Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМЫХ ФЛЮИДОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ПЕТР Й. ШОПОВ

В работе рассматриваются дискретизации задач с фиксированными и свободными границами механики несжимаемых флюидов. Для системы уравнений, полученных в результате дискретизации методом конечных элементов таких задач, доказаны некоторые специфические свойства. Рассматриваются формулы типа предиктор — корректор для нахождения неизвестной границы и показана их консервативность относительно закона сохранения массы. Для совместимости системы и для консервативности оказывается ответственным одно и то же условие, которое имеет смысл требования интегральной несжимаемости флюида в рассматриваемой области.

1. Дискретизации задач динамики несжимаемых флюидов методом конечных элементов. Получение дискретизаций таких задач рассмотрим на примере следующей достаточно общей задачи [7]. Область Ω заполнена двумя флюидами, занимающими соответственно области $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$, $\Omega=\Omega_1(t)\cup\Omega_2(t)$, meas $(\Omega_1(t)\cap\Omega_2(t))=0$, второй флюид может быть газом. В этом случае считаем, что газ упражняет по $\partial\Omega_2(t)$ давление, которое является известной функцией формы $\Omega_2(t)$, и задача решается только в $\Omega_1(t)$ (напр.[4]). Как частный случай этой задачи получаем задачи с фиксированной границей ($\Omega_2(t)=0$), с внешней свободной границей (в $\Omega_2(t)$ — газ), с внутренней свободной границей ($\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ заполнены двумя несмешивающимися флюидами, соответственно). Через Γ_1 обозначим неподвижные границы Ω_1 и Ω_2, через $\Gamma_2(t)$ — свободную границу, $\Gamma_2(t)=\Gamma_3(t)\cup\Gamma_4(t)$, где $\Gamma_3(t)$ — внутренняя свободная граница, $\Gamma_4(t)$ — внешняя свободная граница.

Движение несжимаемой ньютоновской жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса, которые в случае берут в виде уравнений движения непрерывной среды (напр. [1]). На границе Γ_1 задаем скорость (это основное граничное условие), а на $\Gamma_2(t)$ — условие равновесия сил, действующих в точке этой поверхности (естественное граничное условие) (напр. [1]).

Базисным пунктом для приложения метода конечных элементов является слабая формулировка этой граничной задачи, которая имеет смысл принципа виртуальной работы [2, 3, 7]. Его получение в некоторых случаях можно найти в [1].

$$\langle\partial_t \boldsymbol{v}, \delta\boldsymbol{v}\rangle+a((\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}),\delta\boldsymbol{v})+b(\delta\boldsymbol{v},p)=\varphi(\delta\boldsymbol{v}), \tag{1}$$

$$b(\boldsymbol{v},\delta p)=0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m)$, $m=2{,}3$, $\delta\boldsymbol{v}$ — вариация скорости $\boldsymbol{v}$,

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{u}_i\,\boldsymbol{v}_i\,d\Omega,\ a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})=a_1((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})+a_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),$$

$$a_1((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{u}_j\langle\partial_j\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle,\ a_2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0.25\,\nu\int_{\Omega(t)}\sum_{i,j=1}^{m}(\partial_j\boldsymbol{v}_i+\partial_i\boldsymbol{v}_j)(\partial_j\boldsymbol{w}_i+\partial_i\boldsymbol{w}_j)\,d\Omega,$$

$$\varphi(\boldsymbol{w}) = \langle f, \boldsymbol{w} \rangle + \int_{\Gamma_2(t)} \sum_{i=1}^{m} p_\sigma \boldsymbol{w}_i (n, e_i) ds + \int_{\Gamma_4(t)} \sum_{i=1}^{m} \bar{p} \boldsymbol{w}_i (n, e_i) ds,$$

$$b(\boldsymbol{v}, \delta p) = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \delta p \, d\Omega$$

и p_σ — поверхностное напряжение, которое является известной функцией формы кривой $\Gamma_2(t)$ и свойств флюидов (напр. [1; 4]), ν — кинематический вискозитет, $\bar{p}$ — давление, которое газ упражняет по $\Gamma_4(t)$, n — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega_1(t)$, e_i — единичный вектор оси x_i, f — вектор объемных сил.

