Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

SOLUTIONS HÖLDERIENNES D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES A CONTRAINTES DISCONTINUES, 2

IORDAN V. IORDANOV

On considère des inéquations variationnelles elliptiques non-coercives à deux contraintes appartenantes par morceaux à l'espace de Sobolev $H^{1,p}$, $p>n$. On établit que les solutions sont des fonctions höldériennes.

La recherche présente est une continuation de [5] où les obstacles étaient en réalité dans l'intérieur du domaine. Ici on étudie le problème de démontrer que les solutions des inéquations variationnelles coercives ou non-coercives sont fonctions höldériennes à la proximité de la frontière. On obtient les résultats grâce à une réduction du problème près du contour à un problème analogue dans l'intérieur d'un domaine convenable. Pour cela on localise le problème originel et on fait une réflexion pair ou impair à travers une partie de la frontière (après un redressement).

On complète et précise certains résultats de [5].

On se sert partout des notations usuelles pour les espaces de Sobolev et de la définition standard pour des inégalités entre leurs éléments (cf. par exemple [5, 6]).

1. Inéquations variationnelles non-coercives à contraintes discontinues. Soit $\Omega\subset R^n$, $n\geqq 2$, un domaine borné; $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω. Au moyen de l'opérateur elliptique

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqq\nu|\xi|^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,\quad \forall\xi\in R^n,\ \text{p. p. }\Omega, \tag{1.2}$$

à coefficients a_{ij} réels, mesurables et bornés, on définit la forme bilinéaire

$$a(u,v)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}dx,\quad u,\ v\in H^1(\Omega). \tag{1.3}$$

On notera par $a_A(u,v)$ des formes bilinéaires analogues où l'intégration se borne dans le domaine $A\subset\Omega$. Soient $E=\bigcup_{l=1}^{e}E_l$, $F=\bigcup_{m=1}^{f}F_m$ où E_l et F_m sont des sous-ensembles fermés de $\overline{\Omega}$ dont les intérieurs sont supposés tels que $\mathrm{Int}\,E_i\cap\mathrm{Int}\,E_j=\emptyset$ et $\mathrm{Int}\,F_i\cap\mathrm{Int}\,F_j=\emptyset$ si $i\neq j$. On fixe des fonctions φ_l, $\psi_m\in H^1(\Omega)$, $l=1,\dots,e$, $m=1,\dots,f$, pour lesquelles

$$\varphi_l\leqq\psi_m \text{ sur } E_l\cap F_m \tag{1.4}$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 9, 1983, p. 289—300.

dans le cas où $E_l \cap F_m \neq \emptyset$. Alors l'ensemble fermé et convexe

(1.5) $$K = K(\Omega;\ E,\ \varphi_1, \ldots, \varphi_e;\ F,\ \psi_1, \ldots, \psi_f)$$

composé de tous les éléments $v \in H^1(\Omega)$ pour lesquels

(1.6) $$\begin{cases} \varphi_l \leq v & \text{sur } E_l,\ l=1, \ldots, e, \\ \psi_m \geq v & \text{sur } F_m,\ m=1, \ldots, f, \end{cases}$$

n'est pas vide. Par la suite on utilisera des notations pareilles à (1.5) sans une description détaillée. Il convient de noter que l'ensemble (1.5) est défini complètement, seulement par les valeurs des contraintes φ_l, $l=1, \ldots, e$, et ψ_m, $m=1, \ldots, f$, sur les ensembles correspondants E_l et F_m. Il existe une solution unique du problème suivant (inéquation variationnelle non-coercive à deux contraintes discontinues)

(1.7) $$u \in K;\quad a(u,\ v-u) \geq 0,\quad \forall v \in K,$$

à condition que

(1.8) $$\max_{1 \leq l \leq e} (\text{vrai} \max_{E_l} \varphi_l) \geq \min_{1 \leq m \leq f} (\text{vrai} \min_{F_m} \psi_m).$$

En outre la solution est bornée et se trouve entre ces deux constantes (v. par exemple [4]).

Remarque 1.1. Analogiquement au lemme 1.2 de [5] notons que si $O \subset R^n$ est un ouvert et on a pour la solution u du problème (1.7): $u < \psi_m$ sur $O \cap F_m$ pour tout m tel que $F_m \cap O \neq \emptyset$ (resp. $u > \varphi_l$ sur $O \cap E_l$ pour tout l tel que $E_l \cap O \neq \emptyset$), alors $a(u,\ v) \geq 0$, $\forall v \in H^1(R^n)$, $v \geq 0$ et tel que $\overline{\Omega} \cap \operatorname{supp} v \subset O \cap \overline{\Omega}$ (resp. $a(u,\ v) \leq 0$, $\forall v \in H^1(R^n)$, $v \geq 0$ et tel que $\overline{\Omega} \cap \operatorname{supp} v \subset O \cap \overline{\Omega}$).

On considéra aussi des problèmes coercifs du type

(1.9) $$u \in K_\Gamma;\ a(u,\ v-u) \geq 0,\quad \forall v \in K_\Gamma,$$

où l'ensemble $K_\Gamma = K \cap \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = \rho|_\Gamma\}$ défini à l'aide de la fonction $\rho \in H^1(\Omega)$ et de la portion $\Gamma \subset \partial\Omega$ dont mesure $(n-1)$-dimensionnelle est positive, est supposé non-vide.

