Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ — УСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ СЛУЧАЙ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Линейная задача оптимального управления по быстродействию объектом, при некоторых из производных в законе движения которого имеется малый положительный параметр, рассматривается в [6, 3]. В настоящей работе представлено расширение результатов из [3]. Характеризовано поведение решения задачи, когда параметр стремится к нулю в случае, который, согласно [1], называется условно устойчивым.

1. Рассматривается автономный управляемый объект Q_λ, $\lambda \in (0, \Lambda)$, $\Lambda > 0$, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1 u,\\
\lambda\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y \qquad\quad + B_2 u,\\
\lambda\dot{z} &= A_{31}x \qquad\quad + A_{33}z + B_3 u,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где фазовые векторы x, y, z принадлежат, соответственно, конечномерным пространствам R^{n_1}, R^{n_2}, R^{n_3}; управляющий параметр u принадлежит выпуклому и компактному многограннику $\Omega \subset R^r$, а начало координат O_r пространства R^r принадлежит внутренности множества Ω. Множество U допустимых управлений состоит из кусочно-непрерывных функций u, определенных на конечных отрезках времени $[0, t_1]$, и таких, что $u(t) \in \Omega$, $0 \leqq t \leqq t_1$. Любое допустимое управление имеет конечное число точек разрыва, которые принадлежат интервалу $(0, t_1)$, и непрерывно справа в этих точках.

Через Γ_λ обозначим задачу, которая состоит в нахождении допустимого управления, которое переводит объект Q_λ из фиксированного начального состояния (v_0, w_0, s_0) в начало координат O пространства $R^{n_1+n_2+n_3}$ в минимально возможное время. Дополнительные предположения, которые в дальнейшем накладываюся, гарантируют существование оптимального управления для задачи Γ_λ. Пусть $T(\lambda)$ — оптимальное время в этой задаче. Через Γ_0 обозначим задачу, которая состоит в нахождении допустимого управления, которое переводит объект Q_0 с законом движения

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u, \tag{1.2}$$

где $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{31}$; $B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 - A_{13}A_{33}^{-1}B_3$, из начального состояния v_0 в начало координат O_{n_1} пространства R^{n_1} в минимально возможное время.

Перечислим условия, при которых исследуется поведение решения задачи Γ_λ, когда параметр λ стремится к нулю.

А. Действительные части характеристических чисел матрицы A_{22} отрицательны, а действительные части характеристических чисел матрицы A_{33} положительны.

СЕРДИКА Българско математическо списание, Том 9, 1983, с. 377—384.

B. Для объекта Q_0 и многогранника Ω выполняется условие общности положения (см. [4]); существует оптимальное управление $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T_0$ для задачи Γ_0.

C. Имеют место равенства

$$\operatorname{rank}[B_2, A_{22}B_2, \ldots, A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2,$$

$$\operatorname{rank}[B_3, A_{33}B_3, \ldots, A_{33}^{n_3-1}B_3] = n_3.$$

D. При некотором $q \in (0, 1)$ для $\lambda \in (0, \Lambda)$ выполняется

$$\max\{\int_0^t \| \int_\sigma^t X(t, \tau)A_{12}A_{22}^{-1}dY(\tau, \sigma, \lambda)A_{21} \| d\sigma :\ 0 \leq t \leq T_0+1\}$$

$$+\max\{\int_t^{T_0+1} \| \int_0^t X(t, \tau)A_{13}A_{33}^{-1}dZ(\tau, \sigma, \lambda)A_{31} \| d\sigma :\ 0 \leq t \leq T_0+1\}$$

$$+\max\{\int_0^t \| \int_0^\sigma X(t, \tau)A_{13}A_{33}^{-1}dZ(\tau, \sigma, \lambda)A_{31} \| d\sigma :\ 0 \leq t \leq T_0+1\} \leq q,$$

где

$$X(t, \tau) = \exp(A_{11}(t-\tau)),\ Y(t, \tau, \lambda) = \exp\left(A_{22}\frac{t-\tau}{\lambda}\right), \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

$$Z(t, \tau, \lambda) = \exp\left(A_{33}\frac{t-\tau}{\lambda}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

E. Существуют такое открытое множество $\Omega_s \subset \Omega$, число $\tau_s \in (0, T_0)$ и точка $\tilde{u}_s \in \Omega$, что для $\lambda \in (0, \Lambda)$ и $t \in [0, \tau_s]$ выполняется

$$\tilde{u}_s - B_3'\exp\left(-A_{33}'\frac{t}{\lambda}\right)M_0^{-1}(\lambda)A_{33}^{-1}[A_{31}v_0 + A_{33}s_0 + B_3\tilde{u}_s] \in \Omega_s,$$

где

$$M_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_{\sqrt{\lambda}}^0 Z(0, \tau, \lambda)B_3B_3'Z'(0, \tau, \lambda)d\tau\,;$$

через штрих обозначено транспонирование.

