Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

ЮЛИЯНА Х. ПЕШЕВА

Для рассматриваемой задачи в работе доказан принцип максимума с помощью метода [1], основанного на теореме об отделимости выпуклых множеств. Так как решаемая задача есть задача с фазовыми ограничениями, то для того, чтобы определить оптимальное управление из принципа максимума, необходимо найти не только конечномерный вектор начального условия сопряженной системы, но также некоторые функции (меры) $\Omega_j^0(t)$. Задача нахождения $\Omega_j^0(t)$ есть бесконечномерная, вариационная задача, как и исходная задача оптимального управления. Такая трудность характерна для всех задач с фазовыми ограничениями, в том числе для рассматриваемой. В связи с этим особую важность приобретает сведение задачи нахождения $\Omega_j^0(t)$ к конечномерной задаче. При известных условиях параметры системы, задача оптимального быстродействия в обыкновенной линейной стационарной системе при ограниченных фазовых координатах сведена к конечномерной задаче в работе [2]. Для задачи с фазовыми ограничениями в системе с запаздыванием первые результаты изложены в [3]. В настоящей работе изложены более сильные результаты, как и в докладе [4].

Пусть процесс управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+B(t)u(t), \quad t>0, \tag{1}$$

где x — n-вектор состояния объекта; u — r-вектор кусочно-непрерывного управления; $A(t)$, $A_1(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матричные функции соответствующих размерностей; $h>0$ — постоянное запаздывание.

Для системы (1) задано начальное условие

$$x_0(\cdot)=\{x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0),\ x(0)=x_0\}, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная n-вектор-функция, x_0 — постоянный n-вектор.

Множество допустимых управлений $U(\cdot)$ определяется следующими ограничениями:

$$|u_j(t)|\leq 1, \quad j=\overline{1,r}. \tag{3}$$

Ставится следующая задача оптимального управления.

З а д а ч а 1. *Найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничениям* (3), *и такое, чтобы для соответствующей траектории $x(t)$ системы* (1) *с начальным условием* (2) *выполнялось тождество:*

$$x(t)\equiv 0,\ t\in[T-h,\ T], \tag{4}$$

где момент T минимально возможный.

Пусть момент T пока фиксированный, $T\geq 2h$. Рассмотрим сначала задачу 1 с фиксированным временем T.

СЕРДИКА Българско математическо списание, Том 9, 1983, с. 343—352.

Для справедливости тождества (4) необходимо и достаточно выполнение следующих двух соотношений:

$$x(T-h)=0, \tag{5}$$

$$A_1(t)x(t-h)+B(t)u(t)=0,\ t\in[T-h,\ T]. \tag{6}$$

Будем рассматривать сначала частный случай системы (1).

Случай 1. Пусть $r=n$ и матрица $B(t)$ невырождена при $t\in(0, T]$.

Обозначим через $c_i'(t)$, $i=\overline{1, n}$, i-ую строку матрицы $B^{-1}(t+h)A_1(t+h)$. Тогда задачу 1 с фиксированным временем T можно записать в следующем эквивалентном виде.

Задача 2. *Найти допустимое управление* $u(t)$, $t\in[0,\ T-h]$, *такое, чтобы для соответствующей траектории* $x(t)$ *системы* (1), (2) *выполнялись равенство* (5) *и неравенства*

$$|c_j'(t)x(t)|\leq 1,\ \ j=\overline{1, n},\ \ t\in[T-2h,\ T-h]. \tag{7}$$

Введем множество $X(\,.\,)=\{x(\,.\,): |c_j'(t)\,x(t)|\leq 1, j=\overline{1,n}, t\in[T-2h, T-h]\}$. Если при некотором $t\in[T-2h,\ T-h]$ выполняются неравенства (7), будем записывать $x(t)\in X(t)$.