Le résultat principal est le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Supposons que la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω soit de la classe $C^{1,1}$ et que les contraintes $\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \psi_1, \ldots, \psi_f \in H^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, soient telles que*

(1.10) $$\varphi_l < \psi_m \quad \textit{sur } \Gamma_{lm} = \overline{\Omega \cap \partial(E_l \cap F_m)}$$

pour tous $l=1, \ldots, e$, $m=1, \ldots, f$, à condition que $\Gamma_{lm} \neq \emptyset$. Supposons ainsi que les frontières $\partial(\overline{\Omega} \setminus E_l)$, $l=1, \ldots, e$, et $\partial(\overline{\Omega} \setminus F_m)$, $m=1, \ldots, f$, soient strictement lipschitziennes (v. définition (1.4) *de* [5]) *et que les coefficients $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j=1, \ldots, n$, soient des fonctions lipschitziennes dans le domaine $\overline{\Omega}$.*

Alors la solution u du problème (1.7) appartient à l'espace $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1-n/p]$.

La démonstration est exposée dans 4. On utilise des résultats préliminaires de 2 et 3.

2. Problème non-coercif à deux contraintes continues globales. On considère ici le cas partiel $E=F=\bar{\Omega}$ du théorème 1.2. On aura besoin de la notion λ-admissibilité du domaine G par rapport à l'espace $H^1(G)$ (v. [7, définition 3.1]). On se borne de noter seulement que des conditions très faibles du type de la condition du cône pour le contour ∂G sont suffisantes pour que l'ouvert G soit λ-admissible [7]. Pour plus de simplicité dans l'énoncé du théorème ci-dessous on peut considérer que la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses pour les coefficients $a_{ij}(x)$ faites en 1 et à condition que le domaine Ω soit* $1/2$*-admissible par rapport à* $H^1(\Omega)$ *et que les contraintes φ, ψ appartiennent à $H^{1,p}(\Omega)$, $p>n$, alors la solution u du problème* (1.7) *avec* $K=K(\Omega;\bar{\Omega},\varphi;\Omega,\psi)$, *appartient à l'espace* $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda\in(0, 1-n/p]$.

La démonstration est la même comme celle du théorème 2.3 de [5]. (On n'a fait que certaines simplificationes).

On pose

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{cases} v=u-\zeta^2\max(u-\varphi-k,\ 0)\\ w=u-\zeta^2\min(u-\varphi-k,\ 0)\end{cases}$$

où $k\in R^1$ et ζ est une C^1-fonction convenable de valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, dont le support est contenu dans la sphère $O(y,\rho)$, $y\in\bar{\Omega}$, $\rho>0$. (v. formule (2.2) de [5]). On note $\Omega(y,\rho)=O(y,\rho)\cap\bar{\Omega}$. Il est facile de voir que

$$\text{(2.2)}\qquad \begin{aligned} &v\in K \quad\text{pour tout } k\geq 0,\\ &w\in K \quad\text{pour tout } k\leq \inf_{x\in\Omega(y,\rho)}(\psi-\varphi)(x).\end{aligned}$$

Au moyen des fonctions (2.1), en suivant la méthode de [7], appliquée aussi dans [5], on montre qu'il est possible d'associer à chaque point $y\in\bar{\Omega}$ un nombre $\rho(y)\in[\delta, 1)$, $0<\delta<1$, tel que si $0<\rho<\frac{1}{4}\rho(y)$, alors on ait

$$\text{(2.3)}\qquad \operatorname{osc}(u,\ \rho)\leq\eta\operatorname{osc}(u,\ 4\rho)+H\rho^{1-n/p},$$

où

$$\operatorname{osc}(u,\ \rho)=\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega(y,\rho)}(u)-\operatorname*{vrai\,min}_{\Omega(y,\rho)}(u).$$

(Les constantes $H>0$ et $\eta<1$ ne dépendent pas de y et ρ). Fixons $r\in(0, \frac{1}{4}\rho(y))$ et désignons

$$M(4r)=\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega(y,4r)}(u-\varphi),\quad m(4r)=\operatorname*{vrai\,min}_{\Omega(y,4r)}(u-\varphi).$$

Considérons les nombres $K_N=M-(M-m)/2^N$ et $k_N=m+(M-m)/2^N$, $N=1, 2,\dots$ Puisque $K_N\geq K_1=(M+m)/2\geq 0$ tous les nombres K_N sont admissibles pour définir les fonctions v de (2.1). Si simultanément on a

$$\text{(2.4)}\qquad k_N\leq k_1=(M+m)/2\leq\inf_{x\in\Omega(y,4r)}(\psi-\varphi)(x)$$

alors tous les nombres k_N sont admissibles pour définir les fonctions w de (2.1). Appliquant la méthode de [7; 9] on obtient une inégalité du type (2.3) pour la fonction $u-\varphi$ au lieu de u, d'où (2.3) suit immédiatement

Mais il est possible qu'on ait $\inf_{\Omega(y,4r)}(\psi-\varphi)<(M+m)/2$, d'où il suit que $(M-m)/2\leqq M-\inf_{\Omega(y,4r)}(\psi-\varphi)\leqq \operatorname{osc}(\psi-\varphi,\ 4r)$ puisque $M\leqq\sup_{\Omega(y,4r)}(\psi-\varphi)$. Par conséquent on trouve maintenant

$$\operatorname{osc}(u,\ r)\leqq\operatorname{osc}(u,\ 4r)\leqq\text{const}\ r^{1-n/p} \tag{2.5}$$

en vertu des théorèmes d'immersion pour les espaces de Sobolev et vu les hypothèses sur φ, ψ. (La constante dans (2.5) ne dépend que des fonctions φ, ψ). Bien entendu, l'inégalité (2.5) a la forme de (2.3) avec $\eta=0$. Il en résulte l'assertion du théorème (v. [7] ou [8]).