2. В дальнейшем используются некоторые результаты, которые имеют место для краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + f_1(t, \lambda), \\ \lambda\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y \qquad\qquad + f_2(t, \lambda), \qquad (2.1) \\ \lambda\dot{z} &= A_{31}x \qquad\qquad + A_{33}z + f_3(t, \lambda), \end{aligned}$$

$$x(0) = v_0(\lambda), \quad y(0) = w_0(\lambda), \quad z(t_\lambda) = s_1(\lambda), \qquad (2.2)$$

и для задачи

$$\dot{x} = A_0x + F(t), \qquad (2.3)$$

$$x(0) = v_0, \qquad (2.4)$$

где $F(t) = f_1(t, 0) - A_{12}A_{22}^{-1}f_2(t, 0) - A_{13}A_{33}^{-1}f_3(t, 0)$. В (2.1) и (2.2) сделаем замену $t = \tau t_\lambda/\tilde{t}$. Тогда получается задача

$$\frac{dx}{d\tau} = \sigma_\lambda(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + f_1(t, \lambda)),$$

(2.5)
$$\lambda\frac{dy}{d\tau} = \sigma_\lambda(A_{21}x + A_{22}y \qquad + f_2(t, \lambda)),$$

$$\lambda\frac{dz}{d\tau} = \sigma_\lambda(A_{31}x \qquad + A_{33}z + f_3(t, \lambda)),$$

$$x(0) = v_0(\lambda), \quad y(0) = w_0(\lambda), \quad z(\tilde{t}) = s_1(\lambda),$$

где положено $\sigma_\lambda = t_\lambda/\tilde{t}$. С помощью результатов из [2] для задачи (2.5) в дальнейшем будет характеризовано поведение решения задачи (2.1) (2.2), когда параметр λ стремится к нулю.

Далее изучаются некоторые свойства управляемого объекта O_λ, $\lambda \in (0, \Lambda)$, поведение которого описывается системой (1.1).

Лемма 2.1. *Пусть выполняются условия A, C, D. Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k > 0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$; $\{t_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $t_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} t_k = t^* \leq T_0 + 1/2$; $v_0 \in R^{n_1}$, $s_0 \in R^{n_3}$, $w_0 \in R^{n_2}$, $s_1 \in R^{n_3}$, $v_1 \in R^{n_1}$ — *фиксированные точки, для первых двух из которых выполняется условие E. Пусть, далее,* $\tilde{u}(t)$, $0 \leq t \leq t^*$, — *допустимое управление с соответствующей, согласно* (1.2), *траекторией* $\tilde{x}$, *для которой* $\tilde{x}(0) = v_0$, $\tilde{x}(t^*) = v_1$. *Тогда, если* $w_1 \in R^{n_2}$ *и существуют такие открытое множество* $\Omega_w \subset \Omega$, *число* $\tau_w \in (\tau_s, t^*)$ *и точка* $\tilde{u}_w \in \Omega$, *что для всех достаточно больших* k, *при* $t \in [\tau_w, t_k]$ *выполняется*

$$\tilde{u}_w + B_2' \exp\left(A_{22}' \frac{t_k - t}{\lambda_k}\right) M_1^{-1}(\lambda_k) A_{22}^{-1}[A_{21}v_1 + A_{22}w_1 + B_2\tilde{u}_w] \in \Omega_w,$$

где

$$M_1(\lambda_k) = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{t_k - \sqrt{\lambda_k}}^{t_k} Y(t_k, \tau, \lambda_k) B_2 B_2' Y'(t_k, \tau, \lambda_k) d\tau,$$

то для любого числа $\gamma > 0$ *может быть построена последовательность* $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$ *допустимых управлений* $\tilde{u}_k(t)$, $0 \leq t \leq t_k$, *с соответствующими в силу* (1.1) *траекториями* $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$, *которые обладают следующими свойствами:*

1. *Последовательности* $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{z}_k\}_1^\infty$ *равномерно ограничены и в каждой точке* $t \in (0, t^*)$ *сходятся соответственно к* $\tilde{u}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y} = -A_{22}^{-1}[A_{21}\tilde{x} + B_2\tilde{u}]$, $\tilde{z} = -A_{33}^{-1}[A_{31}\tilde{x} + B_3\tilde{u}]$;
2. *Имеют место соотношения*

$$\tilde{x}_k(0) = v_0, \quad \tilde{y}_k(0) = w_0, \quad \tilde{z}_k(0) = s_0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \| \tilde{x}_k(t_k) - v_1 \| \leq \gamma, \ \tilde{y}_k(t_k) = w_1, \ \tilde{z}_k(t_k) = s_1.$$