Решение уравнения (1)—(2) записывается по формуле Коши [1] в виде:

$$x(t)=e(t)+S_tu(\,.\,),$$

$$e(t)=F(t,0)x_0+\int_{-h}^{0}F(t,\tau+h)A_1(\tau+h)\varphi(\tau)d\tau, \tag{8}$$

$$S_tu(\,.\,)=\int_0^t F(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $n\times n$ — матричная функция (фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего (1)) $F(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-F(t,\tau)A(\tau)-F(t,\tau+h)A_1(\tau+h)$$

с начальными условиями

$$F(t,\ t-0)=E_n,\quad F(t,\tau)=0,\quad \tau>t. \tag{9}$$

Теорема 1. *Для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$\int_0^{T-h}\max_{\substack{|u_i(\tau)|\leq 1\\ i=\overline{1,n}}}[g'F(T-h,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)F(t,\tau)d\Omega_j(t)]B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{10}$$

$$-\min_{x(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t)+g'e(T-h)+\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)e(t)d\Omega_j(t)\geq 0$$

выполнялось для любого n*-вектора* g *и любых скалярных функций* $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, *ограниченной вариации, определенных на отрезке* $[T-2h,\ T-h]$, *причем либо* $g\neq 0$, *либо не все функции* $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1,n}$ *тождественно постоянные на отрезке* $[T-2h,\ T-h]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задача 2 имеет решение и $u(t)$ есть искомое управление, а $x(t)$ — соответствующая ему траектория системы (1). Из соотношений (5), (7) и (8) тогда следуют равенства

$$\int_0^{T-h} F(T-h, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = -e(T-h), \tag{11}$$

$$\int_0^t c_j'(t)F(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - c_j'(t)x(t) = -c_j'(t)e(t), \; j=\overline{1, n}, \; t\in[T-2h, T-h], \tag{12}$$

где

$$|u_j(t)| \leq 1, \; j=\overline{1, n}, \; t\in[0, T-h], \tag{13}$$

$$x(t)\in X(t), \; t\in[T-2h, T-h]. \tag{14}$$

Пусть g — любой n-вектор, $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1, n_0}$ — любые функции ограниченной вариации, определенные на $[T-2h, T-h]$, и $(g_1, \ldots, g_n, d\Omega_1(t), \ldots, d\Omega_n(t)) \neq (0, \ldots, 0)$, $t\in[T-2h, T-h]$. Умножаем j-е равенство (12) на $d\Omega_j(t)$ и складываем их:

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^t c_j'(t)F(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right)d\Omega_j(t) - \sum_{j=1}^n c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t) = -\sum_{j=1}^n c_j'(t)e(t)d\Omega_j(t),$$
$$t\in[T-2h, T-h].$$

Интегрируем последнее равенство по t на отрезке $[T-2h, T-h]$ и складываем с равенством (11), умноженным скалярно на g. Имея в виду (9), получаем

$$\int_0^{T-h} g'F(T-h, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^n \int_{T-2h}^{T-h}\int_0^{T-h} c_j'(t)F(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau d\Omega_j(t)$$
$$-\sum_{j=1}^n \int_{T-2h}^{T-h} c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t) = -g'e(T-h) - \sum_{j=1}^n \int_{T-2h}^{T-h} c_j'(t)e(t)d\Omega_j(t).$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле и используя замкнутость множеств $U(\cdot)$ и $X(\cdot)$, получаем (10).

Достаточность. От противного. Пусть неравенство (10) справедливо, но задача 2 не имеет решения. Пусть $\{t_i\}$ есть некоторое счетное, всюду плотное множество точек на $[T-2h, T-h]$. Если условие (14) выполняется при любом $t\in\{t_i\}$, то оно выполняется и для любой точки $t\in[T-2h, T-h]$. Действительно, если $t\in[T-2h, T-h]$, $t\notin\{t_i\}$, то t есть точка замыкания $\{t_i\}$ и, следовательно, предельная точка для $\{t_i\}$. Тогда существует последовательность точек $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\{t_i\}$, $t_k\to t$. Используя непрерывность $x(t)$, $A_1(t)$ и $B(t)$ (а, следовательно, и $c_i'(t)$, $i=\overline{1, n}$) и переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем, что условие (14) выполнено и в точке t.