3. Lemmes. On utilisera une localisation du problème dans un voisinage convenable d'un point arbitraire de la frontière permettant d'amener les considérations jusqu'à un domaine dont le contour peut être redressé. La localisation mentionnée est décrite par le lemme suivant:

Lemme 3.1. *Soit u la solution d'inéquation variationnelle* (1.7) *dans l'ouvert Ω pour l'ensemble convexe* (1.5). *Soit N un ouvert fixe arbitraire $(N\cap\Omega\neq\emptyset)$ et soit u_1 la solution du problème $a_{\Omega\cap N}(u,\ v-u)\geqq 0$, $\forall v\in K'$, où K' est l'intersection des ensembles $K_1=\{v\in H^1(\Omega\cap N)\,|\,v|_{\Omega\cap\partial N}=u|_{\Omega\cap\partial N}\}$ et $K_2=K(\Omega\cap N;\ E\cap N,\ \varphi_1,\ldots,\varphi_e;\ F\cap N,\ \psi_1,\ldots,\psi_f)$, (c.-à-d. K_2 est composé des restrictions des éléments de l'ensemble K sur $N\cap\Omega$). Alors $u_1=u|_{N\cap\Omega}$.*

Démonstration. On note

$$v=\begin{cases} u & \text{dans}\quad \Omega\setminus N\\ u_1 & \text{dans}\quad \Omega\cap N.\end{cases}$$

Il est évident que $v\in K$ et bien entendu $u|_{N\cap\Omega}\in K'$. On a

$$a_\Omega(u,\ v-u)\geqq 0, \tag{3.1}$$

et

$$\int\limits_{N\cap\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{1x_i}(u-u_1)_{x_j}dx\geqq 0,$$

ce qu'on peut écrire de la façon suivante

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i}(u-v)_{x_j}dx\geqq 0 \tag{3.2}$$

parce que $u=v$ dans $\Omega\setminus N$ (en tenant compte d'un lemme de [6, appendice] d'après lequel l'intégrale de $|\nabla v|^2$ est nul sur chaque ensemble mesurable où $v=\text{const}$). Après l'addition de (3.1) et (3.2) on trouve

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(v-u)_{x_i}(u-v)_{x_j}dx\geqq 0,$$

d'où, vu la condition d'ellipticité (1.2) et le fait que $v-u=0$ dans $\Omega\setminus N$ on établit $u=v$ dans Ω, c. q. f. d.

Le résultat suivant permettra de redresser la frontière à l'aide des difféomorphismes (locaux) après une localisation convenable du problème.

Lemme 3.2. *Soit $A\subset R^n$ un domaine et soit Γ une portion de ∂A de mesure $(n-1)$-dimensionelle positive. Fixons $\rho\in H^1(A)$. On désigne par u la solution du problème*

(3.3) $$a_A(u,\ v-u)\geqq 0,\quad \forall v\in K_3,$$

où l'ensemble $K_3=K_1\cap K_2$, $K_1=K(A;\ E,\ \varphi_1,\dots,\varphi_e;\ F,\ \psi_1,\dots,\psi_f)$, $K_2=\{v\in H^1(A)\mid v|_\Gamma=\rho|_\Gamma\}$. *(On suppose que* $K_3\neq\emptyset$*). Alors si* $y=g(x)$ *est un* C^1*-difféomorphisme défini dans* $\bar{A}$, *la fonction* $\tilde{u}(y)=u(g^{-1}(y))$ *est une solution du problème*

(3.4) $$\int_{g(A)}\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(g^{-1}(y))\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(g^{-1}(y))\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(g^{-1}(y))$$
$$.\tilde{u}_{y_k}(y)(\tilde{v}(y)-\tilde{u}(y))_{y_l}\,|J(g^{-1})(y)|\,dy\geqq 0,\quad \forall\tilde{v}\in\tilde{K}_3,$$

où $\tilde{K}_3=K(g(A);\ g(E),\ \tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_e;\ g(F),\ \tilde{\psi}_1,\dots,\tilde{\psi}_f)\cap\{\tilde{v}\in H^1(g(A))\mid \tilde{v}|_{g(\Gamma)}=\tilde{\rho}|_{g(\Gamma)}\}$ *est en effet l'image de* K_3 *par le difféomorphisme* $y=g(x)$. *(Les fonctions* $\tilde{\varphi}_i$ *et* $\tilde{\psi}_j$ *sont définies ainsi que* $\tilde{u}$ *et par* $J(g^{-1})(y)$ *on a noté le jacobien du difféomorphisme* $x=g^{-1}(y)$).