Доказательство. Пусть γ — произвольное положительное число. В силу предположений леммы существуют такие точки τ_0 и τ_1, $0 < \tau_0 < \tau_s < \tau_w < \tau_1 < t^*$, точки $\tilde{w}_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, которые являются вершинами выпуклого многогранника, содержащего в своей внутренности точку w_1, и открытое множество $\Omega_1 \subset \Omega$, что при $t \in [\tau_w, t_k]$, $i = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, 2, \ldots$, выполняются соотношения

$$\widetilde{u}_w + B_2' \exp\left(A_{22}' \frac{t_k - t}{\lambda_k}\right) M_1^{-1}(\lambda_k) A_{22}^{-1} [A_{21}(v_1 + \int_0^{\tau_0} \exp(A_0(t^* - \tau)) B_0(\widetilde{u}_s - \widetilde{u}(\tau)) d\tau$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t^*} \exp(A_0(t^* - \tau)) B_0(\widetilde{u}_w - \widetilde{u}(\tau)) d\tau) + A_{22}\widetilde{w}_i + B_2 \widetilde{u}_w] \in \Omega_1,$$

$$\left\| \int_0^{\tau_0} \exp(A_0(t^* - \tau)) B_0(\widetilde{u}_s - \widetilde{u}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_1}^{t^*} \exp(A_0(t^* - \tau)) B_0(\widetilde{u}_w - \widetilde{u}(\tau)) d\tau \right\| \leq \gamma.$$

Если

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} \widetilde{u}_s, & 0 \leq t < \tau_0, \\ \widetilde{u}(t), & \tau_0 \leq t < \tau_1, \\ \widetilde{u}_w, & \tau_1 \leq t \leq T_0 + 1, \end{cases}$$

то допустимые управления $\widetilde{u}_k^i$, $i = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом: $\widetilde{u}_k^i = \overline{u} + \delta \widetilde{u}_k^i$, где

$$\delta \widetilde{u}_k^i(t) = \begin{cases} B_3' \exp\left(-A_{33}' \frac{t}{\lambda_k}\right) M_0^{-1}(\lambda_k) A_{33}^{-1} [A_{31} v_0 + A_{33} s_0 + B_3 \widetilde{u}_s], & 0 \leq t < \sqrt{\lambda_k}, \\ O_r & , \sqrt{\lambda_k} \leq t < t_k - \sqrt{\lambda_k}, \\ B_2' \exp\left(A_{22}' \frac{t_k - t}{\lambda_k}\right) M_1^{-1}(\lambda_k) A_{22}^{-1} [A_{21} \overline{x}(t^*) + A_{22} \widetilde{w}_i + B_2 \widetilde{u}_w, & t_k - \sqrt{\lambda_k} \leq t \leq t_k, \end{cases}$$

$\overline{x}$ — соответствующее управлению $\overline{u}$ решение уравнения (1.2) с начальным условием v_0. Решение системы (1.1) при $\lambda = \lambda_k$ и $u = \widetilde{u}_k^i$ с граничными условиями $x(0) = v_0$, $y(0) = w_0$, $z(t_k) = s_1$ обозначим через $(\widetilde{x}_k^i, \widetilde{y}_k^i, \widetilde{z}_k^i)$. Тогда как в лемме 2.1 и лемме 2.2 из [3] доказывается, что

$$\lim_{k \to \infty} \| \widetilde{x}_k^i(t_k) - v_1 \| \leq \gamma, \quad \lim_{k \to \infty} \widetilde{y}_k^i(t_k) = \widetilde{w}_i, \quad \lim_{k \to \infty} \widetilde{z}_k^i(0) = s_0.$$

Аналогичным образом, как в лемме 3.1 из [2] строится допустимое управление $\overline{u}_k$, являющееся выпуклой комбинацией управлений $\widetilde{u}_k^i$, $i = 1, \ldots, \nu$, с соответствующей в силу (1.1) при $\lambda = \lambda_k$ траекторией $(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)$, для которой выполняется

$$\overline{x}_k(0) = v_0, \quad \overline{y}_k(0) = w_0, \quad \overline{z}_k(t_k) = s_1, \lim_{k \to \infty} \| \overline{x}_k(t_1) - v_1 \| \leq \gamma, \quad \overline{y}_k(t_k) = w_1, \quad \lim_{k \to \infty} \overline{z}_k(0) = s_0.$$

Далее доказательство продолжается аналогичным образом, как и доказательство леммы 3.1 из [2].

3. Переходим к изучению поведения решения задачи Γ_λ, когда параметр λ стремится к нулю.