Отметим, что (1), (2) имеет смысл для $\boldsymbol{v}, \delta\boldsymbol{v} \in [W_2^1(\Omega(t))]^m$;

$$p, \delta p \in L(\Omega(t)), \; L(\Omega(t)) = L_2^0(\Omega(t)) = \{p : \int_{\Omega(t)} p^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega(t)} p d\Omega = 0\},$$

если meas $(\Gamma_4(t)) = 0$ [2] и $L(\Omega(t)) = L_2(\Omega(t))$, если meas $(\Gamma_4(t)) \neq 0$ (не будем останавливаться на требованиях гладкости по t). Особая структура пространства $L(\Omega(t))$ связана с тем, что вектор $(\boldsymbol{v} = 0, p = 1)$ является решением однородной задачи (1), (2), если meas $\Gamma_4 = 0$.

Рассмотрим метод конечных элементов как частный случай метода Галеркина. Пусть

$$\boldsymbol{v}_h = \sum_{s=1}^{L} \psi_s \boldsymbol{v}_s, \tag{3}$$

$$p_h = \sum_{j=1}^{M} p_j \varphi_j, \tag{4}$$

где L — число неизвестных параметров для $\boldsymbol{v}$, M — для p в Ω,

$$\psi_s = \begin{pmatrix} \psi_{1,1}^{(s)} & \cdots & \psi_{1,m}^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{m,1}^{(s)} & \cdots & \psi_{m,m}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_s = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Условие допустимости базисных функций имеет вид

$$\begin{cases} \psi_{*,i}^{(s)} \in [W_2^1(\Omega(t))]^m, i = \overline{1, m}; s = \overline{1, L}, \\ \varphi_j \in L(\Omega(t)), \qquad j = \overline{1, M}, \end{cases} \tag{5}$$

где через $\psi_{*,i}^{(s)}$ обозначен i-тый столбец ψ_s, $i = \overline{1, m}$ везде означает $i = 1, \ldots, m$. Для простоты считаем, что область Ω покрыта в точности конечными элементами. Кроме того, если meas $\Gamma_4 \neq 0$, то по крайней мере один узел для скорости лежит на этой границе.

Пусть $P_s \in \Gamma_1$, $s = \overline{N+1, L}$ все узлы, лежащие на Γ_1. Тогда $\delta\boldsymbol{v}_h = \Sigma_{s=1}^{N} \delta\boldsymbol{v}_s \psi_s$, $\delta p_h = \Sigma_{j=1}^{M} \delta p_j \varphi_j$ и подставляя в (1), (2), получаем

$$\langle \partial_t \boldsymbol{v}_h, \psi_{*,i}^{(s)} \rangle + a((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h), \psi_{*,i}^{(s)}) + b(\psi_{*,i}^{(s)}, p_h) = \varphi(\psi_{*,i}^{(s)}), \; i = \overline{1, m}; s = \overline{1, N}, \tag{6}$$

$$b(\boldsymbol{v}_h, \varphi_j) = 0, \; j = \overline{1, M}. \tag{7}$$

Если дискретизировать по t каким-нибудь образом $\langle \partial_t \boldsymbol{v}_h, \psi_{*,i}^{(s)} \rangle$, взять функционалы в (5), (6) в какой-нибудь момент времени, скажем $\hat{t} = t^{j+1}$ и подставить основные граничные условия, получаем для узловых параметров $\widehat{V}$ для скорости в момент $\widehat{t}$ систему

$$K(\widehat{V})\,\widehat{V}+B^T\,\widehat{P}=F, \tag{8}$$

$$B\,\widehat{V}=G, \tag{9}$$

где $B=\|b_{i,j}\|_{i,j=1}^{M,mN}$, $b_{i,(s-1)m+k}=b\;(\psi^{(s)}_{*,k},\ \varphi_i)$, выражение для $K(\widehat{V})$ мы не будем приводить, так как оно не будет существенным для следующих рассуждений.

Часто вместо $K(\widehat{V})$ берут $K(V)$, делая, если нужно, несколько итераций до установления.

В случае задач со свободной границей, для определения $\Gamma_2(t)$ используется уравнение движения свободной границы (напр. [4])

$$DS/Dt=0, \tag{10}$$

где $$\Gamma_2(t):S(x_1,\ldots,x_m,t)=0.$$

На одном способе дискретизации этого уравнения остановимся в конце настоящей работы.