Remarque 3.3. Soit $A\subset R^n$ un domaine situé dans $\{x\in R^n\mid x_n>0\}$ et tel que la portion $\Sigma=\partial A\cap\{x\in R^n\mid x_n=0\}$ de sa frontière soit un ouvert $(n-1)$-dimensionnel simplement connexe. Pour la démonstration du lemme suivant il est nécessaire qu'on suppose

(3.5) $$a_{ni}=a_{in}=0 \text{ sur } \Sigma,\quad 1\leqq i\leqq n-1.$$

Cette condition n'est pas une restriction parce qu'on peut l'assurer à l'aide d'une C^2-transformation supplémentaire $z=z(x)$, $x\in A$, laquelle est inversible si le domaine A soit assez petit (cf. [2, ch. 7, § 3]). Précisément il s'agit d'une transformation $z(x)=(z_1(x),\dots,z_n(x))$ telle que $z_n(x)=x_n$ et $z_1,\dots,z_{n-1}$ satisfont aux conditions

$$\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda n}\frac{\partial z_i}{\partial x_\lambda}\bigg|_{x_n=0}=0,\quad 1\leqq i\leqq n-1,$$

ce qui est notamment l'hypothèse (3.5) pour l'opérateur transformé.

Lemme 3.4. *Soit* $A\subset R^n$ *le domaine décrit au début de la remarque 3.3. On suppose aussi la propriété* (3.5) *pour les coefficients* a_{ij}. *Notons par* $\tilde{G}$ *et* $\tilde{f}(x)$ *respectivement l'image de l'ensemble* $G\subset A$ *par une réflexion à travers* $\{x\in R^n\mid x_n=0\}$ *et le prolongement pair de la fonction* f *définie dans* A, *i. e.* $\tilde{f}(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{n-1},\ -x_n)$, $x\in\tilde{A}$. *Alors si la fonction* $u\in K=K(A;\ E,\ \varphi_1,\dots,\varphi_e;\ F,\ \psi_1,\dots,\psi_f)$ *est la solution d'inéquation variationnelle*

(3.6) $$a(u,\ v-u)\geqq 0,\quad \forall v\in K,$$

la fonction

$$U=\begin{cases} u & \textit{dans}\ A\cup\Sigma\\ \tilde{u} & \textit{dans}\ \tilde{A}\cup\Sigma\end{cases}$$

est une solution du problème

(3.7) $$\int_{A\cup\Sigma\cup\tilde{A}}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)U_{x_i}(V-U)_{x_j}dx\geqq 0,\ \forall V\in K_1,$$

où

$$A_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & dans \quad A \\ \widetilde{a}_{ij} & dans \quad \widetilde{A},\ i,\ j=1,\ldots,n-1,\ où\ i=j=n, \end{cases}$$

et

$$A_{n_i}=A_{in}=\begin{cases} a_{in} & dans \quad A \\ -\widetilde{a}_{in} & dans \quad \widetilde{A}, \quad i=1,\ldots,n-1, \end{cases}$$

et l'ensemble $K_1=K(A\cup\Sigma\cup\widetilde{A};\ E\cup\widetilde{E},\ \varphi_1,\ \ldots,\varphi_e,\ \widetilde{\varphi}_1,\ldots,\ \widetilde{\varphi}_e;\ F\cup\widetilde{F},\ \psi_1,\ldots,\psi_f,\ \widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_f)$.

Démonstration. Il est aisé de voir (lemme 3.2) que la fonction $\widetilde{u}$ est une solution d'inéquation

$$(3.8)\qquad \int_{\widetilde{A}}\Big\{\sum_{ij=1}^{n-1}\widetilde{a}_{ij}\widetilde{u}_{x_i}(v-\widetilde{u})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{a}_{in}[\widetilde{u}_{x_i}(v-\widetilde{u})_{x_n}+\widetilde{u}_{x_n}(v-\widetilde{u})_{x_i}]$$

$$+\widetilde{a}_{nn}\widetilde{u}_{x_n}(v-\widetilde{u})_{x_n}\Big\}\,dx\geq 0,\quad \forall\ v\in K_2,$$

où $K_2=K(\widetilde{A};\widetilde{E},\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_e;\widetilde{F},\widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_f)$.

Soit $V\in K_1$. Alors le premier membre de (3.7) est en réalité la somme

$$\int_A\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}(V|_A-u)x_j\,dx+\int_{\widetilde{A}}\sum_{ij=1}^{n}A_{ij}\widetilde{u}_{x_i}(V|_{\widetilde{A}}-\widetilde{u})_{x_j}dx$$

qui est non négative vu les (3.6) et (3.8).

Remarque 3.5. Grâce à la condition (3.5) les coefficients $A_{ij},\ i,\ j=1,\ldots,n$ sont lipschitziens dans $A\cup\Sigma\cup\widetilde{A}$, si on a de même pour a_{ij} dans A.

Lemme 3.6. *Soit la fonction u une solution du problème* (1.7) *avec* $K=K(\Omega;E,\varphi;F,\psi)$. *Si la fonction* $g\in H^1(\Omega)$ 1) *coïncide avec* ψ *sur F,* 2) *satisfait* $g\geq\varphi$ *sur E et* 3) *est une supersolution de l'opérateur L dans l'ensemble* $\overline{\Omega}\setminus F$ *au sens que*

$$(3.9)\qquad a(g,v)\geq 0$$

pour chaque fonction $v\in H^1(R^n),\ v\geq 0$ *et telle que* $\operatorname{supp} v\cap\overline{\Omega}\subset\overline{\Omega}\setminus F$, *alors* $u\leq g$ *dans* Ω.

