

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# Serdica

Bulgariacae mathematicae  
publicationes

---

# Сердика

Българско математическо  
списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes  
and its new series Serdica Mathematical Journal  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>  
or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

## ESPACES A COURBURE STANILOV QUASI-CONSTANTE

VALENTIN BOJU, LOUIS FUNAR

Soit  $(M; g)$  un espace de Riemann de dimension  $n = \dim M \geq 4$ . Pour un vecteur  $A$  de l'espace tangent  $M_p$ ,  $A \neq 0$ , nous notons :

$$C(A, \omega, r) = \{V \subset M_p; V \text{ sous-espace vectoriel de l'espace } M_p; \dim V = r, \angle(A, V) = \omega\}.$$

On sait [3] que la courbure Stanilov d'un sous-espace vectoriel  $V$  est donnée par

$$S_r(V) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} K(A_i, A_j),$$

où  $\{A_1, \dots, A_r\}$  est une base orthonormée du sous-espace  $V$ ,  $K(A_i, A_j)$  désignant la courbure sectionnelle de la facette plane  $(A_i, A_j)$ .

Supposons qu'il existe  $\omega \in (0; \pi/2)$ ,  $X \in M_p$ ,  $X \neq 0$  et  $r \in \mathbb{N}$ , de sorte que

$$(1) \quad S_r(V) = S_r(V') = (\text{notation}) E, \forall V, V' \in C(X, \omega, r).$$

Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , une base orthonormée telle que  $X_n = X$ . Nous avons

$$E = \sum_{1 \leq q < p \leq r} A_q^i A_p^j A_p^k A_q^l B_{ijkl},$$

où  $A_q = A_q^i X_i$ ,  $q = 1, \dots, r$ ,  $\{A_1, \dots, A_r\}$  étant une base orthonormée d'un  $V \in C(X, \omega, r)$ . Pour  $2 \leq r \leq n-2$ , utilisant la méthode exposée dans [1] pour les espaces QC, il résulte :

$$R_{ijkl} = 0, R_{jikl} = 0, \forall i, j, k, l \text{ distincts, } i, j, k, l = 1, \dots, n;$$

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = R_{\gamma\delta\delta\gamma} = (\text{notation}) H, \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n-1, \alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta;$$

$$R_{\alpha\alpha\alpha n} = R_{n\beta\beta n} = (\text{notation}) L, \alpha, \beta \leq n-1 \text{ et, aussi:}$$

$$E = (r-1)(\sin^2 \omega)H + (r-1)(\cos^2 \omega)L + C_{r-1}^2 H,$$

donc :

**Théorème 1.** *S'il existe  $X \in M_p$ ,  $X \neq 0$ ,  $\omega \in (0; \pi/2)$  et  $r \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq r \leq n-2$ , de sorte que nous ayons (1), alors nous avons une relation de type (1)  $\forall \omega' \in [0; \pi/2]$ ,  $r' \in \mathbb{N}$ , où  $2 \leq r' \leq n-2$ .*

**Définition.** *Un espace de Riemann est un espace  $S_r$ -QC s'il existe un champ vectoriel régulier  $X \in D^1(M)$  et une fonction  $\omega: M \rightarrow (0; \pi/2)$  de sorte que  $S_r(V) = S_r(V')$ ,  $\forall V, V' \in C(X_p, \omega(p), r)$ , pour chaque  $p \in M$ .*

**Corollaire 1.** *Un espace de Riemann  $(M; g)$  est  $S_r$ -QC si et seulement si  $(M; g)$  est un espace QC ([1]).*

Corollaire 2. Les fonctions  $L$  et  $H$  sont différentiables; pour  $L=H$  un espace  $S_r$ -QC est à courbure constante  $H$ .

Maintenant nous pouvons donner un résultat de type Schur; à savoir:

Corollaire 3. Si un espace de Riemann est  $r$ -Stanilov isotrope (c'est-à-dire: pour chaque  $p \in M$   $S_r(V) = S_r(V')$ ,  $\forall V, V' \subset M_p$ ,  $\dim V = \dim V' = r$ ), alors il est à courbure constante (pour  $n \geq 3$ ).

Soit  $\overset{\circ}{R}$  la courbure scalaire,  $R_{ij}$  les composantes du tenseur de Ricci,  $W_{jkl}^i$  les composantes du tenseur de Weyl par rapport à une base orthonormée  $\{X_1, \dots, X_n\}$  (locale) de champs vectoriels, de sorte que  $X_n = X$ , où  $X$  est le champ distingué.

Théorème 2. Nous avons:  $R_{ij} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ ;  $R_{11} = \dots = R_{n-1, n-1} = L + (n-2)H$ ;  $R_{nn} = (n-1)L$ ;  $\overset{\circ}{R} = (n-1)(n-2)H + 2(n-1)L$ ;  $W_{jkl}^i = 0$ ,  $\forall i, j, k, l = 1, \dots, n$ .

Corollaire 4. Soit  $(M; g)$  un espace  $S_r$ -QC. Si  $(M; g)$  est un espace Einstein, alors il est à courbure constante.

Corollaire 5. Un espace  $S_r$ -QC est conformément euclidien.

Remarque 1. Pour  $L \neq H$ , un espace  $S_r$ -QC admet un groupe de mouvements à  $s$  paramètres, où  $s \leq 1 + n(n-1)/2$  [4, p. 103].

Remarque 2. Utilisant une technique un peu modifiée, il résulte que les résultats établis restent valables pour  $2 \leq r \leq n-1$ ,  $n \geq 3$ .

Remarque 3. Les conditions imposées par (1) sont plus faibles que celles données dans [1], mais assurent la propriété d'un espace d'être à courbure QC.

Remarque 4. Comme l'on constate immédiatement, si la condition (1) est satisfaite pour un nombre fini de sous-espaces  $V \in C(X, w, r)$ , convenablement choisis, alors il résulte, aussi, le Théorème 1.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. V. Boju, M. Popescu. Espaces à courbure quasi-constante. *J. Diff. Geometry*, **13**, 1978, 373—383.
2. L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton, 1925.
3. Gr. Stanilov. Généralisation de la courbure riemannienne et quelques applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Bulg. Sci.*, **14**, 1973, 211—241 (en bulgare).
4. Gh. Vranceanu. Leçons de géométrie différentielle, II<sup>e</sup> vol. Bucarest, 1977 (en roumain).

Université de Craiova  
Craiova Roumanie  
Collège „N. Balcescu”  
Craiova Roumanie

Received 18. 1. 1982  
Revised 2. 8. 1982