Если бы существовало допустимое управление $u(t)$, для которого выполнялись (11) и (13), а в точках t_i — (12) и (14), то из вышесказанного следует, что $u(t)$ было бы решением задачи 2. Следовательно, существует достаточно большое целое число $\bar{K}$ такое, что при $K\geq\bar{K}$ множества

$$Q=\{y: y=(y_0', y_{(ji)}, j=\overline{1, n}, i=\overline{1, K})'; \; y_0=S_{T-h}u(\cdot),$$
$$y_{(ji)}=c_j'(t_i)S_{t_i}u(\cdot)-c_j'(t_i)x(t_i), j=\overline{1, n}, i=\overline{1, K}, u(\cdot)\in U(\cdot), x(t_i)\in X(t_i), i=\overline{1, K}\},$$

$$R=\{z:z=(z_0', z_{(ji)}, j=\overline{1,n}, i=\overline{1,K})';$$

$$z_0=-e(T-h),\ z_{(ji)}=-c_j'(t_i)e(t_i),\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,K}\}$$

не имеют общих точек.

Множество R, очевидно, выпукло, ограничено, замкнуто. Используя выпуклость и замкнутость $U(\cdot)$ и $X(\cdot)$, нетрудно установить выпуклость и замкнутость Q.

Итак, к множествам Q и R можно применить теорему об отделимости выпуклых множеств. Следовательно, существует n-вектор g_* и набор чисел $l_{j*}^{(i)}$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,K}$, такие, что $n(K+1)$ — вектор $(g_{1*}, g_{2*}, \ldots, g_{n*}, l_{j*}^{(i)}, j=\overline{1,n}, i=\overline{1,K})\neq(0,\ldots,0)$ и выполняется неравенство

$$\inf_{z\in R}(g_*'z_0+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}l_{j*}^{(i)}z_{(ji)})-\sup_{y\in Q}(g_*'y_0+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}l_{j*}^{(i)}y_{(ji)})>0.$$

Подставляя сюда y и z и используя (9) и замкнутость $U(\cdot)$ и $X(\cdot)$, получаем

$$\int_0^{T-h}\max_{u(\cdot)\in U(\cdot)}[g_*'F(T-h,\tau)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}l_{j*}^{(i)}c_j'(t_i)F(t_i,\tau)]B(\tau)u(\tau)d\tau$$

(15)

$$-\min_{x(\cdot)\in X(\cdot)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}l_{j*}^{(i)}c_j'(t_i)x(t_i)+g_*'e(T-h)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}l_{j*}^{(i)}c_j'(t_i)e(t_i)<0.$$

Мы предположили, что неравенство (10) справедливо для любого вектора $g\in R^n$ и любых функций ограниченной вариации $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, $(g_1,\ldots,g_n, d\Omega_1(t),\ldots,d\Omega_n(t))\neq(0,\ldots,0)$, $t\in[T-2h, T-h]$. Рассмотрим (10) при $g=g_*$,

$$\Omega_j(t)=\sum_{k=1}^{i}l_{j*}^{(k)},\ t_i\leq t<t_{i+1},\ i=\overline{1,K},\ j=\overline{1,n},$$

где $t_1=T-2h$, $t_{K+1}=T-h$. По определению $\Omega_j(t)$ имеем:

(16) $$\Omega_j(t_i+0)-\Omega_j(t_i-0)=\Omega_j(t_i)-\Omega_j(t_{i-1})=l_{j*}^{(i)},\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,K}.$$

Используя (16) и непрерывность $c(t)$, $x(t)$, $e(t)$ и $F(t,\tau)$, $t>\tau$, получаем:

$$\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)F(t,\tau)d\Omega_j(t)=\sum_{i=1}^{K}c_j'(t_i)F(t_i,\tau)l_{j*}^{(i)},$$

$$\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t)=\sum_{i=1}^{K}c_j'(t_i)x(t_i)l_{j*}^{(i)},\quad \int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)e(t)d\Omega_j(t)=\sum_{i=1}^{K}c_j'(t_i)e(t_i)l_{j*}^{(i)}.$$

Подставляя последние равенства в (10), получим неравенство, противоположное (15). Достаточность доказана.