Démonstration. En désignant $w=\min(g,u)\in K$ on trouve $a(u,w-u)\geq 0$ D'autre part $a(w,w-u)\leq 0$ tenant compte de (3.9) et du lemme de [6, appendice] mensionné dans la démonstration du lemme 3.1. Par conséquent $a(u-w,w-u)\geq 0$ d'où il s'ensuit que $w=u+c,\ c=\text{const}$. Si $c>0$ on est amené à la contradiction $u\geq\min(u,g)=u+c>u$. Si $c<0$, on a $w<u$ et par conséquent $w=g$, c.-à-d. $\psi=g<u$ sur F, ce qui est absurde. Ainsi on a $c=0$, i. e. $u=w\leq g$ c. q. f. d.

4. Démonstration de théorème 1.2. Soit S la famille des points des frontières des ensembles $E_l\cap\partial\Omega,\ l=1,\ldots,e$, et $F_m\cap\partial\Omega,\ m=1,\ldots,f$ (dans la topologie de la variété $(n-1)$-dimensionnelle $\partial\Omega$). Suivant formellement la méthode de démonstration du théorème 1.6 de [5], on peut obtenir la régularité désirée dans chaque compact se contenant dans $\overline{\Omega}\setminus S$. La difficulté pour établir la régularité de la solution dans l'entier domaine $\bar{\Omega}$ consiste en trouver des $H^{1,p}$-contraintes globales, ce que permettrait d'appliquer les résultats de 2. Cette difficulté est issue du fait que pour la construction des obstacles globales il est indispensable de considérer un problème aux limites mixtes (avec la condition de Dirichlet sur une partie du contour et la condition de Neumann sur le reste), au lieu du problème de Dirichlet comme on a fait dans [5]. (C'est pour cette raison que le cas $E\cup F\subset\Omega$ est plus facile puisqu'on le traite de la même façon comme le problème coercif.

Considérons tout d'abord le cas où chacun des ensembles E et F n'a qu'une composante unique. On construira des contraintes globales $\Phi\leqq\Psi$ lesquelles coïncident sur E et F respectivement avec φ et ψ et telles que $\Phi\leqq u\leqq\Psi$ sur Ω. Comme dans [5] on peut sans restreindre la généralité de considérer le cas où $\varphi\leqq\psi$ sur Ω (et bien entendu $\varphi<\psi$ sur $\overline{\Omega\cap\partial(E\cap F)}$. Ajoutant à φ et ψ des fonctions lisses de signes convenables et de supports contenant respectivement $E\diagdown F$ et $F\diagdown E$, on peut s'amener, sans changer φ et ψ sur E et F, au cas lorsque

$$\varphi<\psi \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega\cap\partial E} \quad \text{et sur} \quad \overline{\Omega\cap\partial F}. \tag{4.1}$$

Evidemment il existe une C^2-fonction φ_0 pour laquelle $\varphi_0>\varphi$

$$\varphi_0>\varphi \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega\diagdown F} \quad \text{et} \quad \psi>\varphi_0 \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega\cap\partial F}.$$

Alors, si la fonction Ψ_0 est la solution du problème

$$\begin{cases} L\Psi_0=\max(L\varphi_0,0) & \text{dans} \quad \Omega\diagdown F, \\ \Psi_0=\psi & \text{sur} \quad \overline{\Omega\cap\partial F} \\ \dfrac{\partial\Psi_0}{\partial\nu}=\max\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\nu},0\right) & \text{sur} \quad (\partial\Omega)\diagdown F, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\partial/\partial\nu$ et la dérivée conormale, on pourrait définir

$$\Psi=\begin{cases} \psi & \text{sur} \quad F \\ \Psi_0 & \text{sur} \quad \Omega\diagdown F. \end{cases}$$

Il est clair que $\Psi_0\geqq\varphi_0>\varphi$ dans $\Omega\diagdown F$ et en même temps que Ψ_0 est une supersolution pour l'opérateur L dans $\bar{\Omega}\diagdown F$ au sens que $a(\Psi_0, v)\geqq0$ pour tout $v\in H^1(R^n)$, $v\geqq0$, $\operatorname{supp} v\cap\bar{\Omega}\subset\bar{\Omega}\diagdown F$. Se référant au lemme 3.6 on établit que $\Psi\geqq u$ sur Ω. On construit d'une façon pareille la fonction Φ.

Il n'est pas difficile de voir (cf. la démonstration du lemme 2.8 de [5]) qu'on a Φ, $\Psi\in H^{1,p}(G)$ dans chacun compact $G\subset\bar{\Omega}\diagdown S$. Maintenant, en appliquant le théorème 2.1 on obtient l'affirmation désirée dans chaque compact $G_1\subset G$ fixé à l'avance.