Через $K(T, \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda)$, $T > 0$ обозначим множество достижимости для объекта Q_λ из начального состояния (v_0, w_0, s_0) с помощью допустимых управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$. Аналогично через $K_0(T)$, $T > 0$ обозначим множество достижимости для объекта Q_0 из начального состояния v_0 с помощью допустимых управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются предположения A, B, C, D, E. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что, если $\lambda \in (0, \delta)$, то задача Γ_λ имеет решение и $|T(\lambda) - T_0| < \varepsilon$.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\limsup_{\lambda\to 0} T(\lambda)\leqq T_0. \tag{3.1}$$

Допустим, что существуют такая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ и число $\varepsilon_0>0$, что $0\notin K(T_0+\varepsilon_0,\lambda_k)$. Тогда найдется такой единичный вектор (q_k^1, q_k^2, q_k^3), $q_k^i\in R^{n_i}, i=1,2,3$, что для каждой точки $(x,y,z)\in K(T_0+\varepsilon_0,\lambda_k)$ выполняется

$$x'q_k^1+y'q_k^2+z'q_k^3<0. \tag{3.2}$$

Можем считать, что $\lim_{k\to\infty}(q_k^1, q_k^2, q_k^3)=(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$. В силу условия В при достаточно малом $\alpha>0$ существует такое допустимое управление $\bar u(t)$, $T_0\leqq t\leqq T_0+\varepsilon_0$, с соответствующей, согласно (1.2), траекторией $\bar x$, что $\bar x(T_0)=O_{n_1}$, $\bar x(T_0+\varepsilon_0)=\alpha q_0^1$. Введем обозначение

$$\bar u_0(t)=\begin{cases} u_0(t), & 0\leqq t<T_0,\\ \bar u(t), & T_0\leqq t\leqq T_0+\varepsilon_0.\end{cases}$$

Пусть число $\alpha>0$ и число $\beta>0$ выбраны так, чтобы могут быть найдены такое открытое множество $\Omega_w\subset\Omega$ и число $\tau_w\in(T_0, T_0+\varepsilon_0)$, что при всех достаточно больших k и $t\in[\tau_w, T_0+\varepsilon_0]$ выполнялось включение

$$B_2'\exp\left(A_{22}'\frac{T_0+\varepsilon_0-t}{\lambda_k}\right)M_1^{-1}(\lambda_k)A_{22}^{-1}[A_{21}q_0^1\alpha+\beta A_{22}q_0^2]\in\Omega_w.$$

Число $\gamma>0$ выбирается так, что

$$\alpha\,\|q_0^1\|^2+\beta\,(\|q_0^2\|^2+\|q_0^3\|^2)-\gamma\,\|q_0^1\|>0. \tag{3.3}$$

С помощью леммы 2.1 строятся соответствующие управлению $\bar u_0$ последовательности $\{\tilde u_k\}_1^\infty$, $\{\tilde x_k\}_1^\infty$, $\{\tilde y_k\}_1^\infty$, $\{\tilde z_k\}_1^\infty$, для которых

$$\tilde x_k(0)=v_0,\quad \tilde y_k(0)=w_0,\quad \tilde z_k(0)=s_0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\|\tilde x_k(T_0+\varepsilon_0)-\alpha q_0^1\|\leqq\gamma,\quad \tilde y_k(T_0+\varepsilon_0)=\beta q_0^2,\quad \tilde z_k(T_0+\varepsilon_0)=\beta q_0^3.$$

И так как $(\tilde x_k(T_0+\varepsilon_0), \tilde y_k(T_0+\varepsilon), \tilde z_k(T_0+\varepsilon_0))\in K(T_0+\varepsilon_0,\lambda_k)$, то в силу (3.2) имеет место неравенство $\tilde x_k'(T_0+\varepsilon_0)q_k^1+\tilde y_k'(T_0+\varepsilon_0)q_k^2+\tilde z_k'(T_0+\varepsilon_0)q_k^3<0$, откуда следует, что

$$-\|\tilde x_k(T_0+\varepsilon_0)-\alpha q_0^1\|\,\|q_k^1\|+\alpha(q_0^1)'q_k^1+\tilde y_k'(T_0+\varepsilon_0)q_k^2+\tilde z_k'(T_0+\varepsilon_0)q_k^3<0.$$

После предельного перехода в последнем неравенстве получается неравенство $-\gamma\|q_0^1\|+\alpha\|q_0^1\|^2+\beta(\|q_0^2\|^2+\|q_0^3\|^2)\leqq 0$, которое противоречит (3.3). Достигнутое противоречие доказывает, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что, если $\lambda\in(0,\delta)$, то $0\in K(T_0+\varepsilon,\lambda)$. Но из этого в силу [5] следует, что для тех же самых λ задача Γ_λ имеет решение и из уже доказанного следует соотношение (3.1).