Всюду в дальнейшем будем считать функции $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1,n}$ непрерывными справа, в точке $T-h$ — слева. Кроме того, по определению $\Omega_j(t)=0$, $t\notin[T-2h, T-h]$, $j=\overline{1,n}$.

Пусть $\psi(t)$ есть решение сопряженной системы

(17) $$d\psi'(t)=-\psi'(t)A(t)dt-\psi'(t+h)A_1(t+h)dt-\sum_{j=1}^{n}c_j'(t)d\Omega_j(t)$$

с начальными условиями

$$\psi(t)=0,\ t>T-h\,;\ \psi(T-h)=g. \tag{18}$$

Неравенство (10) эквивалентно следующим двум соотношениям:

$$\min_{\psi(t)}\{\int_0^{T-h}\max_{\substack{|u_i(\tau)|\le 1\\ i=\overline{1,n}}}\psi'(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau-\min_{x(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t)\}\ge 1, \tag{19}$$

$$\psi'(0)x_0+\int_{-h}^{0}\psi'(\tau+h)A_1(\tau+h)\,\varphi(\tau)d\tau=-1. \tag{20}$$

Соотношения (19) и (20) можно записать в следующем виде:

$$\min_{g,\Omega_j(t)}\{\int_0^{T-h}\max_{\substack{|u_i(\tau)|\le 1\\ i=\overline{1,n}}}\psi'(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau-\min_{x(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t)\}\ge 1, \tag{21}$$

$$g'e(T-h)+\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)\,e(t)d\Omega_j(t)=-1. \tag{22}$$

Итак, задача 2 имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (21) при условии (22).

Пусть задача 2 при данном T имеет решение. Доказывается [5], что существует и минимальное $T=T^0$, $T^0>h$, при котором выполняется (21) со знаком равенства. Задача оптимального быстродействия (задача 1) разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $T^0>h$ выполняется (21) (со знаком равенства) при условии (22).

Теорема 2 (принцип максимума). *Пусть вектор* g^0 *и функции* $\Omega_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$ *решают задачу минимизации* (21), (22) (*при* $T=T^0$) *и порождают по формулам* (17), (18) *экстремальное в* (19), (20) *решение сопряженной системы* $\psi^0(t)$. *Тогда оптимальное управление* $u^0(t)$ *в задаче быстродействия удовлетворяет условию максимума*

$$\psi^{0'}(\tau)B(\tau)u^0(\tau)=\max_{\substack{|u_i|\le 1\\ i=\overline{1,n}}}\psi^{0'}(\tau)B(\tau)u,\ \ \tau\in[0,\ T^0-h], \tag{23}$$

а оптимальная траектория — условию

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{T^0-2h}^{T^0-h}c_j'(t)x^0(t)d\Omega_j^0(t)=\min_{X(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{n}\int_{T^0-2h}^{T^0-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j^0(t). \tag{24}$$

Замечание 1. Условие (23) дает возможность определить оптимальное управление $u^0(t)$ по формуле

$$u_i^0(\tau)=\operatorname{sign}\psi^{0'}(\tau)b^{(i)}(\tau) \tag{25}$$

на всех подынтервалах интервала $[0,\ T^0-h]$, на которых $\psi^{0'}(\tau)b^{(i)}(\tau)\ne 0$. В (25) $b^{(i)}(\tau)$ есть i-й столбец матрицы $B(\tau)$, $u_i^0(\tau)$ — i-й элемент вектора $u^0(\tau)$.