On obtiendra la régularité höldérienne de la solution à la proximité du contour $\partial\Omega$ à l'aide des lemmes de 3. Soit $y\in S$. Il existe un voisinage $N\ni y$ et des coordonnées locales $x_1,\ldots,x_n$ telles que la partie $N\cap\partial\Omega$ de la frontière est représentée par $x_n=g(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $g\in C^{1,1}$ (v. définition 1.4 de [5]). Bien sûr, on peut supposer que le contour $\Gamma=\Omega\cap\partial N$ soit lisse. On localise le problème considéré (v. lemme 3.1) et on obtient un problème du type (1.10), i. e. si $A=N\cap\Omega$ alors

$$(4.1)\qquad \begin{gathered} u|_A \in K_\Gamma : a_A(u, v-u) \geqq 0, \ \forall v \in K_\Gamma, \\ K_\Gamma = K(A\,; E\cap N, \varphi\,; F\cap N, \psi\} \cap \{v \in H^1(A) \mid v|_\Gamma = u|_\Gamma\}. \end{gathered}$$

A l'aide du lemme 3.2 où

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ &\ldots\ldots \\ y_{n-1} &= x_{n-1}, \\ y_n &= x_n - g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

on est amené à un problème analogue de (4.1):

$$(4.3)\qquad w \in K_1 : \int_{A_1} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y) w_{y_i} (v-w)_{y_j} dy \geqq 0, \ \forall v \in K_1,$$

où l'ouvert A_1 est situé dans le demi-espace $\{y \in R^n \mid y_n > 0\}$ et $(\partial A_1) \cap \{y \in R^n | y_n = 0\}$ est un domaine $(n-1)$-dimensionnel. En outre, les coefficients b_{ij} sont des fonctions lipschitziennes.

Le problème dernier (4.3) est coercif mais le comportement de la solution sur la partie plane de ∂A_1 se décrit encore au moyen des inégalités. On peut considérer que la condition (3.5) pour les coefficients $b_{in} = b_{ni}$ soit satisfaite (v. remarque 3.3). Diminuant le domaine A_1 (au moyen d'une localisation supplémentaire; v. lemme 3.1) on peut assurer l'inversibilité de la transformation des coordonnées faite dans la remarque 3.3. Pour simplicité on conserve des notations A_1 et w.

Maintenant on est en état d'appliquer lemme 3.4 et de s'amener à un problème dans le domaine $G = A_1 \cup \widetilde{A}_1$, où A_1 est l'image de A_1 à travers $\{y \in R^n \mid y_n = 0\}$:

$$(4.4)\qquad U \in K_2\,; \int_{G} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y) U_{y_i} (V-U)_{y_j} dy \geqq 0, \ \forall V \in K_2,$$

où en désignant $E_1 = E \cap A_1$, $F_1 = F \cap A_1$ et

$$U = \begin{cases} w & \text{dans } A_1 \\ \widetilde{w} & \text{dans } \widetilde{A}_1 \end{cases}$$

(on utilise des notations du lemme 3.4) on a

$$K_2 = \{v \in H^1(G) \mid v|_{\partial G} = U|_{\partial G}\} \cap K(G\,; E_1 \cup \widetilde{E}_1, \varphi, \widetilde{\varphi}\,; F_1 \cup \widetilde{F}_1, \psi, \widetilde{\psi}).$$

On peut traiter le problème (4.4) qui est même coercif comme dans [5] et on obtiendra la continuité höldérienne de la solution dans l'intérieur du domaine G. La condition sur le contour ∂G peut être faite homogène après la soustraction de la fonction π (appartenant à $H^{1,p}$ dans l'intérieur de G) telle que $L\pi = 0$ dans G, $\pi = U$ sur ∂G. On en conclut, vu l'inversibilité de toutes les transformations utilisées, que la solution u du problème originel est höldérienne dans un voisinage de chacun point frontière $y \in \partial\Omega$.

On démontre le cas général du théorème 1.2 de la même façon. On construit des contraintes globales continues suivant le procédé décrit dans la démonstration du théorème 1.6 de [5].

5. Remarques. Naturellement un résultat plus précis sera la démonstration de la continuité höldérienne de la solution seulement sous l'hypothèse que la contrainte ait la même régularité. Utilisant une idée de Frehse [1] (cf. aussi [3]) on établit une assertion pareille dans le cas d'une forme quadratique engendrée par opérateur à coefficients constants (v. remarque 5.2).

Proposition 5.1. *Soit u la solution de l'inéquation variationnelle à une contrainte*

$$a(u, v-u)\geq 0, \ \forall v\in K, \tag{5.1}$$

où l'ensemble $K=\{v\in H_0^1(\Omega)\mid v\geq\varphi \text{ sur } \overline{\Omega}\}$ *est défini à l'aide de la fonction* $\varphi\in H^1(\Omega)\cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<1$, *satisfaisante à la condition*

$$\varphi<0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{5.2}$$

A condition que les coefficients a_{ij} de l'opérateur (1.1) *soient constantes et que le domaine Ω soit admissible par rapport à $H_0^1(\Omega)$* (v. [7] ou [5]), *alors la solution u du problème* (5.1) *est une fonction höldérienne dans $\overline{\Omega}$.*

Démonstration. Soit U un voisinage unilatéral de $\partial\Omega$ où on ait $u>\varphi$. Son existence résulte de (5.2) et du fait que $u\geq 0$ (cf. [10]). Puisque $Lu=0$ dans U $u=0$ sur $\partial\Omega$ la solution u est höldérienne dans U (cf. [7] ou [8]). Désignons par λ son indice höldérien.