Далее допустим, что $\limsup_{\lambda\to 0}T(\lambda)<T_0$. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — такая последовательность чисел $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$, что $\lim_{k\to\infty}T(\lambda_k)=T^*<T_0$. Пусть

далее, $u_k(t)$, $0\leq t\leq T(\lambda_k)$, — оптимальное управление для задачи Γ_{λ_k}. Допустимое управление

$$u_k^*(t)=\begin{cases} u_k(t), & 0\leq t< T(\lambda_k),\\ O_r, & T(\lambda_k)\leq t\leq T^*+(T_0-T^*)/2,\end{cases}$$

с соответствующей в силу (1.1) траекторией (x_k^*, y_k^*, z_k^*) переводит объект Q_{λ_k} из начального состояния (v_0, w_0, s_0) в начало координат O. Можем считать, что последовательность $\{u_k^*\}_1^\infty$ сходится слабо к $\widetilde{u}$ в $L_2^{(r)}[0, T^*+(T_0-T^*)/2]$ с соответствующей траекторией $\widetilde{x}$. Тогда из результатов в [2] следует, что последовательность $\{x_k^*\}_1^\infty$ сходится к $\widetilde{x}$ и имеет место равенство $\widetilde{x}(T^*+(T_0-T^*)/2)=O_{n_1}$. Но это означает, что $O_{n_1}\in K_0(\widetilde{T})$, где $\widetilde{T}=T^*+(T_0-T^*)/2<T_0$. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия A, B, C, D, E. Пусть далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ и $\{(q_k^1, q_k^2, q_k^3)\}_1^\infty$ — *последовательность единичных внешних нормалей* (q_k^1, q_k^2, q_k^3), $q_k^i\in R^{n_i}$ $i=1, 2, 3$, *к множеству* $K(T(\lambda_k), \lambda_k)$ *в точке* 0. *Тогда, если*

$$\lim_{k\to\infty}(q_k^1, q_k^2, q_k^3)=(q_0^1, q_0^2, q_0^3),$$

то $\|q_0^2\|=\|q_0^3\|=0$ *и* q_0^1 *является внешней нормалью к множеству* $K_0(T_0)$ *в точке* O_{n_1}.

Доказательство. Допустим, что $\|q_0^2\|^2+\|q_0^3\|^2\neq 0$. Число $\beta>0$, открытое множество $\Omega_w\subset\Omega$ и число $\tau_w\in(\tau_s, T_0)$ выбираются так, чтобы при всех достаточно больших k и $t\in[\tau_w, T_0]$ выполнялось включение

$$B_2'\exp\left(A_{22}'\frac{T_0-t}{\lambda_k}\right)M_1^{-1}(\lambda_k)\beta q_0^2\in\Omega_w.$$

Число $\gamma>0$ выбирается так, что

$$\beta(\|q_0^2\|^2+\|q_0^3\|^2)-\gamma\|q_0^1\|>0. \tag{3.4}$$

С помощью леммы 2.1 строятся соответствующие управлению u_0 последовательности $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{z}_k\}_1^\infty$, для которых

$$\widetilde{x}_k(0)=v_0,\quad \widetilde{y}_k(0)=w_0,\quad \widetilde{z}_k(0)=s_0,\quad \lim_{k\to\infty}\|\widetilde{x}_k(T(\lambda_k))\|\leq\gamma,$$

$$\widetilde{y}_k(T(\lambda_k))=\beta q_0^2,\quad \widetilde{z}_k(T(\lambda_k))=\beta q_0^3.$$

И так как $(\widetilde{x}(T(\lambda_k)), \widetilde{y}(T(\lambda_k)), \widetilde{z}(T(\lambda_k)))\in K(T(\lambda_k), \lambda_k)$, то имеет место неравенство

$$\widetilde{x}'(T(\lambda_k))q_k^1+\widetilde{y}_k'(T(\lambda_k))q_k^2+\widetilde{z}_k'(T(\lambda_k))q_k^3\leq 0, \tag{3.5}$$

откуда следует, что $-\|\widetilde{x}_k'(T(\lambda_k))\|\,\|q_k^1\|+\widetilde{y}_k'(T(\lambda_k))q_k^2+\widetilde{z}_k'(T(\lambda_k))q_k^3\leq 0$. После предельного перехода в последнем неравенстве получается неравенство, которое противоречит (3.4). Следовательно, $\|q_0^2\|=\|q_0^3\|=0$.

