman. Some Remarks on Varieties of Groups. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **10**, 1959, 165-178.
7. Д. Б. Николова. Групи с комутаторно тъждество на две променливи. Дисертация, С., 1984.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 11. VI. 1981