Soit $\Omega'\subset\Omega$ un domaine de contour $\partial\Omega'\subset U$ et tel que $\Omega\setminus U\subset\Omega'$. L'ensemble de coïncidence $I=\{x\in\Omega\mid u(x)=\varphi(x)\}$ est fermé et est contenu strictement à l'intérieur de Ω car la solution u est continue ([6]; v. aussi la remarque 5.4). Soit $\eta>0$ un nombre tel que pour $h\in R^n$, $|h|<\eta$, les fermetures des ensembles $\Omega'+h$ soient contenues dans Ω (il suffit de poser $0<\eta<\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$). Notons

$$\delta_h v(x)=\frac{1}{|h|^{\mu}}[v(x+h)-v(x)], \ h\neq 0, \tag{5.3}$$

où $\mu=\min(\lambda, 1-n/p)$.

Il est clair que si $\alpha\in C_0^{\infty}(\Omega'\setminus I)$, $\alpha\geq 0$, alors il existe un nombre $\varepsilon=\varepsilon(\alpha,h)>0$ assez petit pour lequel on ait $v=u+\varepsilon\delta_h\alpha\in K$. Posant cette fonction v dans (5.1) on trouve $a(u, \delta_h a)\geq 0$, ce qu'on peut écrire de la façon suivante

$$\int_{\Omega}\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\delta_{-h}u)_{x_i}\alpha_{x_j}dx\geq 0. \tag{5.4}$$

Tenant compte des propriétés de α, l'inégalité (5.4) montre que sur $\Omega'\setminus I$ la fonction $(\delta_{-h}u)(x)$ est une supersolution par rapport à l'opérateur L et par conséquent elle atteint son minimum sur la frontière. Puisque $|\delta_{-h}u|\leq$const pour $x\in\partial\Omega'$ (car maintenant $x, x-h\in U$), et d'autre part pour $x\in I$:

$$\delta_{-h}u=\frac{u(x-h)-\varphi(x)}{|h|^{\mu}}\geq\delta_{-h}\varphi(x)\geq -\text{const},$$

on obtient

$$(\delta_{-h}u)(x)\geq -\text{const}, \ \forall x\in\Omega'. \tag{5.5}$$

Vu le choix arbitraire de h cela signifie que

$$|(\delta_h u)(x)|\leq\text{const}, \ \forall x\in\Omega',$$

pour tous les vecteurs h assez petits, où la constante ne dépend que de φ et des propriétés de la solution u dans U.

Remarque 5.2. Dans le cas où les coefficients $a_{ij}(x)$ sont variables, outre les termes du type $a_{ij}(\delta_{-h}u)_{x_i}\alpha_{x_j}$, on a aussi des termes de degré inférieur du type

$$(\delta_{-h}a_{ij}).\,[u(x-h)-u(x)]_{x_i}\,.\,\alpha_{x_j}$$

et pour être en état de raisonner comme en [3], c.-à-d. pour pouvoir appliquer le principe de maximum [8], il faut savoir à l'avance que $u_{x_i}\in L_p,\ p>n$.

Remarque 5.3. Dans le cas des deux contraintes on peut obtenir un résultat analogue à la proposition 5.1 si on assure la continuité höldérienne de la solution près de la frontière. Par exemple dans le cas du problème non-coercif considéré en 2 le théorème est immédiat sous l'hypothèse

$$\varphi|_{E\cap\partial\Omega}<Q \quad \text{et} \quad \psi|_{F\cap\partial\Omega}>P, \tag{5.6}$$

où $P\geq Q$ sont respectivement le premier et le deuxième membre de l'inégalité (1.8), ou bien sous l'hypothèse

$$E\cup F\subset\Omega \tag{5.7}$$

(sans aucune restriction sur les contraintes φ et ψ).

Dans le cas des deux contraintes on raisonne séparément pour des voisinages Ω' et Ω'' des ensembles de coïncidence

$$I_\varphi=\{x\in\Omega\mid u(x)=\varphi(x)\} \quad \text{et} \quad I_\psi=\{x\in\Omega\mid u(x)=\psi(x)\},$$

où $I_\varphi\cap I_\psi=\emptyset$ à condition que

$$\varphi(x)<\psi(x),\ \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{5.8}$$

Remarque 5.4. A condition que les contraintes dans le cas du problème (1.7) appartiennent à $H^1(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$, on peut établir facilement la continuité de la solution. On approche des contraintes $\varphi_l,\ l=1,\ldots,e,$ et $\Psi_m,\ m=1,\ldots,f,$ par des fonctions lisses $\varphi_l^\varepsilon,\ \psi_m^\varepsilon,\ \varepsilon\to 0$, telles que $\varphi_l^\varepsilon<\varphi_l$ et $\psi_m^\varepsilon>\psi_m$. D'après le théorème 1.2 les solutions correspondantes u_ε sont continues dans $\bar{\Omega}$ et vu le lemme 5.5 elles convergent uniformément vers la solution u, i. e. $u\in C^0(\bar{\Omega})$.