И наконец, допустим, что q_0^1 не является внешней нормалью к множеству $K_0(T_0)$ в точке O_{n_1}. Тогда найдется такая точка $\widetilde{v}\in K_0(T_0)$, что $\widetilde{v}'q_0^1>0$. Пусть $\widetilde{u}(t)$, $0\leq t\leq T_0$ — допустимое управление, которое переводит объект Q_0

из начального состояния v_0 в точку $\tilde{v}$. Пусть далее, число $\gamma>0$ удовлетворяет неравенству

$$\tilde{v}' q_0^1 - \gamma \| q_0^1 \| > 0. \tag{3.6}$$

В силу леммы 2.1 строятся соответствующие управлению $\tilde{u}$ последовательности $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{z}_k\}_1^\infty$, для которых

$$\tilde{x}_k(0) = v_0, \quad \tilde{y}_k(0) = w_0, \quad \tilde{z}_k(0) = s_0, \quad \lim_{k\to\infty} \| \tilde{x}_k(T(\lambda_k)) - \tilde{v} \| \le \gamma,$$

$$\tilde{y}_k(T(\lambda_k)) = -A_{22}^{-1} A_{21} \tilde{v}, \ \tilde{z}_k(T(\lambda_k)) = O_{n_s}.$$

Точка $(\tilde{x}_k(T(\lambda_k)), \tilde{y}_k(T(\lambda_k)), \tilde{z}_k(T(\lambda_k)))$ удовлетворяет неравенству (3.5), из которого, как и выше, приходим к противоречию с неравенством (3.6). Этим лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия A, B, C, D, E. Пусть далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *и* $\{(q_k^1, q_k^2, q_k^3)\}_1^\infty$ — *последовательность единичных внешних нормалей к множеству* $K(T(\lambda_k), \lambda_k)$ *в точке* 0. *Тогда, если* (ξ_k, η_k, ζ_k) — *решение задачи*

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= -A_{11}'\xi - \frac{1}{\lambda_k} A_{21}'\eta - \frac{1}{\lambda_k} A_{31}'\zeta, & \xi(T(\lambda_k)) &= q_k^1,\\
\dot{\eta} &= -A_{12}'\xi - \frac{1}{\lambda_k} A_{22}'\eta, & \eta(T(\lambda_k)) &= q_k^2,\\
\dot{\zeta} &= -A_{13}'\xi \qquad\quad - \frac{1}{\lambda_k} A_{33}'\zeta, & \zeta(T(\lambda_k)) &= q_k^3,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

то $\lim_{k\to\infty} \| \zeta_k(0) \| = 0$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, не ограничивая общности, можем считать, что $\lim_{k\to\infty} \zeta_k(0) = \zeta_0$ и $\| \zeta_0 \| \neq 0$. В силу условия E существуют такое число $\beta>0$, открытое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ и число $\tau_s^0 \in [0, \tau_s]$, что при всех достаточно больших k и $t \in [0, \tau_s^0]$ выполняется включение

$$\tilde{u}_s + B_3' \exp\left(-A_{33}' \frac{t}{\lambda_k}\right) M_0^{-1}(\lambda_k) A_{33}'^{-1} [A_{31} v_0 + A_{33}(s_0 - \beta\zeta_0) + B_3 \tilde{u}_s] \subset \Omega_1.$$

Пусть число $\gamma>0$ удовлетворяет неравенству

$$-\beta \| \zeta_0 \|^2 + \gamma < 0. \tag{3.8}$$

С помощью леммы 2.1 строятся соответствующие управлению u_0 последовательности $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{z}_k\}_1^\infty$, для которых

$$\tilde{x}_k(0) = v_0, \quad \tilde{y}_k(0) = w_0, \quad \tilde{z}_k(0) = s_0 - \beta\zeta_0, \lim_{k\to\infty} \| \tilde{x}_k(T(\lambda_k)) \| \le \gamma,$$

$$\tilde{y}_k(T(\lambda_k)) = O_{n_2}, \quad \tilde{z}_k(T(\lambda_k)) = O_{n_s}.$$

Пусть $u_k(t)$, $0 \le t \le T(\lambda_k)$ — оптимальное управление для задачи Γ_{λ_k} с соответствующей траекторией (x_k, y_k, z_k). Но так как (x_k, y_k, z_k) и $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$ удовлетворяют системе (1.1), а (ξ_k, η_k, ζ_k) удовлетворяют системе (3.7), то имеют место равенства

$$\xi_k'(T(\lambda_k))x_k(T(\lambda_k))+\eta_k'(T(\lambda_k))\,y_k(T(\lambda_k))+\zeta_k'(T(\lambda_k))z_k(T(\lambda_k))$$
$$-\xi_k'(0)v_0-\eta_k'(0)w_0-\zeta_k'(0)s_0$$
$$=\int_0^{T(\lambda_k)}\{\xi_k'(t)B_1+\frac{1}{\lambda_k}\eta_k'(t)B_2+\frac{1}{\lambda_k}\zeta_k'(t)B_3\}u_k(t)dt,$$

$$\xi_k'(T(\lambda_k))\widetilde{x}_k(T(\lambda_k))+\eta_k'(T(\lambda_k))\widetilde{y}_k(T(\lambda_k))+\zeta_k'(T(\lambda_k))\widetilde{z}_k(T(\lambda_k))$$
$$-\xi_k'(0)v_0-\eta_k'(0)w_0-\zeta_k'(0)(s_0-\beta\zeta_0)$$
$$=\int_0^{T(\lambda_k)}\{\xi_k'(t)B_1+\frac{1}{\lambda_k}\eta_k'(t)B_2+\frac{1}{\lambda_k}\zeta_k'(t)B_3\}\widetilde{u}_k(t)dt.$$