Пусть система (1) стационарна. Обозначим через ∂X границу множества X. Пусть для всех $i=\overline{1,n}$, почти всех $t\in[T-2h,\ T-h]$ и для каждого n-вектора v с элементами v_j, $|v_j|=1$, $j=\overline{1,n}$, выполнено неравенство

$$|f_i(t,v)| > \sum_{j=1}^{n} \int_0^t |(c_i' \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t} B)_j| \, d\tau, \tag{26}$$

где

$$f_i(t,v) = c_i' \frac{\partial F(t,0)}{\partial t} x_0 + c_i' \int_{-h}^{0} \frac{\partial F(t,\tau+h)}{\partial t} A_1 \varphi(\tau) d\tau + c_i' B v.$$

Тогда справедливо следующее:

Предположение 1. *Соотношения $x(t) \in \partial X$ и $u(t) = w$, $|w_j| = 1$, $j = \overline{1,n}$ не выполняются одновременно ни на каком подотрезке $[t_1, t_2]$ отрезка $[T^0 - 2h, T^0 - h]$.*

Замечание 2. Условие (26) можно записать через решения определяющего уравнения [1], соответствующего системе (1), при этом избегается необходимость вычислять фундаментальную матрицу. Используется формула из [6]:

$$F(t,\tau) = F(t-\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} Q_{i+1}(jh) \frac{(t-\tau-jh)^i}{i!},$$

где $Q_i(jh)$ — суть решения определяющего уравнения, $t - \tau \in [\rho h, (p+1)h)$, $p = 0, 1, \ldots$

В следующей теореме содержатся ряд важных свойств оптимальных решений $x^0(t)$ и $\psi^0(t)$.

Теорема 3. 1) *Если $x^0(t) \in \operatorname{int} X$, $t \in [t_1, t_2] \subset [T^0 - 2h, T^0 - h]$, то*

$$\Omega_0(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \Omega_j^0(t) c_j = \mathrm{const}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

2) *Пусть в стационарной системе (1) выполняется предположение 1 и $x^0(t) \in \partial X$, $t \in [t_1, t_2] \subset [T^0 - 2h, T^0 - h]$, тогда хотя бы при одном k, $1 \leq k \leq n$ справедливо тождество*

$$\psi^{0\prime}(t) b^{(k)} = 0, \quad t \in [t_1, t_2), \tag{27}$$

где, как и выше, $b^{(k)}$ есть k-й столбец B.

3) *Функции $\Omega_j^0(t)$, $j = \overline{1,n}$ удовлетворяют соотношениям* (17), (27) *тогда и только тогда, когда они дифференцируемы при $t \in [t_1, t_2)$ (в обычном смысле) и их производные $\lambda_j^0(t)$, $j = \overline{1,n}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений*

$$-\sum_{\nu=0}^{n+\eta-2} (-1)^\nu \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{d^\nu \lambda_j^0(t)}{dt^\nu} c_j'\Big) A^{n+\eta-\nu-2} b^{(k)} \tag{28}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} p_q^{(\eta)} \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{d^\nu \lambda_j^0(t)}{dt^\nu} c_j'\Big) A^{q-\nu-1} b^{(k)} = 0, \quad \eta = \overline{1,n}, \quad t \in [t_1, t_2),$$

где $p_q^{(\eta)}$ — суть коэффициенты разложения $A^{n+\eta-1} b^{(k)}$ по формуле Гамильтона-Кэли.

В частности, при $A = \varkappa E$, $\varkappa$ — произвольное число, функции $\Omega_j^0(t)$, $j = \overline{1,n}$ удовлетворяют (17), (27) *тогда и только тогда, когда*

$$\Omega_0'(t) b^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \Omega_j^0(t) c_j' b^{(k)} = \mathrm{const}, \quad t \in [t_1, t_2). \tag{29}$$

4) *Пусть функции* $\Omega_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$ *имеют скачки в точке* $t=t_1$: $\Omega_j^0(t_1+0)-\Omega_j^0(t_1-0)=\lambda_{j(1)}^0$, $j=\overline{1,n}$ *(некоторые* $\lambda_{j(1)}^0$ *могут равняться нулю); вектор-функция* $\Omega_0(t)$ *имеет соответственно скачок*

$$\Omega_0(t_1+0)-\Omega_0(t_1-0)\overset{\text{def}}{=}\lambda_{0(1)}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j(1)}^0 c_j.$$