2. Свойства системы уравнений, полученной в результате применения метода конечных элементов. Будем рассматривать случай meas $\Gamma_4(t)=0$, т. е. задачи с фиксированными или внутренними свободными границами. Случай внешней границы будет рассмотрен в замечаниях на основе рассуждений в вышеупомянутых случаях.

Базисные функции конечных элементов $\varphi_j\in L_2(\Omega(t))$, но $\varphi_j\notin L_2^0(\Omega(t))$, так что условие допустимости не удовлетворяется. На практике для них пишут систему (8), (9), к ней добавляют уравнение

$$p_h(P_M)=c_M, \tag{11}$$

где c_M — произвольно выбранная константа, P_M — узел для давления, и вычеркивают какое-нибудь из уравнений (9).

Проверим, при каких условиях эта процедура корректна.

Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^M$ — линейно независимые функции из $L_2(\Omega)$, которые интерполируют точно константы в Ω, $L_h=L(\varphi_1,\ldots,\varphi_M)$.

$$\sum_{j=1}^{M}\varphi_j=1,\ \text{т. е. }\ 1\in L_h. \tag{12}$$

Это условие необходимо для сходимости и называется в случае задач строителной механики „условием постоянной деформации" [5].

Теорема 1. *Вектор* $(\{V_s\}_{s=1}^N=0,\ \{P_j\}_{j=1}^M=1)$ *является собственным вектором однородной задачи* (8), (9).

Доказательство.

$$K(\widehat{V})\{0\}+B^T\ \{1\}=\sum_{j=1}^{M}b\,(\psi^{(s)}_{*,k},\ \varphi_j)\,1=b\,(\psi^{(s)}_{*,k},\ \sum_{j=1}^{M}\varphi_j).$$

Используя (12), получаем

$$K(\widehat{V})\{0\}+B^T\{1\}=b\,(\psi^{(s)}_{*,k},1)=\int_{\partial\Omega(t)}\sum_{l=1}^{m}\psi^{(s)}_{l,k}(n,l_k)\,ds$$

для $k=\overline{1,m}$, $s=\overline{1,N}$, так как в случае задач без внешней свободной границы $\psi_{l,k}^{(s)}\big|_{\partial\Omega(t)}=0$.

Замечание 1. Для задач с внешними свободными границами теорема 1 не верна.

Теорема 2. *Сумма строк матрицы B, рассматриваемых как вектора, есть нуль. Система* (9) *совместима, если выполнено условие*

$$\int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{v}_{h\cdot n}\, dS=0, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{v}_{h\cdot n}=(\boldsymbol{v}_h, n)$, n *— единичная внешняя нормаль к* $\partial\Omega(t)$.

Доказательство. Разложим $\boldsymbol{v}_h$ на две части: первая содержит базисные функции, которые аннулируются по границе области $\partial\Omega(t)$, вторая — те, которые не аннулируются

$$\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{v}_h^0+\boldsymbol{v}_h^\Gamma\,;\ \ \boldsymbol{v}_h^0=\sum_{s\in A}\psi_s\,\boldsymbol{v}_s\,;\ A=\{s:\psi_{k,i}^{(s)}\big|_{\partial\Omega}=0\,;\ k,i=\overline{1,m}\}.$$

Гомогенная задача (9) эквивалентна задаче $b(\boldsymbol{v}_h^0,\varphi_j)=0$, $j=\overline{1,M}$. Следовательно, $\Sigma_{j=1}^M b(\boldsymbol{v}_h^0,\varphi_j)=b(\boldsymbol{v}_h^0,1)=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}_{h,n}^0\,ds=0$ для всех $\boldsymbol{v}_h^0$. Неоднородная задача (9) эквивалентна задаче $b(\boldsymbol{v}_h^0,\varphi_j)=-b(\boldsymbol{v}_h^\Gamma,\varphi_j)$, $j=\overline{1,M}$. Следовательно, $\Sigma_{j=1}^M b(\boldsymbol{v}_h^0,\varphi_j)=0=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}_{h,n}^\Gamma\,ds=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}_{h,n}ds$.

Замечание 2. Если meas $\Gamma_4\neq 0$, то сумма строк B не ноль, и (13) следует из (9).