Вычитая второе равенство из первого и принимая в виду, что оптимальное управление u_k удовлетворяет принципу максимума [4], получаем неравенство $\xi_k'(T(\lambda_k))\widetilde{x}_k(T(\lambda_k))+\beta\zeta_k'(0)\zeta_0\leqq 0$, из которого следует, что

$$-\beta\zeta_k'(0)\zeta_0+\|\xi_k'(T(\lambda_k))\|\,\|\widetilde{x}_k(T(\lambda_k))\|\geqq 0.$$

После предельного перехода в последнем неравенстве заключаем, что имеет место неравенство $-\beta\|\zeta_0\|^2+\gamma\geqq 0$, которое противоречит (3.8). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия A, B, C, D, E. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что, если $\lambda\in(0,\delta)$ и u — оптимальное управление для задачи Γ_λ, то найдутся конечное число открытых интервалов Δ_i, $\operatorname{mes}\left(\bigcup_i\Delta_i\right)<\varepsilon$, для которых $u(t)=u_0(t)$, когда $t\in[0,T_0]\diagdown\bigcup_i\Delta_i$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0>0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ и оптимальное управление u_k для задачи Γ_{λ_k}, для которых утверждение теоремы не имеет место. Пусть (q_k^1,q_k^2,q_k^3) — единичная внешняя нормаль к множеству $K(T(\lambda_k),\lambda_k)$ в точке 0. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$\lim_{k\to\infty}(q_k^1,q_k^2,q_k^3)=(q_0^1,q_0^2,q_0^3).$$

Согласно лемме 3.1 $\|q_0^2\|=\|q_0^3\|=0$, а q_0^1 — внешняя нормаль к множеству $K_0(T_0)$ в точке O_{n_1}. Пусть через (ξ_k,η_k,ζ_k) обозначено решение задачи (3.7) Сделаем замену переменных $\eta=\lambda\varphi$, $\zeta=\lambda\psi$. Тогда (ξ_k,φ_k,ψ_k) — решение задачи

$$\begin{aligned}
\dot\xi&=-A_{11}'\xi-A_{21}'\varphi-A_{31}'\psi, && \xi(T(\lambda_k))=q_k^1,\\
\lambda_k\dot\varphi&=-A_{12}'\xi-A_{22}'\varphi, && \varphi(T(\lambda_k))=q_k^2/\lambda_k,\\
\lambda_k\dot\psi&=-A_{13}'\xi\qquad\qquad -A_{33}'\psi, && \psi(0)=\zeta_k(0)/\lambda_k,
\end{aligned}$$

где в силу леммы 3.2 выполняется $\lim_{k\to\infty}\|\zeta_k(0)\|=0$. Пусть ξ_0 — решение задачи $\dot\xi=-A_0'\xi$, $\xi(T_0)=q_0^1$ и введены обозначения $\widetilde{\tau}_k=\min[\tau_0,T(\lambda_k)]$, $\varphi_0(t)=-(A_{22}^{-1})'A_{12}'\xi_0(t)$, $\psi_0(t)=-(A_{33}^{-1})'A_{13}'\xi_0(t)$. В силу теоремы 2.2 из [2] для любых двух точек τ_0,τ_1; $0<\tau_0<\tau_1<\tau_0$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty}\{\max\{\|\xi_k(t)-\xi_0(t)\|:\ 0\le t\le\tilde{\tau}_k\}+\max\{\|\varphi_k(t)-\varphi_0(t)\|:\ 0\le t\le\tau_1\}$$
$$+\max\{\|\psi_k(t)-\psi_0(t)\|:\ \tau_0\le t\le\tilde{\tau}\}\}=0. \tag{3.9}$$

Пусть $0<\tau_2<\tau_3<\cdots<\tau_{l-1}<T_0$ — все точки интервала $(0, T_0)$, в которых оптимальное управление u_0 не определяется однозначно из условия максимума

$$\xi_0'(t)B_0u_0(t)=\max\{\xi_0'(t)B_0u:\ u\in\Omega\}. \tag{3.10}$$

Множество $\{\tau_i, i=2,\ldots,(l-1);\ 0, T_0\}$ покрывается открытыми непересекающимися интервалами Δ_i, $i=1,\ldots,l$, для которых $\operatorname{mes}\bigcup_i\Delta_i<\varepsilon_0/2$.