Тогда

$$\lambda'_{0(1)}B(u^0(t_1+0)-u^0(t_1-0))\leq 0. \tag{30}$$

Следствие. *Если* $A\neq\varkappa E$ *и* $x^0(t)\in\partial X$, $t\in\Delta_m=[t_m, t_m^1]\subset[T^0-2h, T^0-h]$, $m=\overline{1,M}$, *то сопряженный вектор* $\psi^0(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot{\psi}'(t)=-\psi'(t)A-\psi'(t+h)A_1-\dot{\lambda}_0'(t)-\sum_{m=1}^{M}[\lambda'_{0(m)}\delta(t-t_m)+(\lambda_{0(m)}^1)'\lambda(t-t_m^1)], \tag{31}$$

где $\lambda_{0(m)}$, $\lambda_{0(m)}^1$ — *скачки* $\Omega_0(t)$ *в точках* t_m, t_m^1. *В* (31) *вектор-функция* $\lambda_0(t)=\sum_{j=1}^n\lambda_j^0(t)c_j$ *на каждом интервале* $[t_m, t_m^1)$ *удовлетворяет системе* (28), *а векторы* $\lambda_{0(m)}$, $\lambda_{0(m)}^1$ — *условию* (30).

Вернемся к нестационарной системе (1). Следующая теорема дает достаточное условие, при котором задача 1 имеет решение.

Теорема 4. *Пусть при* $t>0$ *матрица* $B(t)$ *невырождена и элементы матрицы* $A_1(t)$ *равномерно по* t *ограничены. Если решение* $x=0$ *однородной части системы* (1) *асимптотически устойчиво в целом, то задача* 1 *имеет решение.*

Доказательство. Отметим, что система (1) относительно управляема [1], так как $\det B(t)\neq 0$. Следовательно, для любого начального состояния $x^*(\cdot)=\{x^*(t)=x(t), t\in[t^*-h, t^*]\}$ существует кусочно-непрерывное управление $u^*(t)$, $t\geq t^*$, которое переводит траекторию системы (1) из $x^*(\cdot)$ в 0 за конечное время, например $T-h-t^*$, т. е. справедливо равенство (5).

Кроме того, из корректности задачи (5) [1] следует, что управление $u^*(t)$ будет удовлетворять ограничениям (3), т. е.

$$|u_j^*(t)|\leq 1,\ j=\overline{1,n}, \tag{32}$$

если $x^*(\cdot)$ достаточно мало, например,

$$|x_j^*(t)|\leq\varepsilon,\ j=\overline{1,n},\ t\in[t^*-h, t^*]. \tag{33}$$

Итак, будем управлять системой (1) следующим образом:

1. В систему (1) положим $u(t)=u_1(t)$, $u_1(t)\equiv 0$, $t\geq 0$, и увеличиваем t до того момента t^*, когда в силу асимптотической устойчивости будет выполняться (33) и, кроме того,

$$|(B^{-1}(t)A_1(t)x(t-h))_j|\leq 1,\ t\geq t^*,\ j=\overline{1,n}, \tag{34}$$

(последнего можно добиться, так как элементы $A_1(t)$ равномерно ограничены).

2. При $t>t^*$ положим $u(t)=u_2(t)$, $u_2(t)=u^*(t)$. Тогда в силу (33) удовлетворяется (32) и кроме того (5).

3. При $t\in(T-h, T]$ положим $u(t)=u_3(t)$, $u_3(t)=-B^{-1}(t)A_1(t)x(t-h)$. Тогда в силу (5) траектория $x(t)$ удовлетворяет (4) и, кроме того, из (34) следует, что $|u_{3j}(t)|\leq 1$, $j=\overline{1,n}$, $t\in[T-2h, T-h]$.