Условие (13) называем условием интегральной несжимаемости жидкости в области Ω. Оно является аналогом необходимого условия существования решения уравнений Навье — Стокса [2; 3], которое следует из солиноидальности $\boldsymbol{v}$ в Ω.

$$\int_{\partial\Omega} g_n\, ds=0,\ \text{где}\ \ g=\boldsymbol{v}\,\big|_{\partial\Omega}. \tag{14}$$

Для многих, пользующихся популярностью конечных элементов (КЭ), (13) выполнено только приближенно и, строго говоря, система (8), (9) не совместима. Поэтому не все равно, какое из уравнений вычеркнуть из (9). Существуют КӨ специального вида, которые, кроме притежания ряда хороших качеств, удовлетворяют в точности условие (13) для каждого составленного из КЭ контура [2; 6].

Теперь проверим, что, если выполняются (12), (13), то система уравнений, полученная вышеописанным способом, эквивалентна системе, порожденной допустимыми базисными функциями.

Функции $\bar\varphi_j=\varphi_j-c_j\in L_2^0(\Omega(t))$ для $c_j=A\int_\Omega\varphi_j\,d\Omega$, $A=(\mathrm{meas}\,\Omega)^{-1}$, $j=\overline{1,M}$ линейно зависимы, так как $\Sigma_{j=1}^M\bar\varphi_j=\Sigma_{j=1}^M\varphi_j-A\int_\Omega\Sigma_{j=1}^M\varphi_j\;d\Omega=0$.

Легко проверить, что каждые $M-1$ таких функций линейно независимы, и что $\{\bar\varphi_j\}_{j=1}^{M-1}$ — базис в $L_h^0=\{p_h\in L_h,\int_\Omega p_h\,d\Omega=0\}$.

Теорема 3. *Пусть* $\bar b_{j,(s-1)m+i}=b(\psi_{*,i}^{(s)},\bar\varphi_j)$ $i=\overline{1,m}\,;s=\overline{1,L}\,;\ j=\overline{1,M-1}$ *и выполнены* (12), (13). *Тогда* $\bar b_{i,j}=b_{i,j}\,j=\overline{1,mL}\,;\ i=\overline{1,M-1}$.

Доказательство. $b(\boldsymbol{v}_h,\bar\varphi_j)=b(\boldsymbol{v}_h,\varphi_j-c_j)=b(\boldsymbol{v}_h,\varphi_j)-c_j\,b(\boldsymbol{v}_h,1)=b(\boldsymbol{v}_h,\varphi_j)$.

Другими словами, вычеркивание k-того уравнения из (9) эквивалентно выбрасыванию $\bar\varphi_k$ из $\{\varphi_j\}_{j=1}^M$, чтобы получить линейно независимую систему.

Замечание 3. Из теоремы 3 следует следующее необходимое и достаточное условие для Rang $B=M-1$: Если $b(\boldsymbol{v}_h,\Sigma_{j=1}^{M-1}c_j\bar\varphi_j)=0$ для каждого

$\boldsymbol{v}_h$, удовлетворяющему однородные граничные условия, то $\Sigma_{j=1}^{M-1} c_j \varphi_j = 0$. Так как $\boldsymbol{v}_h^0$ имеет mN степеней свободы, и кроме того, обычно $N \geq M$, это условие не выглядит обременительным.

Система (8), (9), (12) для $\{\varphi_j\}_{j=1}^{M}$ эквивалентна системе вида

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} a((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h), \psi_{*,i}^{(s)}) + b(\psi_{*,i}^{(s)}, p_h) = \bar{\varphi}(\psi_{*,i}^{(s)}) & i = \overline{1, m};\ s = \overline{1, N}, \\ b(\boldsymbol{v}_h, \varphi_j) = 0, & j = \overline{1, M}, \\ p_h(P_M) = c_M, \end{cases}$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\varphi}$ некоторые линейные по последнему аргументу функционалы, для $\{\bar{\varphi}_j\}_{j=1}^{M-1}$ (8), (9) эквивалентна

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} a((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h), \psi_{*,i}^{(s)}) + b(\psi_{*,i}^{(s)}, \bar{p}_h) = \varphi(\psi_{*,i}^{(s)}), & i = \overline{1, m},\ s = \overline{1, L}, \\ b(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \varphi_j) = 0, & j = \overline{1, M-1}. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть выполнено* (12), (13) *для* $\boldsymbol{v}_h$ *и* $\bar{\boldsymbol{v}}_h$. *Системы* (*A*) *и* (B) *эквивалентны в следующем смысле*: $(\boldsymbol{v}_h, p_h - A\int_\Omega p_h\, d\Omega)$ *есть решением* (B), *а* $(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \bar{p}_h - p_h(P_M) + c_M)$ — решением (A).