Согласно сделанному предположению, найдется такая последователь ность $\{t_k\}_1^\infty$ чисел $t_k\in[0, T_0]\setminus\bigcup_i\Delta_i$, $\lim_{k\to\infty}t_k=t^*$, что $u_k(t_k)\neq u_0(t_k)$, $u_k(t_k)=\bar{u}$ $u_0(t_k)=u^*$, $\bar{u}\neq u^*$. Но так как управление u_k удовлетворяет принципу максимума, то выполняется неравенство

$$[\xi_k'(t_k)B_1+\varphi_k'(t_k)B_2+\psi_k'(t_k)B_3]u_k(t_k)\ge[\xi_k'(t_k)B_1+\varphi_k'(t_k)B_2+\psi_3'(t_k)B_3]u_0(t_k).$$

Принимая в виду (3.9) после предельного перехода в верхнем неравенстве получаем неравенство $\xi_0'(t^*)B_0\bar{u}\ge\xi_0'(t^*)B_0u^*$, из которого в силу однозначной определенности управления u_0 из условия максимума (3.10) в точке t^* следует, что $\bar{u}=u^*$. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

Пусть $x_0(t)$, $0\le t\le T_0$ — оптимальная траектория в задаче Γ_0 и $y_0(t)=-A_{22}^{-1}[A_{21}x_0(t)+B_2u_0(t)]$, $z_0(t)=-A_{33}^{-1}[A_{31}x_0(t)+B_3u_0(t)]$.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия A, B, C, D, E. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что, если $\lambda\in(0,\delta)$ и u_λ — оптимальное управление для задачи Γ_λ с соответствующей траекторией $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$, то найдется конечное число таких открытых интервалов Δ_i, $i=1,\ldots,l$, $\operatorname{mes}\left(\bigcup_i\Delta_i\right)<\varepsilon$, что выполняются соотношения*

$$\max\{\|x_\lambda(t)-x_0(t)\|:\ t\in[0,\min[T(\lambda), T_0]]\}<\varepsilon,$$
$$\max\{\|y_\lambda(t)-y_0(t)\|:t\in[0, T_0]\setminus\bigcup_i\Delta_i\}<\varepsilon,\ \max\{\|z_\lambda(t)-z_0(t)\|:t\in[0, T_0]\setminus\bigcup_i\Delta_i\}<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы проводится от противного с использованием теоремы 2.2 из [2], и оно аналогично доказательству теоремы 3.2 из [3].

Замечание. Пусть поведение управляемого объекта описывается автономной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}&=C_{11}x+C_{12}\eta+B_1u,\\ \lambda\dot{\eta}&=C_{21}x+C_{22}\eta+Bu,\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $x\in R^{n_1}$, $\eta\in R^{n_2+n_3}$. Пусть действительные части характеристических чисел матрицы C_{22} отличны от нуля, причем n_2 из них отрицательны и n_3 — положительны. Тогда существует такая неособая матрица W, что имеет место равенство

$$W^{-1}C_{22}W=\begin{pmatrix}A_{22} & \theta_{n_2\times n_3}\\ \theta_{n_3\times n_2} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где A_{22} — квадратная матрица размера n_2, A_{33} — квадратная матрица размера n_3, а характеристические числа матриц A_{22} и A_{33} имеют соответственно отрицательные и положительные действительные части; через $\theta_{n_1\times n_2}$ и $\theta_{n_2\times n_1}$ обозначены нулевые матрицы соответствующей размерности. Если в (3.11) сделаем замену переменных (см. [1])

$$\eta = W\binom{y}{z}, \quad y\in R^{n_2}, \ z\in R^{n_3},$$

то объект с законом движения (3.11) трансформируется в объект с законом движения вида (1.1), для которого выполняется предположение А.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
2. Т. Р. Гичев. Сингулярные возмущения в задаче оптимального управления с выпуклым интегральным критерием — условно устойчивый случай. *Сердика*, **7**, 1981, 306—319.
3. Т. Р. Гичев, А. Л. Дончев. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия. *Прикл. матем. и механ.*, **43**, 1979, 466—474.
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
5. H. A. Halkin. New existens theorem in class of piccewise continuous control functions. — In: *Control theory and calculus of variations.* New York — London, 1969.
6. P. V. Kokotovic, A. H. Haddad. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Autom. Control*, **20**, 1975.

ВИАС, Бул. „Христо Смирненски“ № 1
1000 София

Поступила 28. 12. 1981
В переработанном виде 15. 3. 1982