Итак, управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t)\equiv 0, & t\in[0,\ t^*],\\ u_2(t)=u^*(t), & t\in(t^*,\ T-h],\\ u_3(t)=-B^{-1}(t)A_1(t)x(t-h), & t\in(T-h,\ T],\end{cases}$$

осуществляет (4) и для него выполнено (3).

Докажем еще, что если задача 1 разрешима для конечного момента $T-h$, то существует и решение для минимального момента. Рассмотрим множество достижимости $Q(t)$ системы (1), образованное допустимыми управлениями. Множество

$$Q(t)=\{x:x=x(t,\ x_0(\cdot),\ u(\cdot)),\ u(\cdot)\in U(\cdot)\}$$

выпукло и замкнуто. Кроме того, как следует из непрерывности $x(t)$, $Q(t)$ непрерывно по t. Но выше мы показали, что существует момент $T-h$ такой, что $0\in Q(T-h)$. По непрерывности $Q(t)$ тогда существует наименьший момент T^0-h, в котором $0\in Q(T^0-h)$. Следовательно, существует управление $u^0(t)$, $u^0(\cdot)\in U(\cdot)$, при котором $x(T^0-h)=0$.

Рассмотрим, наконец, общий случай системы (1).

Случай II. Пусть $r<n$ и матрица $B(t)$ имеет ранг r. В стационарном случае всегда можно считать, что матрица B имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix},\quad B_1=E_r.$$

В нестационарном случае предположим, что $B(t)$ имеет следующий вид:

$$B(t)=\begin{pmatrix}B_1(t)\\ 0\end{pmatrix},\ \operatorname{rank} B_1(t)=r,$$

а последние $(n-r)$ — строки нулевые.

Обозначим через $c'_j(t)$, $j=\overline{1,\ r}$, j-ю строку матрицы $B^{-1}(t+h)A_1(t+h)$, а через $c'_j(t)$, $j=\overline{r+1,\ n}$, j-ю строку матрицы $A_1(t+h)$.

Задача 1 с фиксированным временем в этом случае эквивалентна следующей задаче.

Задача 3. *Найти допустимое управление* $u(t)$, $t\in[0,\ T-h]$, *такое, что для соответствующей траектории* $x(t)$ *системы* (1)—(2) *выполнялись равенство* (5) *и соотношения*

$$(35)\qquad \begin{aligned} &|c'_j(t)x(t)|\le 1,\ j=\overline{1,\ r},\ t\in[T-2h,\ T-h],\\ &c'_j(t)x(t)=0,\ j=\overline{r+1,\ n},\ t\in[T-2h,\ T-h].\end{aligned}$$

Введем множество $X(\cdot)=\{x(\cdot):|c'_j(t)x(t)|\le 1,\ j=\overline{1,\ r},\ t\in[T-2h,\ T-h]\}$.

Теорема 5. *Задача 3 имеет решение тогда и только тогда, когда неравенство*

$$(36)\qquad \int\limits_0^{T-h}\max_{\substack{|u_i(\tau)|\le 1\\ i=\overline{1,\ r}}}\Big[g'F(T-h,\ \tau)+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{T-2h}^{T-h}c'_j(t)F(t,\ \tau)d\Omega_j(t)\Big]B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$-\min_{x(\cdot)\in X(\cdot)}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{T-2h}^{T-h}c'_j(t)x(t)d\Omega_j(t)+g'e(T-h)+\sum_{=1}^{n}\int\limits_{T-2h}^{T-h}c'_j(t)e(t)d\Omega_j(t)\ge 0$$

выполнено для произвольных n-вектора g *и скалярных функций* $\Omega_j(t)$, $j=\overline{1,n}$ *ограниченной вариации, определенных на* $[T-2h,\ T-h]$ *причем, либо* $g\neq 0$, *либо существует* j^0, $1\leq j^0\leq n$, *что* $\Omega_{j^0}(t)\neq\text{const}, t\in[T-2h, T-h]$.