Доказательство. В случае задач без внешней свободной границы $b(\psi_{*,i}^{(s)}, 1) = 0$. Следовательно, $\bar{a}((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h), \psi_{*,i}^{(s)}) + b\ (\psi_{*,i}^{(s)}, p_h - A\int_\Omega p_h\, d\Omega) = \varphi\ (\psi_{*,i}^{(s)})$, $b(\boldsymbol{v}_h, \varphi_j) = 0$.

Согласно (13), $b(\boldsymbol{v}_h, 1) = 0$. Следовательно, $b(\boldsymbol{v}_h, \bar{\varphi}_j) = 0$, $j = \overline{1, M-1}$; $p_h - A\int_\Omega p_h\, d\Omega \in L_h^0$ и мы получили, что $(\boldsymbol{v}_h, p_h - A\int_\Omega p_h\, d\Omega)$ — решение (B).

Наоборот, из $b(\boldsymbol{v}_h, 1) = 0$, и $b\ (\boldsymbol{v}_h, \varphi_j) = 0$, $j = \overline{1, M-1}$ следует, что $b(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \varphi_j) = 0$, $j = \overline{1, M}$. Для любой константы c $b(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \bar{p}_h) = b(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \bar{p}_h - c)$ и, следовательно, $(\bar{\boldsymbol{v}}_h, \bar{p}_h - p_h\ (M) + c_M)$ — решение (A).

Замечание 4. Теоремы 1, 4 в силе для всех линеаризаций $K(\hat{\boldsymbol{v}})$, в частности для $K(\boldsymbol{v})$.

3. Нахождение свободной границы. Рассмотрим только случай $m = 2$ и свободная граница однозначная, один раз гладкая кривая $S: y - Y(x, t) = 0$, $x \in [a, b]$ [7]. Другой подход можно увидеть в [1; 4]. Условие $S \in C^{(1)}$ необходимо, чтобы p_h в (1) было дефинировано. Из (10) получается

$$Y(x, \hat{t}) = Y(x, t) + \int_t^{\hat{t}} (\boldsymbol{v}, n)\, ds, \text{ где } \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(x, Y(x, t)), n = (-\partial_x Y(x, t), 1).$$

Следовательно, для формулы-предиктор можно использовать

$$Y^{(1)}(x, \hat{t}) = Y(x, t) + \tau(\boldsymbol{v}_h(x, t), n(x, t)), \tag{15}$$

а для формулы-корректор

$$Y^{(2)}(x, \hat{t}) = Y(x, t) + 0.5\,\tau\,[(\boldsymbol{v}_h(x, t), n(x, t)) + (\boldsymbol{v}_h(x, \hat{t}), n(x, \hat{t}))], \tag{16}$$

где $\boldsymbol{v}_h(\hat{t})$ получено в результате решения (8), (9) в $\hat{\Omega}^{(1)}$, определенной, например, по (15).

Формула (16) имеет такую особенность, которая может быть использована без некоторого доуточнения только для $\hat{\Gamma}_2^{(1)} \in C^{(1)}$. Если $\hat{\Gamma}_2^{(1)} \in C^{(0)}$, можно аппроксимировать кривую сплайном или условиться понимать подходящим образом p_h и n в точках разрыва.

Проверим при каких условиях (15), (16) дефинируют консервативную схему по отношению к закону сохранения массы.