Pour simplicité on énonce le lemme de comparaison des solutions du problème (1.7) dans le cas des deux contraintes continues:

Lemme 5.5. *Soient* $\varphi,\ \varphi_1,\ \psi,\ \psi_1\in H^1(\Omega)$, $\varphi_1\leq\Psi_1$ *sur* $E\cap F$ *et désignons par* $u(\pi,\varkappa)$ *la solution du problème* (1.7) *avec* $K=K(\Omega\,;\,E,\pi\,;\,F,\varkappa)$. Alors, si $\varphi_1<\varphi$ *sur* E *et* $\Psi_1<\Psi$ *sur* F, *on a*

$$u(\varphi,\Psi_1)\leq u(\varphi,\psi)\leq u(\varphi,\psi), \tag{5.9}$$

$$u(\varphi,\Psi_1)\leq u(\varphi_1,\psi_1)\leq u(\varphi_1,\psi), \tag{5.10}$$

$$|u(\varphi,\psi)-u(\varphi_1,\psi_1)|\leq \operatorname*{vrai\,max}_E(\varphi_1-\varphi)+\operatorname*{vrai\,max}_E(\psi-\psi_1). \tag{5.11}$$

La démonstration est standard. On montre les inégalités (5.9) et (5.10) au moyen des raisonnements semblables à ceux du lemme 3.6 et de la démonstration des inégalités (3.1) et (3.2) de [5].

Pour démontrer (5.11) il suffit d'établir que, par exemple

$$0 \leq u(\varphi, \psi) - u(\varphi, \psi_1) \leq \operatorname*{vrai\,max}_F (\psi - \psi_1) = M. \tag{5.12}$$

Notons $u = u(\varphi, \psi)$, $u_1 = u(\varphi, \psi_1)$ et $m = \operatorname*{vrai\,max}_\Omega (u - u_1)$. (Le nombre m est fini parce que u et u_1 sont bornés ; v 1). Supposant que $M < m$, considérons la fonction $w = \max(u - u_1 - M, 0) \in H^1(\Omega)$. On a $u_1 + w \in K(\Omega; E, \varphi; F, \psi_1)$ et par conséquent

$$a(u_1, w) \geq 0. \tag{5.13}$$

D'autre part on obtient

$$a(u, w) \leq 0 \tag{5.14}$$

de la même façon comme (3.10). Il suit de (5.13), (5.14) et (1.2) que $w = \text{const.}$ Il est facile de vérifier que cette constante est non positive, i. e. $w = 0$ c. q. f. d.

A la fin on étendra à la proximité de la frontière les résultats de [5], où les contraintes étaient en réalité dans l'intérieur du domaine Ω à cause de la condition

$$\varphi|_{F \cap \partial\Omega} < 0 \quad \text{et} \quad \Psi|_{F \cap \partial\Omega} > 0 \tag{5.15}$$

(v. (1.8) de [5]). Bien entendu, on supposera par la suite que la condition naturelle du type (5.15) mais avec des inégalités non strictes soit vérifiée. Le point essentiel est le lemme suivant :

L e m m e 5.6. *Soit* $\Omega \subset \{x \in R^n \mid x_n > 0\}$ *un domaine tel que l'intersection* Σ *de son contour avec* $\{x \in R^n \mid x_n = 0\}$ *est un domaine* $(n-1)$*-dimensionnel. Soit* u *la solution du problème*

$$a(u, v - u) \geq 0, \ \forall v \in K_0 = K \cap H_0^1(\Omega), \tag{5.16}$$

où l'ensemble K *est défini par* (1.6). On suppose vérifiées les conditions nécessaires assurant $K_0 \neq \emptyset$ et aussi les conditions (3.5) pour les coefficients a_{in}, $i = 1, \ldots, n-1$. Alors la fonction U obtenue de u à l'aide d'une continuation impair à travers Σ dans $\tilde{\Omega}$ (v. les notations $\tilde{\Omega}$, A_{ij} dans le lemme 3.4), coïncide avec la solution de l'inéquation variationnelle

$$\int_G \sum_{ij=1}^n A_{ij} U_{x_i} (V - U)_{x_j} dx \geq 0, \ \forall V \in K_1, \tag{5.17}$$

où $G = \Omega \cup \Sigma \cup \tilde{\Omega}$ et $K_1 = K(G; E \cup \tilde{F}, \varphi_1, \ldots, \varphi_e, -\tilde{\psi}_1, \ldots, -\tilde{\psi}_f; F \cup \tilde{E}, \psi_1, \ldots, \psi_f, -\tilde{\varphi}_1, \ldots, -\tilde{\varphi}_e)$.

On fait la démonstration en deux fois. Tout d'abord on établit que la solution de (5.17) est une fonction impair. Il en résulte que sur Σ cette fonction s'annule. Puis on vérifie que sa restriction sur Ω coïncide avec la solution de (5.16).

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Frehse. On the regularity of the solution of a second order variational inequality. *Bolletino U. M. I.*, (4), **6**, 1972, 312—315.
2. A. Friedman. Partial differential equations of parabolic type. London, 1964.
3. C. Gerhardt. Regularity of solutions of nonlinear variational inequalities. *Arch. Rat. Mech. Anal*, **52** (4), 1973, 389—393.
4. I. V. Iordanov. Problème non-coercif pour une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *Serdica*, **1**, 1975, 261—268.
5. I. V. Iordanov. Solutions höldériennes d'inéquations variationnelles à contraintes discontinues, I. *Serdica*, à paraître.
6. H. Lewy, G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, **22**, 1969, 153—188.
7. G. Stampacchia. Problemi al contorno ellitici con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane. *Ann. di Mat. Pura Appl.*, **51**, 1960, 1—38.
8. G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **15**, 1965, 189—258.
9. M. K. V. Murthy, G. Stampacchia. A variational inequality with mixed boundary conditions. *Israel J. Math.*, **13**, 1972, 188—224.

Centre for Mathematics and Mechanics
Sofia 1090 P. O. Box 373

Received 7. 9. 1981