Неравенство (36) эквивалентно следующим двум соотношениям;

$$(37)\qquad \min_{g,\Omega_j(t)}\Big\{\int_0^{T-h}\max_{\substack{|u_i(\tau)|\leq 1\\ i=\overline{1,r}}}\psi'(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau-\min_{x(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{\tau}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)x(t)d\Omega_j(t)\Big\}\geq 1,$$

$$(38)\qquad g'e(T-h)+\sum_{j=1}^{n}\int_{T-2h}^{T-h}c_j'(t)e(t)d\Omega_j(t)=-1.$$

Пусть T^0 есть минимальное T, при котором выполнено неравенство (37) при условии (38). Пусть g^0, $\Omega_j^0(t)$ доставляют минимум в (37), (38) при $T=T^0$ и порождают по (17), (18) функцию $\psi^0(t)$.

Теорема 6 (принцип максимума). *Оптимальные управление* $u^0(t)$ *и траектория* $x^0(t)$ *удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\psi^{0\prime}(\tau)B(\tau)u^0(\tau)=\max_{\substack{|u_i|\leq 1\\ i=\overline{1,r}}}\psi^{0\prime}(\tau)B(\tau)u,\quad \tau\in[0,\ T^0-h],$$

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{T^0-2h}^{T^0-h}c_j'(t)x^0(t)d\Omega_j^0(t)=\min_{x(.)\in X(.)}\sum_{j=1}^{r}\int_{T^0-2h}^{T^0-h}c_j'(t)\,x(t)d\Omega_j^0(t).$$

Пусть система (1) стационарна. Введем вектор

$$\bar{\Omega}_0(t)=\sum_{j=1}^{r}\Omega_j^0(t)c_j.$$

Теорема 7. 1) *если* $x^0(t)\in\operatorname{int}X, t\in[t_1,t_2]\subset[T^0-2h,\ T^0-h]$, *то* $\Omega_0(t)=\text{const},\ t\in[t_1,t_2]$.

2) *если для системы* (1) *выполнено предположение* 1 *и* $x^0(t)\in\partial X$, $t\in[t_1,t_2]\subset[T^0-2h,\ T^0-h]$, *тогда, хотя бы при одном* k, $1\leq k\leq r$, *выполняется* (27).

3) *если* $A\neq\varkappa E$, *то функции* $\Omega_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$, *удовлетворяют* (17), (27) *тогда и только тогда, когда они дифференцируемы (в обычном смысле) и их производные* $\lambda_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (28), $t\in[t_1,t_2)$. *Если* $A=\varkappa E$, *то функции* $\Omega_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$, *удовлетворяют* (17), (27) *тогда и только тогда, когда выполнено* (29).

4) *в точках скачков функций* $\Omega_j^0(t)$, $j=\overline{1,n}$ *выполнено условие* (30).

Замечание 3. Неравенство (26) в случае $n\times r$-матрицы B записывается при $j=\overline{1,r}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.

2. А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов. К задачам об управлении при стесненных координатах. *Прикладная математика и механика*, **33**, 1969, 705—719.

3. Ю. Х. Пешева. Одна задача оптимального управления для систем с запаздыванием (резюме). Материалы второй научной конференции болгарских аспирантов, обучающихся в СССР (М., июнь 1977). С., 1978.
4. Iu. H. Pesheva. Time Optimal Control Problem for the Systems with Time-Lag. International Conference on Mathematical Methods in Operational Research. Sofia. November 1980, 17—22.
5. Ю. Х. Пешева. Исследование задач оптимального управления для линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Кандидатская диссертация, Минск, 1978.
6. Б. Ш. Шкляр. Построение допустимых управлений в системах с запаздыванием. — В: *Дифференциальные и интегральные уравнения*, вып. 3. Иркутск, 1975, 276—285.

Институт иностранных студентов
Кафедра математики
София 1000

Поступила 17. IX.1981 ;
В переработанном виде 21. IV. 1982