Теорема 5. *Пусть* $\partial\Omega_1(t)$ — *один раз гладкая кривая, которая удовлетворяет* (10), $\boldsymbol{v}$ — *условие* (14) *интегральной несжимаемости в* $\Omega_1(t)$. *Тогда*

$$\int_{\Omega_1(\hat{t})} \rho\, d\Omega = \int_{\Omega_1(t)} \rho\, d\Omega - \int_t^{\hat{t}} \int_{\Gamma_1} \rho\, \boldsymbol{v}_n(\zeta)\, ds\, d\zeta. \tag{17}$$

Действительно, по теореме Рейнольдса

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1(\hat{t})} \rho\, d\Omega = \int_{\Omega_1(t)} \frac{d\rho}{dt}\, d\Omega + \int_{\Gamma_2(t)} \boldsymbol{v}_n\, \rho ds = \int_{\partial\Omega_1(t)} \rho \boldsymbol{v}_n\, ds - \int_{\Gamma_1} \rho \boldsymbol{v}_n\, ds = -\int_{\Gamma_2} \rho \boldsymbol{v}_n\, ds.$$

Замечание 5. Последний член в (17) отражает обмен жидкости в области $\Omega_1(t)$ с внешней жидкостью через границу Γ_1.

Теорема 6. *Пусть* $\hat{\Omega}_1$ *найдена по* (15) *и выполнено условие* (13) *интегральной несжимаемости в* $\Omega_1(t)$. *Тогда* $\int_{\hat{\Omega}_1} \rho\, d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho\, d\Omega - \tau \int_{\Gamma_1} \rho\, \boldsymbol{v}_{h,n}\, ds$.

Доказательство.

$$\int_{\hat{\Omega}_1} \rho\, d\Omega = \rho \int_a^b Y(x,\hat{t})\, dx = \int_a^b \rho\, Y(x,t)\, dx + \tau \int_a^b \rho\, (\boldsymbol{v}_h, n)\, dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \rho\, d\Omega + \tau \int_a^b \boldsymbol{v}_{h,n} \sqrt{1+(\partial_x Y(x,t))^2}\, dx = \int_{\Omega_1} \rho\, d\Omega + \tau \int_{\Gamma_2(t)} \boldsymbol{v}_{h,n}\, ds = \int_{\Omega_1} \rho\, d\Omega - \tau \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{v}_{h,n}\, ds.$$

Теорема 7. *Пусть* $\hat{\Omega}_1^{(2)}$ *определена по* (16), $\boldsymbol{v}_h$ *и* $\hat{\boldsymbol{v}}_h$ *удовлетворяют* (13) *в* Ω_1 *и* $\hat{\Omega}_1^{(1)}$ *соответственно. Тогда* $\int_{\hat{\Omega}_1} \rho\, d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho\, d\Omega - 0.5\, \tau \int_{\Gamma_1} \rho\, (\boldsymbol{v}_{h,n} + \hat{\boldsymbol{v}}_{h,n})\, ds$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Следствие 1. *Если поток жидкости через фиксированную границу равен нулю или* $\Gamma_1 = \varnothing$ *и выполняется* (13) *в* Ω_1, *то масса жидкости в* Ω_1 *равна массе жидкости в* $\hat{\Omega}_1$.

Замечание 6. Для теоремы 7 не существенно, определяется ли $\hat{\Omega}^{(1)}$ по (15) или каким-нибудь другим образом.

Если (13) не выполняется на каждом шагу, масса жидкости в $\Omega_1(t)$ меняется на $O(\tau)$, что может привести к накоплению ошибки.

В заключение выражаю благодарность Р. Д. Лазарову за существенную помощь при работе над этой статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Коннор, К. Бреббия. Метод конечных элементов в механике жидкости, М. 1979.
2. V. Girault, P. Raviart. A Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. *Lecture Notes in Math.*, **497**. Berlin, 1979.
3. О. А. Ладиженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости М., 1970.
4. K. Nakajima, A. Shima. Analysis of the Behavior of a Bubble in a Viscous Incompressible Liquid by Finite Element Method. *Ingenier-Archiv*, **46**, 1977, 21-34.

5. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория методика конечных элементов. М., 1977.
6. П. Й. Шопов. Относно един краен елемент за уравненията на Навие-Стокс. *Сборник материали на II КДУ*, Русе, 1981 г. (под печат).
7. П. Й. Шопов. Обща схема на МКЕ за задачи от динамика на несвиваемите флуиди, *Сборник материали на VII НМШ „Приложение на математиката в техниката" Варна 81* (под печат).

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 6.11.1981